## §21. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля

Физическая величина, определяющая электромагнитное взаимодействие, называется электрическим зарядом. Электрический заряд обозначается буквой $q$. Между электрическими зарядами одного знака действуют силы отталкивания, а между электрическими зарядами разного знака действуют силы притяжения.

Единица измерения электрического заряда в Международной системе единиц (СИ) – кулон. Один кулон – заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за 1 с при силе тока 1 А.

Абсолютная величина элементарного заряда равна

$$|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл,$$

где $|e|$ – взятый по модулю заряд электрона.

Любой электрический заряд, отличный от элементарного, состоит из целого числа элементарных зарядов

$$q = \pm |e| N,$$

где $N$ – целое (1, 2, 3,...) положительное число.

Заряд, состоящий из очень большого числа элементарных зарядов, называется макроскопическим. Электростатика изучает взаимодействие покоящихся макроскопических зарядов и свойства связанных с ними электрических полей (в вакууме и в среде). Электрические поля, созданные неподвижными зарядами, называются электростатическими, а электрические силы, характеризующие их взаимодействие, – электростатическими или кулоновскими.

Электростатическое поле – материальная среда, посредством которой взаимодействуют неподвижные электрические заряды.

Электрические заряды не действуют друг на друга непосредственно. Каждый из них создаёт в окружающем пространстве электрическое поле. Поле одного заряда действует на другой заряд и наоборот. Взаимодействие распространяется с конечной скоростью, равной скорости света (теория близкодействия является современной теорией взаимодействия заряженных частиц в отличии от теории дальнодействия, предполагающей мгновенное взаимодействие зарядов на любых расстояниях).

Заряд, распределённый по объёму, поверхности или линии, называется соответственно объёмным, поверхностным, линейным.

Объёмная плотность заряда – заряд, отнесённый к единице объёма:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$$

Поверхностная плотность заряда – заряд, отнесённый к единице поверхности:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}.$$

Линейная плотность заряда – заряд, отнесённый к единице длины:

$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}.$$

$dV$, $dS$, $dl$ – элементы объёма, поверхности, линии; $dq$ – элементарная порция макроскопического заряда $q$.

Каждый неподвижный заряд создает в окружающем пространстве электростатическое поле и через него действует на другие заряды. Электрический заряд, с помощью которого обнаруживается и исследуется электростатическое поле, называется пробным зарядом. Пробный заряд должен быть достаточно малым по модулю. Чем меньше пробный заряд, тем меньше он исказит исследуемое поле. Пробный заряд должен быть точечным. Пробный заряд должен быть положительным (так условились). Пробный заряд будем обозначать символом $q_+$.

Из обобщения опытных данных в 1843 г. английским физиком М. Фарадеем был установлен закон сохранения электрических зарядов: в замкнутой системе при любых взаимодействиях между телами алгебраическая сумма электрических зарядов всех тел остаётся постоянной

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_N = const.$$

Ш. Кулон (Франция) в 1785 г. установил закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов. Заряд называется точечным, если он сосредоточен на теле, размерами которого можно пренебречь.

Согласно закону Кулона, сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов $q_1$ и $q_2$ в вакууме прямо пропорциональна их произведению и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

где $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, проведенный от $q_1$ к $q_2$ (рис.7.1); $r_{12}$ – модуль этого вектора; $k$ – положительный коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Если $q_1$ и $q_2$ – заряды одного знака, т. е. $q_1 q_2 > 0$, то $\vec{F}_{21} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$ (рис. 7.1, *а*), если противоположного ($q_1 q_2 < 0$), то $\vec{F}_{21} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$ (рис. 7.1, *б*).

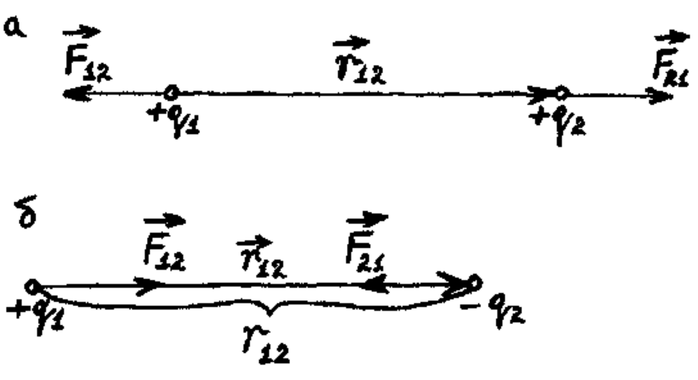


Рис. 7.1

Сила $\vec{F}_{12}$, с которой заряд $q_2$ действует на заряд $q_1$, равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}_{21}$, с которой $q_1$ действует на $q_2$:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

Закон справедлив и для заряженных шаров конечного размера (рис. 7.2, *а*), а также для зарядов, один из которых точечный, а другой равномерно распределён по поверхности или объёму сферы (рис.7.2, *б*). В первом случае расстояние $r_{12}$ – это расстояние между центрами шаров, а во втором – между центром сферы и точечным зарядом.

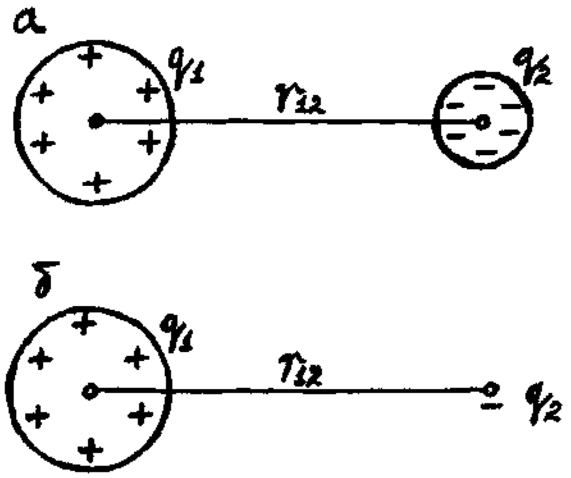

Рис. 7.2

Модули сил $\vec{F}_{21}$ и $\vec{F}_{12}$ равны

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \tag{7.1.1}$$

где $r$ – расстояние между зарядами.

Сила взаимодействия зарядов зависит от свойств среды, в которой они находятся. Если заряды поместить в диэлектрик, то сила взаимодействия между ними меньше, чем в вакууме в $\varepsilon$ раз, где

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}$$

– относительная диэлектрическая проницаемость среды, характеризует электрические свойства среды и показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме больше силы их взаимодействия в данной среде.

Следовательно, закон Кулона для взаимодействия зарядов в любой среде запишется так:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}.$$

Коэффициент $k$ определяется экспериментально: измерив силу $F$, с которой взаимодействуют два точечных неподвижных заряда $q_1$ и $q_2$, расположенные на некотором расстоянии $r$ друг от друга в молекулярном вакууме, и подставив все эти величины в (7.1.1), находят $k$. Если $F$ измерено в ньютонах, $q_1$ и $q_2$ – в кулонах, а $r$ – в метрах, т. е. в единицах СИ, то $k$ получается равным

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\,\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2},$$

где $\varepsilon_0$ – новый коэффициент пропорциональности, называемый электрической постоянной

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Кл^2}{Н\cdot м^2}.$$

Кл$^2$/(Н·м$^2$)=Ф/м (фарад на метр). Именно эта единица и выбрана для измерения $\varepsilon_0$ в СИ. Таким образом,

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}.$$

Физическая величина, равная отношению силы, с которой электростатическое поле действует на пробный заряд, к значению этого заряда, называется напряжённостью электростатического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+}. \tag{7.1.2}$$

Напряжённость электростатического поля является силовой характеристикой поля в данной точке пространства.

Единица измерения напряжённости электрического поля в СИ – ньютон на кулон (Н/Кл) или вольт на метр (В/м).

Из (7.1.2) следует, что на точечный заряд $q$ в точке поля с напряжённостью $\vec{E}$ действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Если $q > 0$, то $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{E}$, если $q < 0$, то $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{E}$.

Чтобы найти напряжённость поля точечного заряда $q$ в вакууме, нужно в (7.1.2) подставить выражение для силы, с которой $q$ действует на пробный заряд $q_+$.

По закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r},$$

где $r$ – радиус-вектор, проведенный от $q$ в точку, где находится пробный заряд. Следовательно,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}.$$

Модуль вектора напряжённости поля точечного заряда $q$ в вакууме равен

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

## §22. Линии напряжённости электростатического поля. Принцип суперпозиции полей

Для наглядности электростатическое поле изображают графически с помощью линий напряжённости. Графический способ представления электростатического поля широко применяется в электротехнике.

Линией напряжённости электростатического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{E}$ (рис. 7.3).


Рис. 7.3

Линии напряжённости никогда не пересекаются. В случае однородного поля (когда вектор напряжённости в любой точке пространства постоянен по величине и направлению) линии напряжённости параллельны вектору напряжённости.

Линии напряжённости положительного точечного заряда – радиальные прямые, выходящие из него (рис.7.4, *а*).

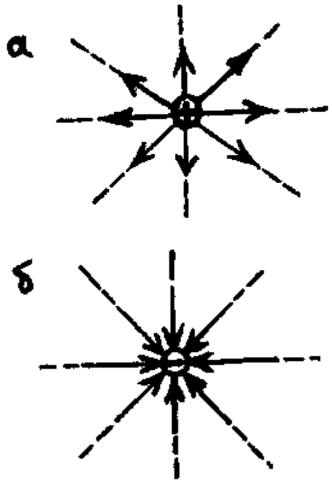


Рис. 7.4

Линии напряжённости отрицательного точечного заряда – радиальные прямые, входящие в него (рис. 7.4, *б*).

Картина распределения линий напряжённости электростатического поля для двух одноимённых зарядов имеет вид, показанный на рис. 7.5, *а*, а для разноимённых – на рис. 7.5, *б*.

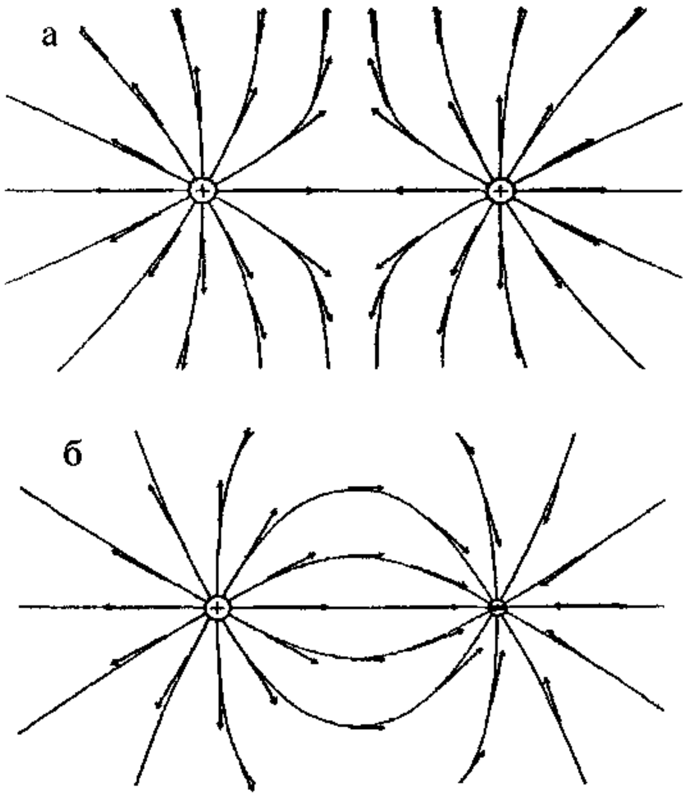


Рис. 7.5

Пусть поле создано в вакууме системой точечных зарядов $q_1, q_2, q_3,..., q_N$. Заряд $q_1$, взятый в отдельности (т. е. в отсутствии других зарядов), действует на пробный заряд $q_+$, помещённый в данную точку, с силой $\vec{F}_1$, заряд $q_2$ – с силой $\vec{F}_2$ и т. д. Опыт показывает, что результирующая сила $\vec{F}$, действующая на пробный заряд, равна сумме сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3,..., \vec{F}_N$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N. \qquad (7.2.1)$$

Разделив (7.2.1) на $q_+$, получим выражение для результирующей напряжённости

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... + \vec{E}_N$$

или

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \qquad (7.2.2)$$

где $\vec{E}_i$ – напряжённость, создаваемая зарядом $q_i$.

Таким образом, напряжённость поля, созданного системой зарядов, равна сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Соотношение (7.2.2) выражает принцип независимости действия полей, принцип суперпозиции (наложения) полей.

При непрерывном распределении зарядов суммирование (7.2.2) заменяется интегрированием элементарных напряжённостей $d\vec{E}$, создаваемых отдельными элементарными порциями макроскопического заряда $dq$:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}.$$

Принцип суперпозиции справедлив не только для электростатических, но и вихревых электрических полей.

## §23. Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса

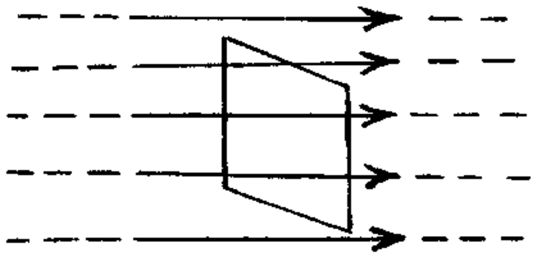

Рис. 7.10

Густота линий напряжённости (рис. 7.10) характеризует значение напряжённости электростатического поля. Число линий напряжённости, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряжённости, должно быть равно модулю вектора **E**. Величина,

$$dN_E = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}$$

называется элементарным потоком вектора напряжённости через площадку $dS$. Здесь $E_n$ – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $dS$ (рис. 7.11), $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор площадки, направление которого совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к площадке. Вектор $\vec{n}$ (а следовательно, и $d\vec{S}$) можно направить в любую сторону. [ $N_E$ ]=В·м.

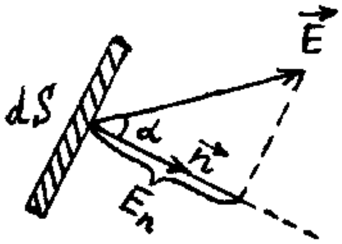


Рис. 7.11

Для произвольной замкнутой поверхности $S$ поток вектора $\vec{E}$ сквозь эту поверхность

$$N_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S},$$

где интеграл берётся по замкнутой поверхности $S$. $N_E$ является алгебраической величиной. Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т. е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме: поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённой на $\varepsilon_0$.

$$N_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad (7.3.1)$$

где $q$ – суммарный заряд.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объёмной плотностью $\rho = dq/dV$, различной в разных местах пространства. Тогда суммарный заряд, заключённый внутри замкнутой поверхности $S$, охватывающей некоторый объём $V$,

$$q = \sum_i q_i = \int_V \rho dV.$$

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Бесконечная плоскость (рис. 7.12) заряжена с постоянной поверхностной плотностью $+\sigma$. Линии напряжённости перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от неё в обе стороны.

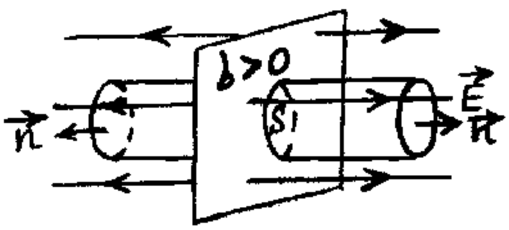


Рис. 7.12

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (7.3.2)$$

Из формулы (7.3.2) вытекает, что напряжённость поля на любых расстояниях одинакова по модулю, т. е. поле равномерно заряженной бесконечной плоскости однородно.

2. Поле двух бесконечных параллельных разноимённо заряженных плоскостей (рис. 7.13).

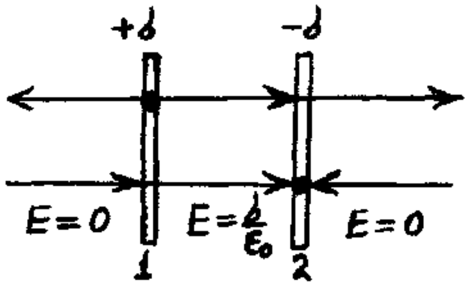


Рис. 7.13

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (7.3.3)$$

Результирующая напряжённость поля в области между плоскостями описывается формулой (7.3.3), а вне объёма, ограниченного плоскостями, равна нулю. На рис. 7.14 приведён график напряжённости поля двух плоскостей.

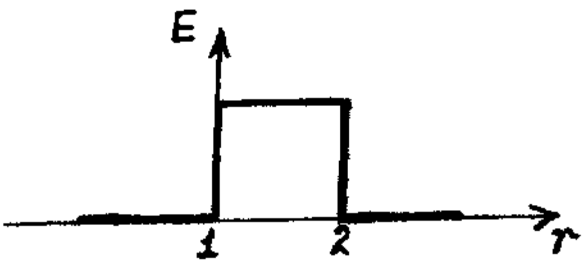


Рис. 7.14

3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности. Сферическая поверхность радиуса $R$ с общим зарядом $q$ заряжена равномерно с поверхностной плотностью $+\sigma$. Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряжённости направлены радиально (рис. 7.15).

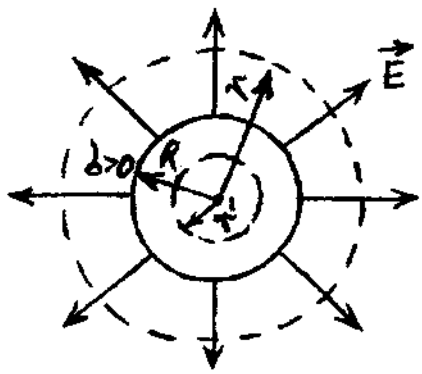


Рис. 7.15

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \quad (r \ge R). \qquad (7.3.4)$$

При $r > R$ поле убывает с расстоянием $r$ по такому же закону, как у точечного заряда. График зависимости $E$ от $r$ приведён на рис. 7.16.

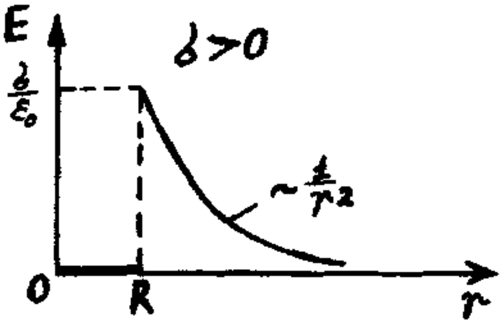

Рис. 7.16

Если $r' < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ( $E$ =0).

4. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити). Бесконечный цилиндр радиуса $R$ (рис. 7.18) заряжен равномерно с поверхностной плотностью $+\sigma$.

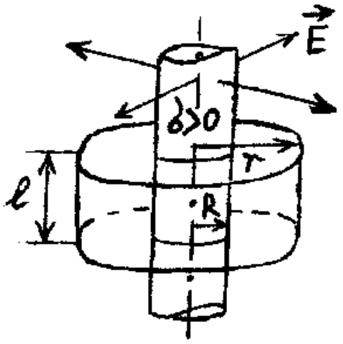

Рис. 7.18

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \qquad (r \geq R). \qquad (7.3.6)$$

Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E$ =0. Таким образом, напряжённость поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением (7.3.6), внутри же его поле отсутствует (рис. 7.19).

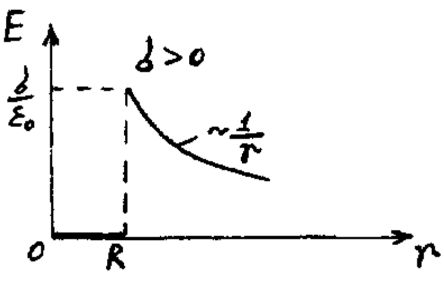

Рис. 7.19

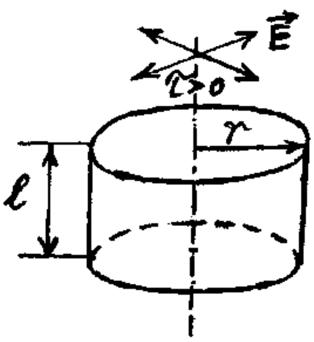

Рис. 7.20

В случае бесконечной нити (рис. 4.20), когда заряд равномерно распределён по всей её длине с линейной плотностью τ:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},$$

где $r$ – расстояние от нити до точки в которой ищется напряжённость электростатического поля.

## §24. Работа сил электростатического поля. Потенциал. Эквипотенциальные поверхности и их свойства

### Работа сил электростатического поля

Пусть точечный заряд $q'$ перемещается по произвольному пути $S_{12}$ из положения $\vec{r}_1$ в положение $\vec{r}_2$ в электростатическом поле, созданном другим точечным зарядом $q$ (рис. 7.22).

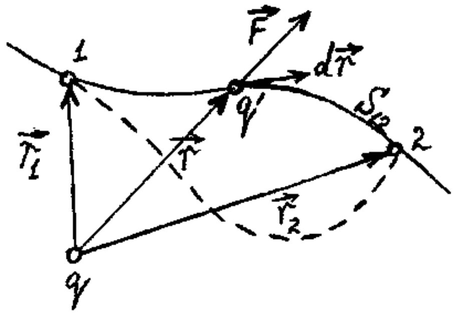

Рис. 7.22

Элементарная работа, совершаемая при перемещении $q'$ на $d\vec{r}$, равна

$$dA = \vec{F}d\vec{r}.$$

Сила по закону Кулона равна

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый от $q$ к $q'$.

Подставив выражение для $\vec{F}$ в формулу для работы и воспользовавшись тем обстоятельством, что скалярное произведение вектора на его элементарное приращение равно произведению модуля вектора на элементарное приращение модуля, получим

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}d\vec{r} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr. \qquad (7.4.1)$$

Проинтегрировав (7.4.1) по $r$ от $r_1$ до $r_2$, получим работу на участке 1-2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}. \qquad (7.4.2)$$

Мы видим, что работа сил электростатического поля не зависит от длины и формы пройденного пути $S_{12}$. Если бы перемещение заряда $q'$ из точки 1 в точку 2 происходило по другому пути (на рис. 7.22 этот путь изображён пунктирной линией), то работа всё равно была бы равна (7.4.2).

Таким образом, работа сил электростатического поля не зависит от формы пути. Следовательно, электростатические, кулоновские, силы консервативны, а их материальный носитель – электростатическое поле – потенциально.

Потенциал

Физическая величина, равная потенциальной энергии, которой обладал бы пробный заряд, помещённый в данную точку электростатического поля, называется потенциалом электростатического поля в этой точке:

$$\varphi = \frac{W}{q_+}. \qquad (7.4.4)$$

Потенциал – скалярная физическая величина, являющаяся энергетической характеристикой данной точки поля (для данной точки поля есть постоянная величина). Потенциал – величина, характеризующая электростатическое поле в каждой его точке независимо от того, есть в этой точке пробный заряд или нет. [ $\varphi$ ]=Дж/Кл=В.

Из (7.4.4) следует, что потенциальная энергия точечного заряда $q$, помещённого в точку поля с потенциалом $\varphi$, равна

$$W = q\varphi. \qquad (7.4.5)$$

Из механики известно, что, если сила стационарна и консервативна, то работа этой силы равна убыли потенциальной энергии того тела, к которому эта сила приложена. Электростатические силы стационарны и консервативны. Следовательно, их работа равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда

$$A_{12} = W_1 - W_2. \qquad (7.4.6)$$

Но согласно (7.4.5)

$$W_1 = q\varphi_1,$$

$$W_2 = q\varphi_2.$$

Следовательно,

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом, работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда, равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Как и потенциальная энергия, потенциал определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора нулевого уровня потенциала. Нулевой уровень потенциала, начало отсчёта $\varphi$, – это геометрическое место точек поля, потенциал которых условно принимается равным нулю. Нулевой уровень потенциала может быть выбран в бесконечности, на поверхности Земли и, вообще говоря, где угодно.

Потенциал данной точки поля относительно некоторого уровня численно равен работе, совершаемой силами электростатического поля при перемещении пробного заряда из данной точки в точку этого уровня.

Если поле создано системой точечных зарядов, то потенциал результирующего поля равен

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i,$$

где $\varphi_i$ – потенциал, создаваемый зарядом $q_i$. Из формул (7.4.2), (7.4.5) и (7.4.6) следует, что

$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}.$$

Если поле создано непрерывно распределённым зарядом, то потенциал этого поля равен интегралу

$$\varphi = \int d\varphi,$$

где $d\varphi$ – потенциал, создаваемый элементарной порцией заряда $dq$.

В электростатическом поле можно провести не только линии вектора напряжённости, но и построить эквипотенциальные поверхности.

Эквипотенциальная поверхность – поверхность, все точки которой имеют один и тот же потенциал. Эквипотенциальные поверхности обладают следующими свойствами:

1. Работа при перемещении заряда между любыми двумя точками одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

так как $\varphi_1 = \varphi_2$.

2. Вектор $\vec{E}$ и его линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Элементарная работа перемещения заряда вдоль эквипотенциальной поверхности равна

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = |q|E|d\vec{r}|\cos\alpha,$$

где $\alpha$ – угол между $\vec{E}$ и $d\vec{r}$, т. е. между $\vec{E}$ и элементом эквипотенциальной поверхности.

Но работа при перемещении по эквипотенциальной поверхности равна нулю. Следовательно,

$$|q|E|d\vec{r}|\cos\alpha = 0.$$

Так как $|q|\neq 0$, $E \neq 0$ и $|d\vec{r}|\neq 0$, то $\cos\alpha = 0$, откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 7.24 изображены линии напряжённости (сплошные линии) и эквипотенциальные поверхности

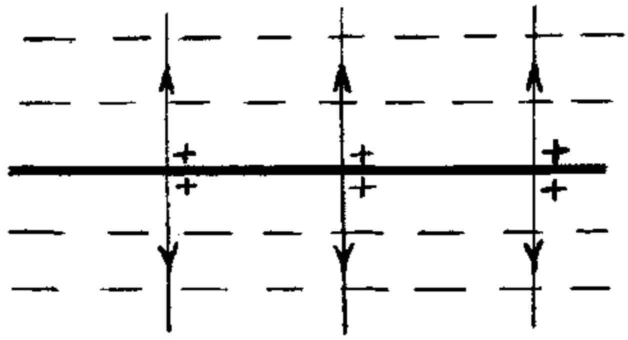

Рис. 7.24

(пунктирные линии) поля бесконечной равномерно заряженной плоскости.

## §25. Связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля

Связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля

Электростатическое поле в каждой своей точке может быть задано либо с помощью вектора напряжённости (силовое описание), либо с помощью потенциала (энергетическое описание). Ясно, что между $\vec{E}$ и $\varphi$ должна существовать связь. Установим эту связь. Рассмотрим в неоднородном электростатическом поле две бесконечно близкие точки 1 и 2, лежащие на оси $x$ (рис. 7.25).

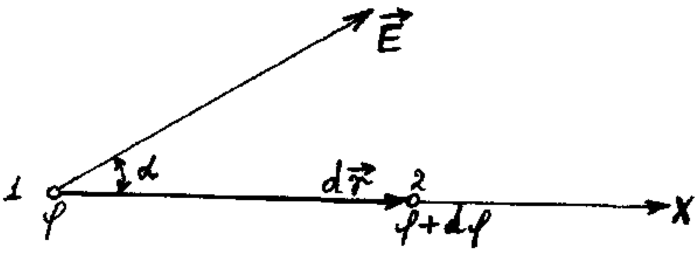


Рис. 7.25

Потенциал точки 1 равен $\varphi$, потенциал точки 2 – $\varphi + d\varphi$. При перемещении заряда $q$ из точки 1 в точку 2 силы поля совершают работу. Эта работа может быть выражена двояким образом:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = qEdx\cos\alpha = qE_x dx$$

и

$$dA = q[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -qd\varphi.$$

Приравняв правые части этих формул и сократив на $q$, получим

$$E_x dx = -d\varphi,$$

откуда

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Производная $d\varphi / dx$ характеризует быстроту изменения потенциала вдоль оси $x$. Так как потенциал может изменяться не только вдоль оси $x$, но и вдоль осей $y$ и $z$, то следует писать частную производную

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \qquad (7.4.9)$$

Таким образом, проекция вектора напряжённости на ось $x$ равна производной потенциала по $x$, взятой со знаком «минус». Проекции $\vec{E}$ на оси $y$ и $z$ равны соответственно

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad (7.4.10)$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (7.4.11)$$

Как известно, для нахождения вектора по его проекциям необходимо каждую из проекций умножить на единичный вектор соответствующей оси и затем сложить полученные векторы:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}. \qquad (7.4.12)$$

Подставив в (7.4.12) выражения (7.4.9)-(7.4.11), получим

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (7.4.13)$$

Векторная величина, стоящая в правой части (7.4.13), называется градиентом потенциала и обозначается **grad** $\varphi$:

$$\mathbf{grad}\,\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \qquad (7.4.14)$$

Градиент потенциала – это вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания потенциала и численно равный приращению потенциала на единицу длины этого направления.

Учитывая обозначение градиента $\varphi$ (7.4.14), получим

$$\vec{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi.$$

Напряжённость в каждой точке электростатического поля равна по абсолютной величине и противоположна по направлению градиенту потенциала в этой же точке (рис. 7.26).

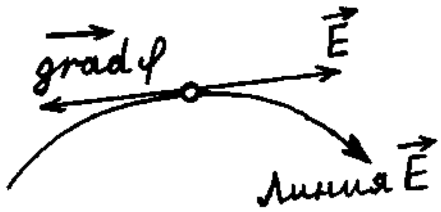


Рис. 7.26

В направлении $\vec{E}$ потенциал с наибольшей быстротой уменьшается. Если $r$ – направление быстрейшего изменения потенциала, то модуль градиента потенциала равен $|d\varphi / dr|$. Таким же будет и модуль вектора напряжённости

$$E = \left|\frac{d\varphi}{dr}\right|.$$

Если поле однородно, то напряжённость численно равна абсолютной величине разности потенциалов, приходящейся на единицу длины линии поля

$$E = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{|\Delta r|} = \frac{|U_{12}|}{d},$$

где |Δr|=d – расстояние между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами $\varphi_1$ и $\varphi_2$, отсчитанное вдоль линии поля; $|\varphi_1 - \varphi_2| = |U_{12}|$ – абсолютная величина разности потенциалов.

## §26. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков

В зависимости от способности проводить электрический ток все вещества делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Диэлектрики – это вещества, плохо проводящие электрический ток. Свободных носителей заряда в диэлектриках почти нет. Диэлектриками являются газы при обычных условиях, многие чистые жидкости, слюда, фарфор, мрамор и др.

Центр тяжести некоторой системы зарядов – это точка, в которую нужно поместить точечный заряд, равный заряду системы, чтобы он создавал на расстояниях, значительно превышающих размеры системы, такое же электрическое поле, какое создаёт система.

В отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов молекулы либо совпадают, либо не совпадают. Молекула, у которой центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего поля совпадают (электрический момент молекулы равен нулю), называется неполярной. На рис. 7.31 изображена модель неполярной молекулы кислорода.

Диэлектриками с неполярными молекулами являются водород, кислород, азот, благородные газы (гелий, неон, аргон), метан, полиэтилен, полистирол и др.

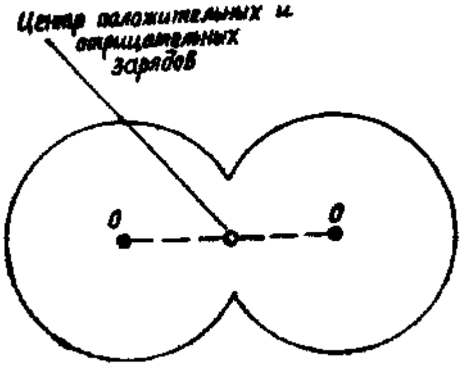


Рис. 7.31

Молекула, у которой центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля не совпадают, называется полярной. Полярные молекулы обладают электрическим моментом и создают в окружающем пространстве электрическое поле. На рис. 7.32 изображена модель полярной молекулы воды, состоящей из двух положительных ионов водорода и одного отрицательного иона кислорода.

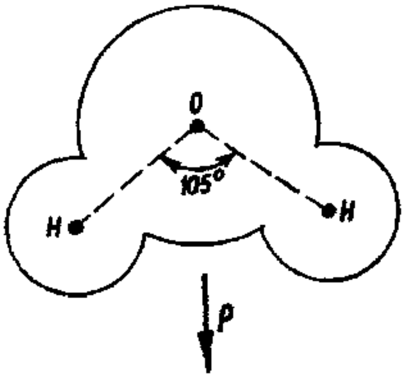


Рис. 7.32

Диэлектриками с полярными молекулами являются вода, соляная кислота, аммиак, метиловый спирт.

Под действием внешнего электрического поля неполярные молекулы поляризуются: в результате смещения положительных зарядов в направлении поля, а отрицательных против поля у них появляется электрический момент, направление которого совпадает с направлением внешнего поля (рис. 7.33).

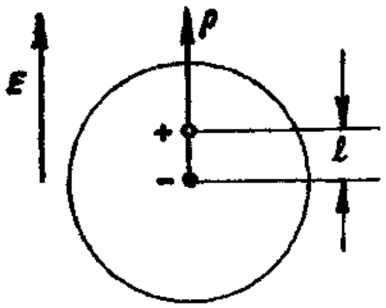


Рис. 7.33

В умеренных полях электрический момент $\vec{p}$, приобретаемый молекулой, пропорционален внешнему полю $\vec{E}$

$$\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E},$$

где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная; $\alpha$ – коэффициент пропорциональности, называемый поляризуемостью молекулы.

Поляризуемость молекулы – мера того, насколько легко индуцируется у молекулы дипольный момент под действием внешнего поля. Смещение зарядов в неполярных молекулах происходит подобно упругой деформации, т. е. так, как если бы между зарядами действовали упругие силы. Смещение исчезает вместе с исчезновением электрического поля. Поэтому неполярные молекулы часто называют «квазиупругими» диполями.

Поляризация диэлектриков с неполярными молекулами называется деформационной. Различают электронную и ионную деформационную поляризацию. Внешнее электрическое поле деформирует электронные оболочки молекул, смещает их центры в направлении, противоположном $\vec{E}$, в результате чего молекулы приобретают дипольные моменты (электронная деформационная поляризация). На поверхностях, сквозь которые линии поля входят в диэлектрик, появляются  отрицательные связанные заряды; на поверхностях, сквозь которые линии поля выходят, – положительные (рис. 7.34).

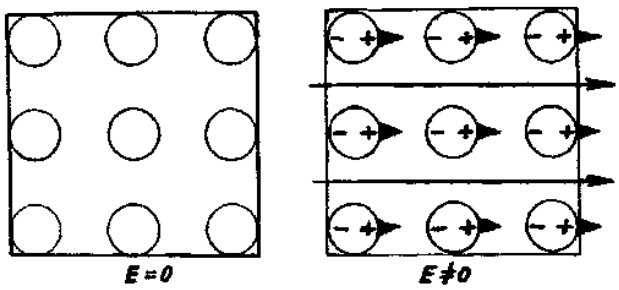


Рис. 7.34

Кристаллическую решётку ионных кристаллов (KCl, NaCl) можно представить состоящей из двух подрешёток – положительной и отрицательной, вставленной одна в другую. Внешнее электрическое поле смещает эти подрешётки (ионная деформационная поляризация).

Время установления электронной поляризации $\approx 10^{-15}$ с, ионной – в 100-1000 раз больше вследствие того, что более массивные ионы медленнее, чем электроны, смещаются под действием поля.

Действие однородного электрического поля на полярные молекулы оказывается ориентирующим:  поле стремиться «развернуть» молекулярные диполи так, чтобы их электрические моменты совпали с направлением поля. Поляризация диэлектриков с полярными молекулами называется ориентационной. В отсутствие внешнего электрического поля в таких диэлектриках молекулярные диполи ориентированы беспорядочно, поэтому электрический момент диэлектрика равен нулю. При наличии внешнего поля молекулярные диполи стремятся расположиться упорядоченно, вдоль поля, тепловое движение нарушает эту ориентацию. По истечении некоторого времени после включения электрического поля наступает динамическое равновесие между этими двумя процессами, в результате чего устанавливается некоторая преимущественная ориентация диполей (рис. 7.35).

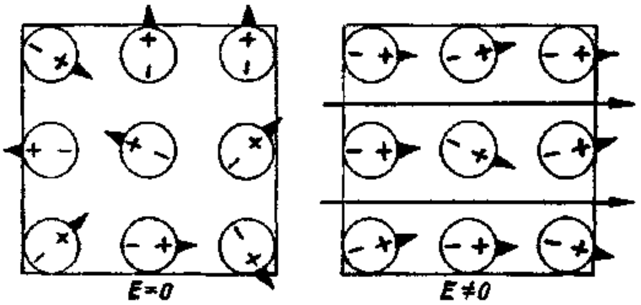


Рис. 7.35

При этом кроме ориентационной поляризации имеет место и деформационная поляризация, так как внешнее поле деформирует электронные оболочки всех без исключения атомов и молекул диэлектрика (деформационная поляризация имеет место во всех диэлектриках).

Время установления ориентационной поляризации довольно велико и в значительной мере зависит от температуры и частоты изменений поляризующего поля. Так как молекулы обладают определённым моментом инерции, им требуется некоторое время, чтобы повернуться в направлении поля.

Отметим, что собственные дипольные моменты полярных молекул, как правило, гораздо больше моментов, приобретаемых неполярными молекулами в обычных электрических полях. Внешние поля на величину момента полярных молекул практически влияния не оказывают. Поэтому такие молекулы называют «жесткими» диполями.

Поляризация сопровождается появлением на внешних границах диэлектрика поверхностного электрического заряда, называемого связанным или поляризованным. Диэлектрик в целом при этом остаётся электронейтральным – алгебраическая сумма всех отрицательных и всех положительных зарядов равна нулю. Избыточный заряд, сообщённый диэлектрику извне («сторонний» заряд), называют свободным.

Распределение поверхностного связанного заряда характеризуется его поверхностной плотностью $\sigma'$

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS},$$

где $dq'$ – связанный заряд, сосредоточенный на площадке $dS$.

Количественной характеристикой интенсивности поляризации является вектор поляризации $\vec{P}$ – величина, равная электрическому моменту единицы объёма поляризованного диэлектрика.

Если вектор поляризации во всех точках диэлектрика одинаков, поляризация называется однородной, если неодинаков – неоднородной.

С точки зрения микроскопической теории, вектор поляризации представляет собой векторную сумму дипольных электрических моментов всех молекул, заключённых в единице объёма диэлектрика. Если поляризация однородная, то

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V},$$

где $\vec{p}_i$ – электрический момент $i$-й молекулы; $\Delta V$ – объём, по которому производится суммирование электрических моментов. Если поляризация неоднородна, то вектор $\vec{P}$ равен пределу

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}.$$

Опыт показывает, что вектор поляризации в каждой точке изотропного диэлектрика в не очень сильных полях и при не слишком высоких частотах изменений этих полей пропорционален напряжённости $\vec{E}$ поля, существующего в этой же точке, и совпадает с $\vec{E}$ по направлению:

$$\vec{P} = x\varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (7.5.10)$$

где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная; $x$ – диэлектрическая восприимчивость вещества, величина, показывающая, как сильно поляризуется данное вещество во внешнем электрическом поле.

Изотропный диэлектрик – диэлектрик, электрические свойства которого одинаковы по всем направлениям; анизотропный диэлектрик – диэлектрик, электрические свойства которого различны по разным направлениям.

Между вектором поляризации и поверхностной плотностью связанного заряда существует связь.

$$\sigma' = P_n, \qquad (7.5.13)$$

где $P_n = P\cos\alpha$ есть проекция $\vec{P}$ на направление внешней нормали:

Таким образом, проекция вектора поляризации на внешнюю нормаль к элементу поверхности диэлектрика равна поверхностной плотности связанных зарядов, сосредоточенных на этом элементе. Соотношение (7.5.13) справедливо для любого диэлектрика и для любого поля. Зная распределение вектора поляризации по поверхности диэлектрика, можно найти распределение поверхностного связанного заряда.

Спроецируем (7.5.10) на внешнюю нормаль и учтём (7.5.13); получим

$$\sigma' = x\varepsilon_0 E_n. \qquad (7.5.14)$$

Из (7.5.14) видно, если $E_n$ >0 (линии $\vec{E}$ выходят из диэлектрика), то $\sigma'$ >0: на такой поверхности появляются положительные связанные заряды; если $E_n$ <0 (линии $\vec{E}$ входят в диэлектрик), то $\sigma'$ <0: на такой поверхности появляются отрицательные связанные заряды. Связанные заряды не появляются в тех точках поверхности диэлектрика, в которых вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к поверхности (в этом случае $E_n$ =0) и, следовательно,

$$\sigma' = x\varepsilon_0 E_n = 0.$$

## §27. Электрическое поле в диэлектрике. Индукция электрического поля. Сегнетоэлектрики

### Электрическое поле в диэлектрике. Индукция электрического поля

Внесём бесконечную плоскопараллельную пластину из однородного диэлектрика в однородное поле $\vec{E}_0$ и расположим её перпендикулярно к линиям поля (рис. 7.39).

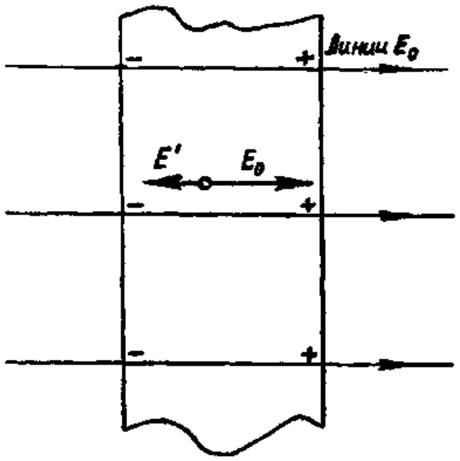


Рис. 7.39

Под действием поля диэлектрик поляризуется, на его поверхностях появляются связанные заряды с плотностью $|\sigma'|$. Эти заряды создадут внутри пластины однородное поле $\vec{E}'$, направленное противоположно $\vec{E}_0$. Модуль напряжённости $\vec{E}$ результирующего поля равен

$$E = E_0 - E'. \qquad (7.6.1)$$

Так как

$$E' = \frac{|\sigma'|}{\varepsilon_0},$$

а в соответствии с (7.5.13) и (7.5.14)

$$|\sigma'| = P = x\varepsilon_0 E,$$

то

$$E' = xE. \qquad (7.6.2)$$

Подставив (7.6.2) в (7.6.1), получим

$$E = E_0 - xE,$$

откуда

$$(1+x)E = E_0.$$

Безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + x$$

называется относительной диэлектрической проницаемостью вещества. Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Относительная диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз внешнее поле больше поля в диэлектрике.

При наличии диэлектрической среды поток вектора напряжённости через произвольную замкнутую поверхность $S$ пропорционален алгебраической сумме всех свободных $q$ и всех связанных $q'$ зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q'). \qquad (7.6.3)$$

Связанный заряд

$$q' = -\oint_S \vec{P}d\vec{S}. \qquad (7.6.5)$$

Интеграл $\vec{P}d\vec{S}$ есть поток вектора поляризации через поверхность $S$. Таким образом, избыточный связанный заряд, охватываемый произвольной замкнутой поверхностью $S$, равен взятому со знаком минус потоку вектора поляризации через эту поверхность.

Подставим (7.6.5) в (7.6.3):

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q - \oint_S \vec{P}d\vec{S}\right).$$

Умножим обе части этого равенства на $\varepsilon_0$ и перенесём слагаемое $\oint_S \vec{P}d\vec{S}$ в левую часть:

$$\oint_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})d\vec{S} = q. \qquad (7.6.6)$$

Физическая величина

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad (7.6.7)$$

называется индукцией электрического (или электрическим смещением) поля.

Введём индукцию (7.6.7) в (7.6.6):

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q. \qquad (7.6.8)$$

Таким образом, поток вектора индукции электрического поля (электрической индукции) через произвольную замкнутую поверхность $S$ равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью (теорема Гаусса для $\vec{D}$).

В изотропных диэлектриках связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$ выражается более простой, чем (7.6.7), формулой. Действительно, в таких диэлектриках

$$\vec{P} = x\varepsilon_0\vec{E}. \qquad (7.6.9)$$

Подставив (7.6.9) в (7.6.7) и учитывая, что

$$1 + x = \varepsilon$$

получим

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \qquad (7.6.10)$$

Таким образом, в изотропных диэлектриках направление электрической индукции совпадает с направлением вектора результирующей напряжённости. В анизотропных диэлектриках направления $\vec{P}$ и $\vec{E}$ могут не совпадать, следовательно, направления $\vec{D}$ и $\vec{E}$ также могут быть различными.

### Сегнетоэлектрики

Особую группу диэлектрических веществ образуют сегнетоэлектрики: сегнетова соль, метатитанат бария и др. Сегнетоэлектрики – диэлектрики, обладающие в определённом интервале температур спонтанной поляризованностью, т. е. поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля.

Сегнетоэлектрики обладают следующими особенностями:

1. Диэлектрическая проницаемость в определённом температурном интервале весьма велика – может

достигать десятков тысяч (для обычных диэлектриков не превышает нескольких десятков).

2. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость зависят от температуры и поляризующего поля.

3. Зависимость вектора поляризации от поляризующего поля не является линейной.

4. При изменении поляризующего поля вектор поляризации отстаёт от изменений поля. Это явление называется диэлектрическим гистерезисом. На рис. 7.46 изображён график зависимости $P$ от $E$. Как видно из графика, первоначально поляризованность растёт (кривая 1). При некотором $E$ наступает насыщение. Если поляризующее поле уменьшать, то изменения $P$ отстают от изменений $E$ и следуют не первоначальной кривой 1, а кривой 2. При $E=0$ сегнетоэлектрик остаётся поляризованным. Поляризация $P_0$, которой сегнетоэлектрик обладает в отсутствие внешнего электрического поля, называется остаточной.

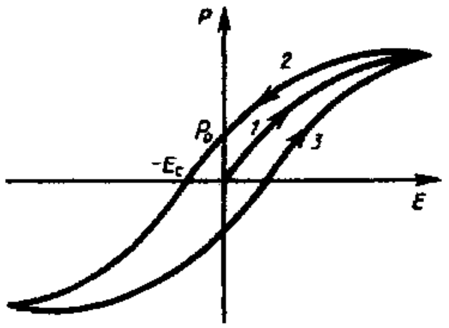


Рис. 7.46

Чтобы устранить эту поляризацию, нужно включить внешнее поле, противоположное первоначальному. Поле $E_c$, направление которого противоположно первоначальному поляризующему полю и которое полностью снимает остаточную поляризацию, называется коэрцитивной силой. Если поле противоположного направления увеличивать, то через некоторое время вновь наступает насыщение. В неполяризованное состояние диэлектрик возвращается по кривой 3. При циклическом изменении поля получается петлеобразная кривая, называемая петлёй гистерезиса.

5. Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, выше которой он утрачивает свои особые свойства и становится обычным диэлектриком. Эта температура называется точкой Кюри. При отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик представляет собой как бы мозаику из доменов – областей, в которых электрические моменты молекулярных диполей параллельны (рис. 7.47).

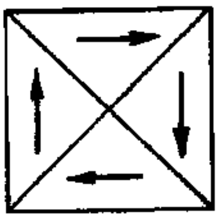

Рис. 7.47

## §28. Проводники в электростатическом поле. Электроёмкость проводников. Конденсатор. Соединение конденсаторов

### Распределение зарядов на проводнике

Электрические заряды, сообщённые проводнику извне, в состоянии равновесия распределяются так, что электрическое поле внутри проводника отсутствует $\vec{E}=0$. Это условие вытекает из закона сохранения энергии. Если бы поле внутри заряженного проводника было отлично от нуля, то это вызвало бы электрический ток (в проводнике есть свободные заряды). На поддержание этого тока требуется источник энергии, которого в проводнике нет.

Избыточные заряды, сообщённые проводнику, в состоянии равновесия распределяются только по внешней поверхности проводника. Это следует из того обстоятельства, что сила кулоновского взаимодействия зарядов обратно пропорциональна именно второй степени расстояния.

В условиях равновесия зарядов и поверхность и объём проводника являются эквипотенциальными.

Поверхностная плотность зарядов в отдельных точках проводника тем больше, чем больше кривизна поверхности проводника. Так как поверхностная плотность зарядов больше там, где больше кривизна поверхности проводника, напряжённость поля оказывается наибольшей вблизи краёв и острых выступов проводника. Электрическое поле вблизи таких мест может быть столь сильным, что оказывается способным ионизировать молекулы воздуха. Возникает, явление, называемое стеканием зарядов с проводника. В общих чертах оно заключается в следующем. Образующиеся в процессе ионизации ионы под действием поля приходят в движение: ионы того же знака, что и заряд острия, перемещаются от острия, ионы противоположного знака – к острию (рис. 7.49).

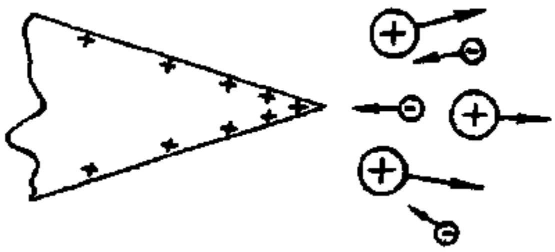

Рис. 7.49

Первые при своём движении увлекают нейтральные молекулы воздуха, в результате чего возникает заметное его движение, своеобразный «электрический ветер». Вторые, подойдя к острию, частично нейтрализуют заряд острия, в результате чего поле вблизи острия ослабляется.

На явлении стекания зарядов основано действие молниеотвода. Сильные электрические поля, окружающие тонкие заряженные проволоки или острые выступы заряженных проводников, нашли практическое применение в ряде приборов (струнный электрометр, катушка Румкорфа, счётчик Гейгера, ионный микроскоп и др.).

Так как избыточные заряды распределяются только по внешней поверхности проводника, то наличие в проводнике каких-либо внутренних полостей никак не влияет на характер этого распределения.

## Явление электростатической индукции

Если незаряженный проводник внести во внешнее электрическое поле, то в проводнике происходит явление электростатической индукции: свободные заряды проводника под действием поля смещаются (положительные – в направлении поля, отрицательные – против поля). В результате на поверхности (и только на поверхности) проводника появляются заряды, называемые индуцированными. Эти заряды создают внутри проводника свое собственное поле, противоположное по направлению внешнему полю. Разделение зарядов в проводнике происходит до тех пор, пока результирующее электрическое поле в проводнике не исчезнет. Это наблюдается при любых напряжённостях внешнего поля. Индуцированные заряды всегда полностью компенсируют внешнее поле внутри проводника. Проводники, образно говоря, «разрушают», «уничтожают» электрическое поле в той области пространства, которую они сами занимают (связанные заряды компенсируют внешнее поле в диэлектриках лишь частично).

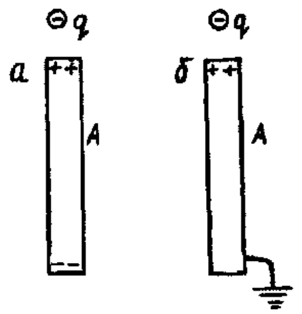


Рис. 7.50

Индуцированные заряды в отличие от связанных зарядов могут быть сняты с проводника, например в результате заземления. На рис. 7.50 показано, как это можно сделать: а) индуцирующий заряд $q$ (заряд, создающий внешнее поле) вызвал разделение зарядов в проводнике $A$; б) проводник $A$ «заземлили», отрицательные заряды ушли в «землю»; в) заряд $q$ удален; оставшийся на проводнике положительный заряд растекается по его поверхности в соответствии с условиями равновесия.

Индуцированные заряды в отличие от связанных зарядов могут быть отделены друг от друга, для этого достаточно в присутствии индуцирующего заряда разъединить разноимённо заряженные части проводника.

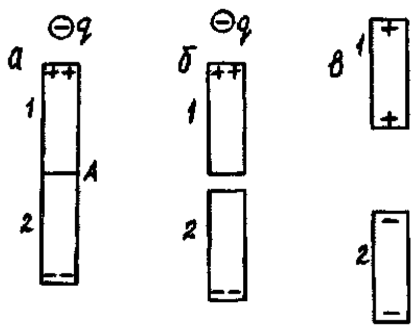


Рис. 7.51

Рассмотрим рис. 7.51: а) разделение зарядов в проводнике $A$ завершилось; при этом части $1$ и $2$ проводника плотно прижаты друг к другу; б) в присутствии индуцирующего заряда $q$ заряженные части проводника $1$ и $2$ слегка раздвинуты; в) заряд $q$ удален; части $1$ и $2$ раздвинуты на большое расстояние, заряды на них растекаются по поверхности в соответствии с условиями равновесия. Если эти разноименно заряженные части в отсутствие заряда $q$ снова соединить, то электризация проводника исчезнет и проводник вновь окажется незаряженным.

Индуцированные заряды могут вызвать перераспределение зарядов, создающих внешнее поле. Это приводит к искажению внешнего поля. На рис.7.52,*а* показано, какими были линии поля заряженного проводящего шара до внесения в это поле незаряженного проводника. После внесения проводника заряд шара перераспределился: на стороне, обращённой к проводнику, поверхностная плотность заряда увеличилась, на противоположной стороне, уменьшилась, в результате чего поле шара стало другим (рис. 7.52, *б*).

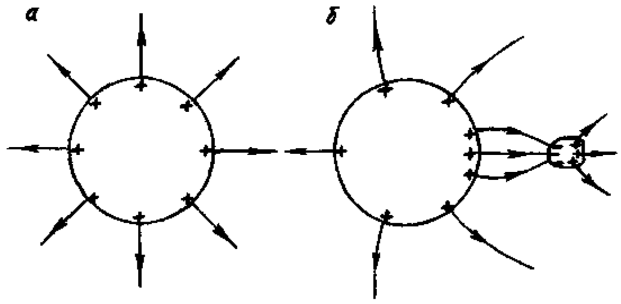


Рис. 7.52

Проводник, внесенный в электрическое поле, не вызывает перераспределения зарядов, создающих это поле, и, следовательно, не искажает это поле, если он заполняет всю область между какими-либо двумя эквипотенциальными поверхностями.

Отсутствие поля в полых проводниках используют для электростатической защиты. Чтобы оградить чувствительные к внешним полям приборы, схемы, участки цепей и т. д., их экранируют, т. е. помещают внутрь тонких полых замкнутых проводников, которые, как правило, заземляют. При этом вместо сплошных экранов часто используют проволочную сетку.

Замкнутый полый проводник защищает от действия только тех полей, которые созданы внешними зарядами. Если избыточные заряды имеются внутри полости, то поле в ней отлично от нуля.

## Электроёмкость проводников

Уединённый проводник – проводник, удаленный от других тел на бесконечно большое расстояние. Практически проводник можно считать уединённым, если сообщаемый ему заряд не вызывает сколько-нибудь заметного смещения зарядов в ближайших к проводнику телах.

Между зарядом уединённого проводника и его потенциалом существует прямо пропорциональная зависимость

$$q = C\varphi. \qquad (7.7.2)$$

Коэффициент пропорциональности $C$ в (7.7.2) называется электроёмкостью проводника. Из (7.7.2) следует

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (7.7.3)$$

Электроёмкость уединённого проводника – скалярная физическая величина, характеризующая способность проводника накапливать электрический заряд и численно равная заряду, который необходимо сообщить незаряженному проводнику, чтобы потенциал его стал равен единице при условии, что все другие тела бесконечно удалены, и что потенциал бесконечно удалённых точек принят равным нулю.

Электроёмкость уединённого проводника зависит от:

1) формы и размеров проводника;
2) диэлектрической проницаемости окружающей проводник среды.

Электроёмкость уединённого проводника не зависит от:

1) материала проводника;
2) его температуры и агрегатного состояния;
3) размеров и формы внутренних полостей;
4) его заряда и потенциала.

Найдём ёмкость уединённого шара радиуса $R$, погружённого в однородную безграничную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$. Сообщим шару заряд $q$. Шар приобретает потенциал относительно бесконечности

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}. \qquad (7.7.4)$$

Подставив (7.7.4) в (7.7.3), получим

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Замечание. Понятие электроёмкости применимо только к проводникам, так как заряженному диэлектрику нельзя приписать определённого потенциала: он в разных точках диэлектрика разный.

## Конденсатор

Уединённые проводники обычных размеров обладают ничтожно малой ёмкостью и поэтому не способны накапливать сколько-нибудь заметные электрические заряды. Между тем часто возникает потребность в достаточно «мощных» источниках зарядов. Практический интерес представляет система из двух близко расположенных проводников, заряды которых равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Чтобы электрическое поле, созданное зарядами проводников, было сосредоточено только между проводниками, проводникам придают форму либо двух близко расположенных параллельных пластин, либо двух коаксиальных цилиндров, либо двух концентрических сфер и сообщают им равные по абсолютной величине и противоположные по знаку заряды. Такая, система проводников называется конденсатором. В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические, цилиндрические и т.п. конденсаторы. Абсолютную величину заряда одной из обкладок называют зарядом конденсатора.

Электроёмкостью конденсатора называется физическая величина, численно равная отношению заряда конденсатора к абсолютной величине разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{|q|}{|\Delta\varphi|}. \qquad (7.7.5)$$

Ёмкость конденсатора зависит от:

1) формы, размеров и взаимного расположения обкладок;
2) проницаемости $\varepsilon$ диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками.

Электроёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{r_0}.$$

Ёмкость плоского конденсатора зависит от площади обкладок, расстояния между обкладками и диэлектрической проницаемости диэлектрика.

Электроёмкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где $r_1$ – радиус внутренней обкладки; $r_2$ – радиус внешней обкладки; $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Ёмкость сферического конденсатора зависит от радиусов внутренней и внешней обкладок (она тем больше, чем больше радиусы обкладок и чем меньше расстояние между ними) и от электрических свойств диэлектрика.

## Соединение конденсаторов

Батарея конденсаторов – несколько соединённых друг с другом конденсаторов. Заряд батареи конденсаторов – абсолютная величина заряда, который проходит по проводнику, соединяющему положительный и отрицательный полюсы батареи. Ёмкость батареи – величина, численно равная отношению заряда батареи к абсолютной величине разности потенциалов, действующей на батарее:

$$C = \frac{|q|}{|\Delta\varphi|}. \qquad (7.7.9)$$

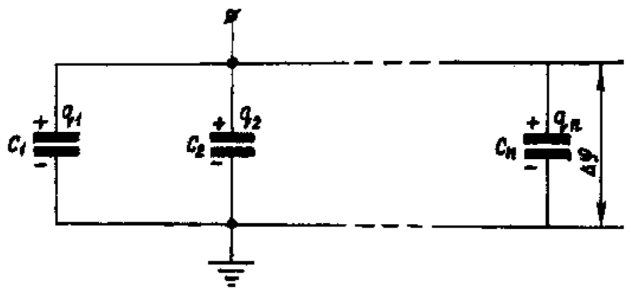

Рис. 7.53

Соединение конденсаторов может быть параллельным (рис. 7.53) и последовательным (рис. 7.54).

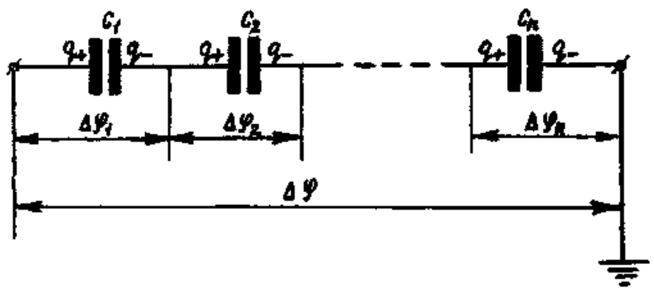

Рис. 7.54

При зарядке конденсатора одна из обкладок обычно заземляется. Если незаземлённой обкладке сообщается заряд $q_+$, то на заземлённой автоматически появляется заряд $q_-$, равный по абсолютной величине $q_+$.

После зарядки параллельно соединённых

конденсаторов на каждом из конденсаторов будет действовать одна и та же разность потенциалов $\Delta\varphi$.

Заряд батареи равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$|q| = \sum |q_i| = \sum C_i |\Delta\varphi| = |\Delta\varphi| \sum C_i. \qquad (7.7.10)$$

Подставив (7.7.10) в (7.7.9), получим

$$C = \sum C_i.$$

При параллельном соединении конденсаторов ёмкость батареи равна сумме ёмкостей отдельных конденсаторов.

При зарядке последовательно соединённых конденсаторов все конденсаторы получают один и тот же заряд. В самом деле, если крайней обкладке первого конденсатора сообщить заряд $q_+$, то на другой обкладке этого конденсатора по индукции появится заряд $q_-$, причём $|q_+| = |q_-|$. Так как вторая обкладка первого конденсатора и первая обкладка второго образуют единый электронейтральный проводник, то на первой обкладке второго конденсатора появляется заряд $q_+$, равный положительному заряду первого конденсатора. То же самое произойдёт со всеми другими конденсаторами. Разность потенциалов, действующая на батарее, по абсолютной величине равна

$$|\Delta\varphi| = \sum |\Delta\varphi_i| = \sum \frac{|q|}{C_i} = |q| \sum \frac{1}{C_i}. \qquad (7.7.11)$$

Заряд батареи равен заряду одного конденсатора, т. е. $|q|$. Подставив (7.7.11) в (7.7.9), получим

$$C = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}},$$

или

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

При последовательном соединении конденсаторов величина, обратная ёмкости батареи, равна сумме обратных ёмкостей отдельных конденсаторов.

## §29. Энергия системы неподвижных точечных зарядов. Собственная энергия заряженного проводника и конденсатора

### Энергия системы неподвижных точечных зарядов

Рассмотрим два неподвижных точечных заряда $q_1$ и $q_2$, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Каждый из зарядов находится в электростатическом поле, созданном другим зарядом. Энергию взаимодействия этих зарядов можно выразить через потенциалы соответствующих полей

$$W = q\varphi.$$

Если считать, что поле создано зарядом $q_1$, то потенциальная энергия рассматриваемых зарядов будет равна

$$W = q_2\varphi_2, \qquad (7.7.12)$$

где $\varphi_2$ – потенциал, создаваемый зарядом $q_1$ в той точке, где находится заряд $q_2$.

Если же полагать, что поле создано зарядом $q_2$, то потенциальная энергия этой же системы зарядов будет равна

$$W = q_1\varphi_1, \qquad (7.7.13)$$

где $\varphi_1$ – потенциал, создаваемый зарядом $q_2$ в той точке, где находится заряд $q_1$. Из (7.7.12) и (7.7.13) следует, что

$$q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2. \qquad (7.7.14)$$

Запишем (7.7.12) в следующем виде:

$$W = \frac{q_2\varphi_2}{2} + \frac{q_2\varphi_2}{2}.$$

Так как $q_2\varphi_2 = q_1\varphi_1$, то

$$W = \frac{q_1\varphi_1}{2} + \frac{q_2\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2).$$

Полученный результат можно обобщить на систему, состоящую из любого числа точечных зарядов. Потенциальная энергия $N$ точечных зарядов выражается формулой

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i,$$

где $\varphi_i$ – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме $q_i$-го, в той точке, где находится заряд $q_i$.

### Собственная энергия заряженного проводника и конденсатора

Заряд, находящийся на проводнике, можно рассматривать как систему взаимодействующих между собой точечных зарядов. Такая система обладает потенциальной энергией. Потенциальная энергия, которой обладает заряженный проводник в отсутствие внешнего электрического поля, называется собственной энергией проводника.

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}. \qquad (7.7.17)$$

Равенство (7.7.17) – собственная энергия заряженного уединённого проводника.

Подставив $\varphi = \dfrac{q}{C}$ в (7.7.17), получим

$$W = \frac{q^2}{2C}. \qquad (7.7.18)$$

Используя соотношение $C = \dfrac{q}{\varphi}$, формуле (7.7.18) можно придать вид

$$W = \frac{q\varphi}{2}.$$

Найдём выражение для собственной энергии конденсатора. Так как заряды обкладок конденсатора равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, то процесс зарядки конденсатора можно представить как перенос малых порций заряда $dq$ с одной обкладки на другую. Элементарная работа, совершаемая силами поля при переносе заряда $dq$, равна

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = -dq\Delta\varphi, \qquad (7.7.19)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладкой, на которую заряд переносится, и обкладкой, с которой этот заряд снимается. Потенциальная энергия конденсатора равна

$$W = -\int dA + const,$$

или, учитывая (7.7.19),

$$W = \int dq\Delta\varphi + const.$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ выразим через заряд конденсатора и его ёмкость:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}.$$

Следовательно,

$$W = \int \frac{qdq}{C} + const$$

или

$$W = \frac{q^2}{2C} + const.$$

Примем потенциальную энергию незаряженного конденсатора равной нулю. Тогда $const = 0$ и

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Учитывая, что $|q| = C|\Delta\varphi|$, получим

$$W = \frac{C \cdot \Delta\varphi^2}{2} = \frac{|q||\Delta\varphi|}{2}. \qquad (7.7.20)$$

### §30. Энергия электрического поля

Преобразуем выражение для энергии конденсатора так, чтобы в него вошли характеристики поля – напряжённость или индукция. Сделаем это на примере плоского конденсатора. Энергия заряженного плоского конденсатора ёмкостью $C$ по (7.7.20) равна

$$W = \frac{C \cdot \Delta\varphi^2}{2}, \qquad (7.7.21)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора. Ёмкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{r_0},$$

где $S$ – площадь одной обкладки; $r_0$ – расстояние между обкладками. Поле плоского конденсатора однородно. Поэтому

$$|\Delta\varphi| = Er_0,$$

где $E$ – модуль напряжённости поля.

Подставив выражения для $C$ и $|\Delta\varphi|$ в (7.7.21), получим

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S r_0}{2} E^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \qquad (7.7.22)$$

где $V = Sr_0$ – объём, занимаемый полем конденсатора.

Пространственное распределение энергии характеризуется плотностью энергии $\omega$ – энергией поля, заключённой в единице объёма. Если энергия распределена равномерно, то плотность энергии вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{W}{V},$$

если неравномерно, то по формуле

$$\omega = \frac{dW}{dV}.$$

Разделив (7.7.22) на $V$, получим выражение для плотности энергии

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Полученное соотношение справедливо для любого поля. Принимая во внимание, что в изотропном диэлектрике $E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}$, плотность энергии можно выразить так:

$$\omega = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Зная пространственное распределение плотности энергии, можно решить обратную задачу – найти энергию, заключённую в объёме $V$, где имеется поле:

$$W = \int_V \omega(x, y, z)dV,$$

где $\omega(x, y, z)$ – плотность энергии; $dV$ – элементарный объём.