Лекция № 2

§ 2. Интегрирование подстановкой

Замена переменной (подстановка) $x=\varphi(t)$ в интеграл производится по формуле $\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$; (1.1)

при этом говорят, что в интеграле слева сделана замена переменной (подстановка) $x=\varphi(t)$. Формулой (1.1) можно пользоваться следующим образом: подобрать функцию $x=u(t)$ так, чтобы, подставив вместо x подынтегральное выражение, получить более простой интеграл.

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-3}\,dx.$

<u>Решение.</u> С целью упрощения подынтегрального выражения положим $x-3=t^2$. Отсюда $x=t^2+3$, $dx=d\left(t^2+3\right)$, $dx=d\left(t^2+3\right)'\,dt$, $dx=\left[(t^2)'+3'\right]dt$, $dx=[2t+0]dt$, $dx=2t\,dt$. Заменив всюду под интегралом x на $\varphi(t)=t^2+3$, получим

$$\int x\left(\sqrt{x-3}\right)dx=\int\left(t^2+3\right)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt=\int\left(2t^4+6t^2\right)dt=2\int t^4dt+6\int t^2dt=$$

$$=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2\frac{t^{4+1}}{4+1}+6\frac{t^{2+1}}{2+1}+C=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5+$$

$$+2\left(\sqrt{x-3}\right)^3+C.$$

При вычислении воспользовались формулой $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

Пример 2. Найти $\int\frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+C}}.$

<u>Решение.</u> Заметим, что $e^{4x}=\left(e^{2x}\right)^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x}=t$. Тогда $de^{2x}=dt$, $\left(e^{2x}\right)'dx=dt$, $e^{2x}2dx=dt$. Заменив всюду под интегралом $e^{2x}dx$ на $\frac{dt}{2}$, e^{2x} на t, получим

$$\int\frac{3dt}{2\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+5}\right|+C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

<u>Решение.</u> Заметим, что $\sin x\,dx = -d\cos x$, т.к.

$d\cos x = (\cos x)'\,dx = -\sin x\,dx$. Целесообразно ввести переменную $t=\cos x$. Заменив всюду под интегралом $\sin x\,dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t, получим

$$\int \frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{3+t^2}} = -2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right| + C = -2\ln\left|\cos x + \sqrt{3+\cos^2 x}\right| + C.$$

Пример 4. Найти $\int \sin(3x+1)\,dx$.

<u>Решение.</u> Заметим, что $dx = \frac{1}{3}d(3x+1)$, т.к.

$d(3x+1) = (3x+1)'\,dx = 3dx$. Целесообразно ввести переменную $t = 3x+1$. Тогда $dx = \frac{1}{3}dt$. Заменив всюду под интегралом dx на $\frac{1}{3}dt$, $3x+1$ на t, получим

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C.$$

На основании выше изложенного можно ввести формулу:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \qquad (1.2)$$

где $F(x)$ первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C.$

Из формулы (1.2) получим:

1. $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$;

2. $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$;

3. $\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C$.

§ 3. Интегрирование простейших дробей

Рациональной дробью называется функция $R(x)$ представленная в виде

$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P\ (x)$ и $Q\ (x)$ – многочлены с действительными коэффициентами. Рациональная дробь $R(x)$ называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

***Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов*:**

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^n}\ (n>1 \text{ натуральное число}),\ \frac{ax+b}{px^2+qx+d};\ \frac{ax+b}{\left(px^2+qx+d\right)^n}$$

(n> 1 натуральное число), где $q^2-4p\cdot d\prec 0$т. е. корни знаменателя мнимые.

Таким образом, для интегрирования правильных рациональных дробей достаточно уметь: 1) интегрировать простейшие дроби, 2) разлагать рациональные дроби на простейшие.

Этот параграф посвящен решению первой из этих задач. Рассмотрим сначала простейшие дроби первых двух типов:

Пример 1. $\int\frac{A}{x-a}dx$.

Решение. Заметим, что $dx=d(x-a)$, т.к. $d(x-a)=(x-a)'dx=dx$.

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)}=A\ln(x-a)+C.$$

Пример 2. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$.

Решение

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}=\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=$$

$$\frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}+C.$$

Для интегрирования простейших дробей третьего вида $\int\frac{ax+b}{px^2+qx+d}dx$ ***вычисляют, используя замену переменных*:**

$$t=\frac{1}{2}\left(px^2+qx+d\right)' = px+\frac{q}{2}, \text{ откуда } x=\frac{(2t+q)}{p},\ dx=\frac{2}{p}dt.$$

Пример 3. Найти $\int\frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx$.

<u>Решение.</u> Сделаем замену переменных $t=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+12\right)'=\frac{1}{2}(2x-4)=x-2$, $x=t+2$, $dx=d(t+2)$, $dx=(t+2)'dt$, $dx=dt$.

Заменив всюду под интегралом x на $(t+2)$, dx на dt, получим

$$\int\frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx=\int\frac{3(t+2)+1}{(t+2)^2-4(t+2)+12}dt=\int\frac{3t+7}{t^2+4t+4-4t-8+12}dt=\int\frac{3t+7}{t^2+8}dt=$$
$$=3\int\frac{t}{t^2+8}dt+7\int\frac{dt}{t^2+8}.$$

При вычислении воспользовались формулой $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.Второй из полученных интегралов является табличным, а первый находим подстановкой $t^2+8=z$, откуда $d\left(t^2+8\right)=dz$, $\left(t^2+8\right)'dt=dz$, $2t\,dt=dz$, $t\,dt=\frac{1}{2}dz$. Следовательно,

$$\int\frac{3x+1}{x^2+4x+12}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z}+7\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{3}{2}\ln z+7\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{8}}+C=\frac{3}{2}\ln\left(t^2+8\right)+$$
$$+\frac{7}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{8}}+C=\frac{3}{2}\ln\left[(x-2)^2+8\right]+\frac{7}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{8}}+C.$$

§ 4. Интегрирование рациональных дробей

1. ***Схема интегрирования рациональных дробей***.

Для интегрирования рациональных дробей

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, последовательно выполняют три шага.

Первый шаг. Если дробь неправильная, т. е. степень числителя $P(x)$ больше или равна степени знаменателя $Q(x)$ – выделяют целую часть рациональной дроби $R(x)$, деля числитель $P(x)$ на знаменатель $Q(x)$ по правилу деления многочлена на многочлен. После этого рациональная дробь может быть записана в виде суммы, выделенной целой части – многочлена $M(x)$ и правильной остаточной дроби – $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$: $\quad \frac{P\ (x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Второй шаг. Правильную остаточную дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ разлагают на простейшие дроби. Для этого находят корни уравнения $Q\ (x) = 0$ и разлагают знаменатель $Q(x)$ на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^t \ldots (x^2+px+q)^m (x^2+rx+\mathrm{s})^n. \tag{1.3}$$

В этом разложении знаменателя $Q(x)$ множители первой степени соответствуют действительным корням, а множите второй степени – парам мнимых сопряженных корней. Коэффициент при наибольшей степени x в знаменателе $Q(x)$. можно считать равным единице, ибо этого всегда можно добиться, деля него $P(x)$ и $Q(x)$. Разумеется, если знаменатель $Q(x)$ уже представлен в виде (1.3), корни искать излишне.

После этого правильная остаточная дробь разлагается на простейшие по формуле

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} +$$

$$+ \frac{a_1 x + b_1}{x^2+qx+d} + \frac{a_2 x + b_2}{\left(x^2+qx+d\right)^2} + \ldots + \frac{a_m x + b_m}{\left(x^2+qx+d\right)^m} + \ldots\ , \tag{1.4}$$

где $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots,\ a_1, b_1,\ \ldots$ – неопределенные (неизвестные) коэффициенты (некоторые из них могут равняться нулю).

Для нахождения неопределенных коэффициентов все простейшие дроби приводят к общему знаменателю $Q(x)$ и приравнивают числители обеих частей равенства (1.4). Затем сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. Это приводит к системе уравнений, из которой и находятся значения интересующих нас коэффициентов.

Третий шаг. Находят интегралы выделенной целой части и всех простейших дробей (методами, рассмотренными в предшествующем параграфе), которые затем складывают.

2. ***Случай, когда знаменатель разлагается лишь на неповторяющиеся множители первой степени.***

Пример 1. Найти $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

<u>Решение.</u> Подынтегральная рациональная дробь неправильная, так как степень числителя равна степени знаменателя. Поэтому выделяем целую часть

$$\begin{array}{l|l} 5x^2 + 9x^2 - 22x - 8 & \underline{x^3 - 4x} \\ \underline{-5x^3 - \quad\quad - 20x\quad} & 5 \\ \quad\quad 9x^2 - 2x - 8 & \end{array}$$

Таким образом,

$$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx = \int\left(5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\right)dx.$$

Знаменатель правильной остаточной дроби разлагается на множители следующим образом

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

По формуле (1.4) каждому множителю знаменателя вида $(x - a)$ в разложении правильной дроби на простейшие соответствуют слагаемое вида $\frac{A}{x-a}$. Поэтому в данном случае получится разложение

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$9x^2 - 2x - 8 = A(x - 2)(x + 2)+Bx(x + 2) + Cx(x - 2)=$$

$$=\mathrm{A}x^2 - 4\mathrm{A}+\mathrm{B}x^2+2\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2 - 2\mathrm{C}x.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны. Поэтому, отмечая за чертой слева, при каких степенях x сравниваются коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 9 \;= \grave{A} + \hat{A} + \tilde{N}, \\ x^1 & -2 \;= 2\hat{A} - 2\tilde{N}, \\ x^0 & -8 \;= -4\grave{A}. \end{array}$$

Из третьего уравнения системы -находим A =2. Подставляя значение A в первое уравнение и сокращая второе на 2, будем иметь

$$\begin{cases} B + C = 7, \\ B - C = -1, \end{cases} \text{откуда } B = 3;\ C = 4.$$

Прием, которым найдены неизвестные A, B, C, называется ***способом сравнения коэффициентов.***

Заменяя под знаком интеграла остаточную дробь ее разложением на простейшие дроби (с подставленными в него найденными значениями коэффициентов) и находя нужные интегралы, последовательно получим

$$\int \frac{5x^3 + 9\tilde{o}^2 - 22\tilde{o} - 8}{x^3 - 4x}dx = \int\left(5 + \frac{2}{\tilde{o}} + \frac{3}{\tilde{o} - 2} + \frac{4}{\tilde{o} + 2}\right)dx = 5\int dx + 2\int\frac{dx}{x} + 3\int\frac{dx}{x-2} +$$

$$+4\int\frac{dx}{x+2} = 5\int dx + 2\int\frac{dx}{x} + 3\int\frac{d(x-2)}{x-2} + 4\int\frac{d(x+2)}{x+2} = 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| +$$

$$+4\ln|x+2| + C.$$

3. ***Случай, когда знаменатель разлагается лишь на множители первой степени, среди которых есть повторяющиеся.***

Пример 2. Найти $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$.

<u>Решение.</u> Подынтегральная дробь правильная. Ее знаменатель уже представлен в виде (1.3). Согласно формуле (1.4), множителю x знаменателя в разложении подынтегральной функции будет соответствовать простейшая дробь $\frac{A}{x}$, а множителю $(x + 1)^3$ будет соответствовать сумма трех простейших дробей

$$\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3};$$

поэтому разложение подынтегральной функции на простейшие дроби будет иметь вид $\dfrac{3x+2}{x(x+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}+\dfrac{D}{(x+1)^3}$.

Приведя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим $3x + 2 = A(x + 1)^3 + Bx(x + 1)^2 + Cx(x + 1) + Dx=Ax^3 + 3Ax^2 + 3Ax + A +$

$$+ Bx^3 + 2B x^2 + Bx + Cx^2 + Cx + Dx.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны. Поэтому, отмечая за чертой слева, при каких степенях x сравниваются коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2 \;\; = A; \\ x^1 & 3 \;\; = 3A+B+C+D, D=1; \\ x^2 & 0 \;\; = 3A+2B+C, C=-2; \\ x^3 & 0 \;\; = A+B, B=-2. \end{array}$$

Поэтому

$$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx=2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x+1)^3}=2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}-$$

$$-2\int(x+1)^{-2}dx+\int(x+1)^{-3}dx=2ln|x|-2ln|x+1|-2\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{(x+1)^{-3+1}}{-3+1}=$$

$$=2ln|x|-2ln|x+1|+\frac{2}{(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$$

При вычислении воспользовались заменой переменных $x+1=t$, $d(x+1)=dt,\ (x+1)'dx=dt,\ 1\cdot dx=dt.$

4. ***Случай, когда знаменатель разлагается лишь на неповторяющиеся множители второй степени и, возможно, множители первой степени.***

Пример 3. Найти $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx.$

Решение. Подынтегральная дробь правильная. Ее знаменатель уже представлен в виде (1.3). Согласно формуле (1.4), множителю x^2+1 знаменателя в разложении подынтегральной функции будет соответствовать простейшая дробь $\frac{Mx+N}{x^2+1}$. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби запишется: $\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+1\right)}$.

Приводя правую часть к общему знаменателю, и приравнивая числители, получим

$$x^2-2x+2=A(x-1)\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+(Mx+N)(x-1)^2=Ax^3+$$
$$+Ax-Ax^2-A+Bx^2+B+Mx^3-2Mx^2+Mx+Nx^2-2Nx+N.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны. Поэтому, отмечая за чертой слева, при каких степенях x сравниваются коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2=-A+B+N, \\ x^1 & -2=A+M-2N, \\ x^2 & 0=-A+B-2M+N, \\ x^3 & 0=A+M. \end{array}$$

Решив которую, получим A =-1, B = 0, $M=1$, $N=1$.

Поэтому

$$\int\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=-\int\frac{dx}{(x-1)}+\int\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)}dx=$$

$$=-\int\frac{1}{(x-1)}d(x-1)+\int\frac{xdx}{\left(\tilde{o}^2+1\right)}+\int\frac{1}{\left(\tilde{o}^2+1\right)}dx=$$

$$=-\ln(x-1)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(\tilde{o}^2+1\right)}+\int\frac{1}{\left(\tilde{o}^2+1\right)}dx=-\ln(\tilde{o}-1)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x+C.$$