

Лекция №1

Первообразная функция. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой. Интегрирование по частям.

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Определение: Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Определение: **Неопределенным интегралом** функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$;

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

$$1. \left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$2. d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$1. \int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$$

$$\text{Пример: } \int (x^2 - 2 \sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2 \cos x + x + C;$$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$

6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

2. Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомым интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное

число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d \int f(x)dx = d \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x + 1)^{20} dx = \{2x + 1 = t; \quad dt = 2 dx;\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x + 1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{2 - x^2} \sqrt{2 + x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + 2}| +$$

$$+ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2 \sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = e^{5x} dx; \\ du = 2x dx; \quad v = \frac{e^{5x}}{5}; \end{array} \right\} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2x dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; \quad v = \frac{1}{5} e^{5x}; \end{array} \right\} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{x e^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right).$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{x+1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = \frac{1}{x^3} dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = -\frac{1}{2x^2}; \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-3}{4} \right) + C.$$