§ 5. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций

Рациональной функцией $R(u,v)$ двух переменных u и v называется функция, представляющая частное двух многочленов относительно этих переменных.

В этом параграфе рассматриваются способы интегрирования рациональных функций синуса и косинуса, т. е. интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx.$$

Подстановка

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

которую будем называть ***универсальной***, рационализирует рассматриваемый интеграл, т. е. сводит его к интегралу рациональной дроби нового аргумента t; при такой подстановке

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} x, \quad dx = 2\left(\operatorname{arctg} t\right)' dt = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Следует, однако, учитывать, что иногда универсальная подстановка приводит к интегралу рациональной дроби, корни знаменателя которой практически невозможно найти. Это может случиться даже, если другая достаточно очевидная подстановка приводит к быстрому нахождению интеграла.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sin x}$ рационально зависит от $\sin x$.

Применяем универсальную подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

тогда

$$\sin\, x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$.

Решение. Применяем универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, получим

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos\, x} = \int \frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2-8t+15}.$$

Сделаем замену переменных $z = \frac{1}{2}\left(t^2-8t+15\right)' = \frac{1}{2}(2t-8) = t-4$,

$t = z+4,\ dt = d(z+4),\ dt = (z+4)'\,dz,\ dt = dz$.

Заменив всюду под интегралом t на $(z+4)$, dt на dz, получим

$$\int \frac{2}{t^2-8t+15}dt = \int \frac{2}{(z+4)^2-8(z+4)+15}dz = \int \frac{2}{z^2+8z+16-8z-32+15}dz = \int \frac{2}{z^2-1}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{z^2-1}dz = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right| = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C.$$

§ 6. Некоторые интегралы тригонометрических функций

1. Интегрирование произведений синусов и косинусов.

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx\, dx,\ \int \sin ax \sin bx\, dx,\ \int \sin ax \cos bx\, dx$$

вычисляются с использованием формул тригонометрии

$$\sin ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right);$$

$$\sin ax\cdot\sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right);$$

$$\cos ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right),$$

которые позволяют представлять произведения синусов и косинусов в виде линейных комбинаций тех же функций (с другими аргументами) и могут быть использованы для интегрирования, в рассматриваемом случае.

Пример 1. Найти $\int\sin 7x\cos x\,dx$.

Решение.

$$\int\sin 7x\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}\left(\sin(7+1)x+\sin(7-1)x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 8x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin 6x\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\sin t\,dt+\frac{1}{12}\int\cos u\,du=-\frac{1}{16}\cos t+\frac{1}{12}\cos u+C=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C.$$

При вычислении воспользовались заменой переменных

$8x=t$, $d(8x)=dt$, $(8x)'\,dx=dt$, $8dx=dt$, $dx=\dfrac{dt}{8}$, и $6x=u$, $d6x=du$, $6dx=du$, $dx=\dfrac{du}{6}$.

2. ***Вычисление интеграла*** $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, ***где*** m ***или*** n – ***положительное нечетное целое число.***

Если показатель степени одной из тригонометрических функций положительное нечетное целое число, то, принимая другую функцию за t, сведем рассматриваемый интеграл к табличным.

Пример 2. Найти $\int\dfrac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Здесь показатель степени синуса равен единице, поэтому делаем подстановку $\cos x=t$, тогда $d\cos x=dt$, $(\cos x)'\,dx=dt$, $-\sin x\,dx=dt$, $\sin x\,dx=-dt$. Заменив всюду под интегралом $\cos x$ на t, получим

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}=-\int\frac{dt}{t^2}=-\int t^{-2}\,dt=-\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{\cos x}+C.$$

Пример 3. Найти $\int\cos^5 x\,dx$.

Решение. Заметим, что $\cos^5 x=\left(\cos^2 x\right)^2\cos x$. Целесообразно ввести переменную $t=\sin x$, т.к. $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2$. Тогда $dt=d\sin x$, $dt=(\sin x)'\,dx$, $dt=\cos x\,dx$. Заменив всюду под интегралом $\cos^2 x$ на $1-t^2$, $\cos x\,dx$ на dt, получим

$$\int\cos^5 x\,dx=\int\left(\cos^2 x\right)^2\cos x\,dx=\int\left(1-t^2\right)^2 dt=\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\int dt-2\int t^2\,dt+$$

$$+\int t^4\,dt=\int dt-2\int t^2\,dt+\int t^4\,dt=t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

При вычислении воспользовались формулой $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

3. ***Вычисление интеграла*** $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$***, где*** $m+n$ ***есть отрицательное четное целое число.***

Если сумма показателей синуса и косинуса есть отрицательное четное число, подстановка tg $x=t$ сводит интеграл к табличным.

Пример 4. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x\sin x}}$.

Решение. $m+n=(7+1)/2=-4$ есть отрицательное четное число, поэтому применяем подстановку tg $x=t$, $dt=(\operatorname{tg}x)'\,dx=\frac{1}{\cos^2}dx$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x\sin x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x\operatorname{tg}x}}=\int\frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{\operatorname{tg}x}}=$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x}}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}x}}=\int\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$= \int \frac{(t^2+1)dt}{\sqrt{t}} = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{3}{2}} dt + \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} t^{\frac{2}{5}} + 2t^{\frac{1}{2}}$$

$$+ C = \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

При вычислении воспользовались формулой $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

4. ***Вычисление интеграла*** $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m ***и*** n***– четные неотрицательные числа.***

Применение формул тригонометрии

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

позволяет повторным уменьшением вдвое показателей степеней синуса и косинуса, в конечном счете, свести рассматриваемые интегралы к сумме интегралов от констант и нечетных степеней синуса и косинуса.

Пример 5. Найти $\int \cos^4 x\, dx$.

Решение. Заметим, что $\cos^4 x = \left[\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right]^2$.

Следовательно,

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx^{*)} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \cos t\, dt + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x +$$

$$\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx^{**)} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\int \cos u\, du = \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin u + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

*) Делаем подстановку $t = 2x,\ dt = 2dx, dx = \dfrac{dt}{2}$.

**) Делаем подстановку $u = 4x,\ du = 4dx,\ dx = \dfrac{du}{4}$.

§ 7. Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей

1. ***Интегралы вида*** $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx$ ***(n – натуральное число).***

Символ $R(x, \sqrt[n]{x})$ означает рациональную функцию от x и $\sqrt[n]{x}$.

Интегралы вида $R(x, x^r, x^s, ...)dx$, где $r, s, ...$ – рациональные числа, относятся к рассматриваемому типу, так, как, если n – общий знаменатель дробей r s, ..., то подынтегральная функция оказывается рациональной функцией от x и $x^{\frac{1}{n}}$.

Так, функция $\dfrac{3x-\sqrt[3]{x}}{x^3+\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{3x-\left(\sqrt[12]{x}\right)^4}{x^3+\left(\sqrt[12]{x^2}\right)^3}$ есть $R(x, \sqrt[n]{x})$.

Подстановка $x = t^n$ (n – общее наименьшее кратное показателей всех радикалов, под которыми x входит в подынтегральную функцию) рационализирует рассматриваемый интеграл, т. е. сводит его к интегралу рациональной дроби.

Пример 1. Найти $\int \dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx$.

<u>Решение</u> x входит в подынтегральную функцию под радикалами с показателями 2 и 3. Общее наименьшее кратное показателей 6, поэтому делаем подстановку

$$x = t^6,\ dx = \left(t^6\right)' dt,\ dx = 6t^5 dt,\ t = \sqrt[6]{x}.$$

Тогда

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{t^6}}{t^6-\sqrt[3]{\left(t^6\right)^2}} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^3 t^5}{t^6-t^4} dt = 6\int \frac{t^8 dt}{t^4\left(t^2-1\right)} = 6\int \frac{t^4 dt}{t^2-1} =$$

$$= 6\int \frac{t^4-1+1}{t^2-1} dt = 6\int \frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)+1}{t^2-1} dt = 6\int \frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}{t^2-1} dt + 6\int \frac{1}{t^2-1} dt =$$

$$= 6\int \left(t^2+1\right) dt - 6\int \frac{dt}{1-t^2} = 6\int t^2\, dt + 6\int dt - 6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = 6\cdot\frac{t^{2+1}}{2+1} + 6t -$$

$$-3\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=2t^3+6t-3\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}\right|+C$$

2. ***Интегралы вида*** $\int\frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+d}}dx$**.** Интегралы этого вида вычисляют, используя замену переменных: $t=\frac{1}{2}\left(px^2+qx+d\right)'=px+\frac{q}{2}$, откуда $x=\frac{(2t+q)}{p}$, $dx=\frac{2}{p}dt$.

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Решение. Сделаем замену переменных

$$t=\frac{1}{2}\left(2+3x-2x^2\right)'=\frac{1}{2}(3-4x)=\left(\frac{3}{2}-2x\right),\ x=\frac{3}{4}-\frac{t}{2},\ dx=d\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right),$$

$$dx=\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)'dt,\ dx=\frac{-1}{2}dt.$$

Заменив всюду под интегралом x на $\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)$, dx на $\frac{-dt}{2}$, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\int\frac{\frac{-1}{2}dt}{\sqrt{2+3\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)-2\left(\frac{3}{4}-\frac{t}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2+\frac{9}{4}-\frac{3t}{2}-2\left(\frac{9}{16}-2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}\right)}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2+\frac{9}{4}-\frac{3t}{2}-\frac{9}{8}+\frac{3t}{2}-\frac{t^2}{2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{8}-\frac{t^2}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\frac{t}{5/2}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\frac{2t}{5}+C=$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin \frac{2\left(\frac{3}{2} - 2x\right)}{5} + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin \frac{3-4x}{5} + C.$$