ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

1. Дана функция двух переменных $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ и точка $D(-1;1)$

а) найти градиент функции в точке D;

б) составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z в точке D;

в) исследовать функцию z на экстремум.

Решение. а) Считая z функцией только одного аргумента x, находим, $z'_x = 3x^2 - 6y$ аналогично, считая z функцией только одного аргумента y, находим $z'_y = 24y^2 - 6x$. Затем вычисляем их частные значения в указанной точке: $z'_x(D) = -3$; $z'_y(D) = 30$. Применим формулу $\overline{gradz(D)} = (z'_x(D); z'_y(D))$ и получим $\overline{gradz(D)} = (-3; 30)$.

б**)** Преобразуя уравнение поверхности к виду $x^3 + 8y^3 - 6xy + 5 - z = 0$ и обозначив его левую часть через $F(x, y, z)$, найдём частные производные $F'_x = 3x^2 - 6y$, $F'_y = 24y^2 - 6x$, $F'_z = -1$. Вычислим их значения в данной точке $F'_x(D) = -3$, $F'_y(D) = 30$ и значение $z_0 = z(D) = 18$, затем применим формулу

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Получим уравнение касательной плоскости

$$-3(x+1) + 30 \cdot (y-1) - (z-18) = 0 \text{ или } -3x + 30y - z - 15 = 0.$$

Уравнение нормали составим в виде

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(M_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(M_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(M_0)}.$$

Находим окончательно: $$\frac{(x+1)}{-3} = \frac{(y-1)}{30} = \frac{(z-18)}{-1}.$$

в) находим точки, в которых частные производные первого порядка z'_x, z'_y равны нулю или не существуют и которые лежат внутри области определения функции: $z'_x = 3x^2 - 6y$, $z'_y = 24y^2 - 6x$. Решая систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$ найдём две точки $M_1(0;0)$ и $M_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$. Обе точки являются стационарными. Далее исследуем точки по знаку определителя Δ, составленного из частных производных второго порядка: $z''_{xx} = A = 6x$, $z''_{xy} = B = -6$, $z''_{yy} = C = 48y$.

Для точки M_1 получим $A = 0$, $B = -6$; $C = 0$ и $\Delta(M_1) = AC - B^2 = -36 < 0$. Следовательно, в точке M_1 нет экстремума.

Для точки M_2 имеем $A = 6$, $B = -6$, $C = 24$ и $\Delta(M_2) = 108 > 0$. Согласно достаточному условию существования экстремума, M_2 есть точка минимума. $z_{\min} = z(M_2) = 4$.

2. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int (\frac{5}{4+x^2} + 6x^2 - 3x^5 + 1)dx$; б) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{3\sin x + 7}}$; в) $\int (x+2)\sin x\, dx$.

Решение. а) $\int (\frac{5}{4+x^2} + 6x^2 - 3x^5 + 1)dx$.

Преобразуем данный интеграл к табличному виду, используя свойства неопределенного интеграла

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \text{ (k–постоянная)}$$

и

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \;.$$

Затем применим таблицу интегралов и получим

$$\int (\frac{5}{4+x^2} + 6x^2 - 3x^5 + 10)dx = 5\int \frac{dx}{2^2 + x^2} + 6\int x^2 dx - 3\int x^5 dx + 10\int dx =$$

$$= 5\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + 6\cdot\frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^6}{6} + 10x + C = 5arctg\frac{x}{2} + 2x^3 - \frac{x^6}{2} + 10x + C.$$

б) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3\sin x + 7}}$.

Введём новую переменную $t = 3\sin x + 7$. Тогда $dt = \cos x dx$. Заменив под знаком интеграла $\cos x\,dx$ на dt, а $3\sin x + 7$ на t, получим что в результате подстановки исходный интеграл преобразуется к табличному виду

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3\sin x + 7}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{3\sin x + 7} + C.$$

в**)** $\int (x+2)\sin x\,dx$.

Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Положим $u = x + 2$, $dv = \sin x\,dx$, тогда $du = dx$, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$, по формуле интегрирования по частям получим

$$\int (x+2)\sin x\,dx = -(x+2)\cos x + \int \cos x\,dx = -(x+2)\cos x + \sin x + C.$$

3. Вычислить определенные интегралы.

а) $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$; б) $\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9}\,dx$; в) $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. а) $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

Используя правила

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \text{ (здесь } k - \text{постоянная)}$$

и

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F(x) \text{- первообразная.}$$

Получим

$$\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx = \int_1^4 dx + 5\int_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = x|_1^4 + 5\frac{x^2}{2}|_1^4 + \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}|_1^4 =$$

$$= x|_1^4 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}|_1^4 + x^{\frac{3}{2}}|_1^4 = (4-1) + \frac{5}{2}\left(4^2 - 1^2\right) + \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = 3 + \frac{75}{2} + 7 = \frac{95}{2}.$$

б) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Сделаем замену переменной $t = x^2 + 9$, тогда $dt = d\left(x^2+9\right)$, $dt = 2x\,dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = x^2 + 9$. Поэтому если $x = 0$, то $t_1 = 0^2 + 9 = 9$, если $x = 4$, то $t_2 = 4^2 + 9 = 25$ и получаем

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_9^{25} x\sqrt{t}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_9^{25} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_9^{25} = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{25}^3 - \sqrt{9}^3\right) = \frac{1}{3}\left(5^3 - 3^3\right) = \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3}.$$

в) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Применим формулу интегрирования по частям в определённом интеграле

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$ и найдём

$$du = (\operatorname{arctg} x)'\,dx = \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

Тогда по формуле интегрирования по частям получим

$$\int_0^1 (x \operatorname{arctg} x)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1 - \frac{0^2}{2}\operatorname{arctg}0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}-0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

4. Определить площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций. $y=4x-x^2$ и $y=x^2-6$.

Решение. Строим графики функций (рис 4).

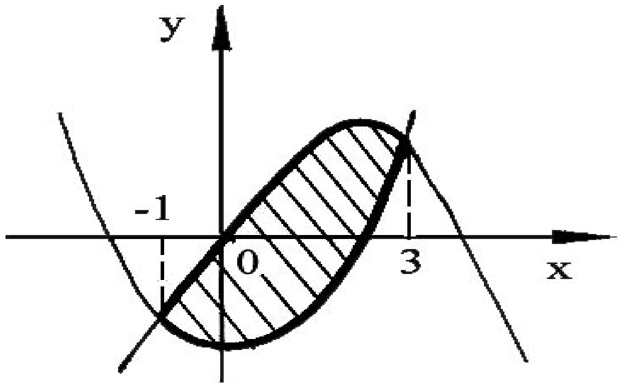

Рис.4

Затем для нахождения точек пересечения парабол решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=4x-x^2; \\ y=x^2-6. \end{cases}$$

Приравнивая левые части, получим

$x^2-6=4x-x^2$ или $x^2-2x-3=0$

и $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4(-3)}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}$ или $x_1=-1; x_2=3.$

Тогда по формуле $S=\int\limits_{b}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ искомая площадь S будет равна:

$$S=\int\limits_{-1}^{3}\left[\left(4x-x^2\right)-\left(x^2-6\right)\right]dx=\int\limits_{-1}^{3}\left[6+4x-2x^2\right]dx=\left[6x+2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=\left[6\cdot 3+2\cdot 3^2-\frac{2}{3}\cdot 3^3\right]-\left[6\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2-\frac{2}{3}\cdot(-1)^3\right]=18-\left[-\frac{10}{3}\right]=$$

$$=18+\frac{10}{3}=64.$$

5. Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

а) $3y^2y'=5-4x^3$, если $y_0=2$ при $x_0=1$;
б) $\left(1+x^2\right)y'-xy=2x$

Решение. а) $3y^2y'=5-4x^3$, если $y_0=2$ при $x_0=1$.

Данное дифференциальное уравнение 1-го порядка является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $3y^2\frac{dy}{dx}=(5-4x^3)$, затем умножаем обе его части на dx.

Интегрируя обе части последнего уравнения $3y^2\,dy=\left(5-4x^3\right)dx$, найдем $\int 3y^2\,dy=\int\left(5-4x^3\right)dx$, или

$3\int y^2\,dy=5\int dx-4\int x^3\,dx$, или $3\cdot\frac{y^3}{3}=5x-\frac{4x^3}{4}+C$, т.е. $y^3=5x-x^4+C$.

Подставив начальное значение $x_0=1$, $y_0=2$, найдем константу C: $8=5-1+C$, т.е. $C=4$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^3 = 5x - x^4 + 4$, или $x^4 + y^3 - 5x - 4 = 0$.

б) $\left(1 + x^2\right)y' - xy = 2x$.

Разделив все члены данного уравнения на выражение $\left(1 + x^2\right) \neq 0$, приведем его к виду линейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4x}{1+x^2} \quad .$$

Сделаем замену, полагая $y = u \cdot v$, откуда $y' = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$.

Подставим эти значения y и y' в преобразованное уравнение.

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2xuv}{1+x^2} = \frac{4x}{1+x^2}.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2x \cdot u}{1+x^2}\right) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

Выберем функцию $u \neq 0$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е.

$$\frac{du}{dx} - \frac{2xu}{1+x^2} = 0.$$

Тогда для нахождения функции v получим уравнение

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{4x}{1+x^2}.$$

Решаем первое из них как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx} - \frac{2xu}{1+x^2} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{du}{u} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегрируем почленно это уравнение :

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2} \text{ , или } \int \frac{du}{u} = \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2},$$

т.к. $d\left(1+x^2\right) = \left(1+x^2\right)' dx = 2x\,dx$, откуда $2x\,dx = d\left(1+x^2\right)$,

т.е. $\ln|u| = \ln\left|1+x^2\right|$, откуда $\quad u = 1+x^2$.

Подставив значение функции u во второе уравнение, найдем

$$(1+x^2)\frac{dv}{dx} = \frac{4x}{1+x^2}, \text{ т.е. } dv = \frac{4x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Интегрируем обе части последнего уравнения

$$\int dv = \int \frac{4x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}, \text{ или } \int dv = 2\int \left(1+x^2\right)^{-2} d\left(1+x^2\right), \text{т.к. } d\left(1+x^2\right) = 2x\,dx.$$

Откуда $v = 2\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-2+1}}{-2+1} + C$, или $v = 2\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-1}}{-1} + C$, или

$$v = -\frac{2}{(1+x^2)} + C.$$

Заменив в подстановке $y = u \cdot v$ функции u и v их найденными выражениями, получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y = (1 + x^2)\left(C - \frac{2}{(1 + x^2)} \right), \text{ или } y = C(1 + x^2) - 2.$$

6. Найти общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

а) $y'' + 9y' + 14y = 0,$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = -2;$

б) $y'' - 6y' + 9y = 0;$

в) $y'' - 6y' + 10y = 0$ при $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

Решение. а) $y'' + 9y' + 14y = 0,$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 + 9k + 14 = 0$.

Корни квадратного уравнения $ak^2+bk+c=0$ находят по формуле

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}.$$

Получим, что $k_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-9 \pm 5}{2}$, откуда $k_1 = -2$ и $k_2 = -7$.

Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, получим общее решение в виде $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-7x}$.

Дифференцируя общее решение, получим

$$y' = C_1 e^{-2x}\left(-2\right) + C_2 e^{-7x}\left(-7\right) = -2C_1 e^{-2x} - 7C_2 e^{-7x}.$$

Согласно заданным начальным условиям имеем

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-2\cdot 0} + C_2 e^{-7\cdot 0}, \\ -2 = -2C_1 e^{-2\cdot 0} - 7C_2 e^{-7\cdot 0}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ -2 = -2C_1 - 7C_2, \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ -2 = -2C_1 - 7\left(1 - C_1\right), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ -2 = -2C_1 - 7 + 7C_1, \end{cases} \text{ откуда}$$

$C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Таким образом, искомым частным решением является функция $y = e^{-2x}$.

б) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 - 6k + 9 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 9}}{2} = \dfrac{6 \pm 0}{2} = 3$, откуда $k_1 = k_2 = 3$. Подставляя найденные значения k в формулу $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$, получим общее решение $y = e^{3x}\cdot\left(C_1 + C_2 \cdot x\right)$.

в) $y'' - 6y' + 10y = 0$ при $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$.

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 10 = 0$.
Корни найдем по формуле

$$k_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 10}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{6\pm 2i}{2}=3\pm i. \quad (a=3;\ \ b=3).$$

Общим решением будет

$$y=e^{3x}\cdot\left(C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x\right).$$

Дифференцируя общее решение, получим

$$y'=3e^{3x}\left(C_1\cdot\cos x+C_2\sin x\right)+e^{3x}\left(-C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\cos x\right).$$

Подставив начальные условия $y(0)=1,\quad y'(0)=3$ получим систему для определения C_1 *и* C_2 :

$$\begin{cases}1=e^0\cdot\left(C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0\right),\\ 3=3\cdot e^0\left(C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0\right)+e^0\left(-C_1\cdot\sin 0+C_2\cdot\cos 0\right),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}1=1\cdot\left(C_1\cdot 1+C_2\cdot 0\right),\\ 3=3\cdot 1\left(C_1\cdot 1+C_2\cdot 0\right)+1\left(-C_1\cdot 0+C_2\cdot 1\right),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}1=C_1; & C_1=1.\\ 3=3C_1+C_2; & C_2=0.\end{cases}$$

Подставив полученные значения $C_1=1,\ \ C_2=0$ в общее решение, получим $y=e^{3x}\cdot\cos x$ – искомое частное решение.

7. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, используя метод подбора коэффициентов частного решения (метод неопределенных коэффициентов)

$$y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 7k + 12 = 0.$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}.$$

$$k_1 = -3; \qquad k_2 = -4.$$

Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

Запишем формулу, по которой следует искать частное решение $y_ч$ данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x) = 24x^2 + 16x - 15$ с общим видом правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x).$$

$24x^2 + 16x - 15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; –15.

В данном случае показательная функция $e^{\alpha x} = 1$, т. е. $\alpha = 0$. Так как $\alpha = 0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $(k_1 = -3;\ \ k_2 = -4)$, частное решение нужно искать в виде $y_ч = Ax^2 + Bx + C$.

$f(x) = Ax^2 + Bx + C -$ многочлен второй степени $(n = 2)$, неизвестные (неопределенные) коэффициенты *A, B, C* этого многочлена нужно найти, подставив выражения $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$ в данное уравнение.

Запишем $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 12 & y_ч = Ax^2 + Bx + C; \\ 7 & y_ч' = 2Ax + B; \\ 1 & y_ч'' = 2A. \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$, чтобы получить левую часть уравнения $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$. В левой части получим многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & 12A = 24; \\ x^1 & 14A + 12B = 16; \\ x^0 & 2A + 7B + 12C = -15. \end{array}\right\}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами *A, B, C*.

Решив ее, найдем $A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1$.

Частное решение: $y_ч = 2x^2 - x - 1$.

8. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma} 4xy^3\,dxdy$, если область ограничена

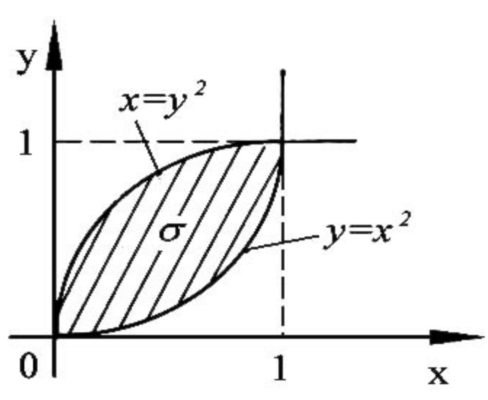

Рис.5

параболами $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис.5).

Решение. Из рисунка 5 делаем вывод, что область σ – простая относительно оси $0x$. Она ограничена снизу кривой $\varphi(x) = x^2$, сверху – кривой $x = y^2$, т.е. $y = \sqrt{x}$ или $\psi(x) = x^2$ (перед радикалом ставим только знак “+”, так как область σ находится в I квадранте, где $y > 0$); при любом фиксированном значении x из отрезка $[0;1]$ y меняется от $y = x^2$ до $y = \sqrt{x}$. Поэтому при $f(x;y) = 4xy^3$ имеем

$$\iint_\sigma \frac{x}{y}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 4xy^3 dy \right) dx = \int_0^1 \left(4x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^3 dy \right) dx = \int_0^1 \left(4x \cdot \frac{1}{4} y^4 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x\left(x^2 - x^8\right)dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^9\right)dx = \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 x^9 dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{10} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

9. Написать в тригонометрической форме комплексное число $\mathrm{z} = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.

Решение. По формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ найдём модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, а из соотношений $\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получим аргумент числа z (берём его главное значение): $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{3}$. Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.