Определенный интеграл

Теоретический материал

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется *определенным интегралом* от a до b функции $f(x)$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Числа a и b называются *пределами интегрирования*: a – нижним, b – верхним. Отрезок $[a;b]$ называется отрезком интегрирования. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \qquad (1.4)$$

Если $f(x)$ непрерывна и неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$; $x=b$ (см. рис. 1), т.е.

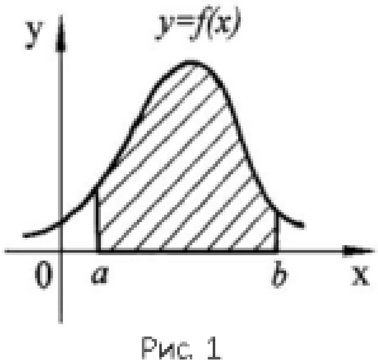

Рис. 1

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (1.5)$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла. Без доказательства заметим, что оба определения эквивалентны. Второе определение помогает получить приложение определенного интеграла (вычисление площади и т.д.), а формула Ньютона - Лейбница позволяет вычислить определенный интеграл без вычисления предела интегральной

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in (a,b)$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_b^b f(x)dx = 0$.

4. Если $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

5.Если $m \leq f(x) \leq M$ при всех x из промежутка $[a;b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Правила вычисления определенных интегралов

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k$ – постоянная).

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Интегрирование по частям

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \qquad (1.5)$$

4. Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ делается по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(\varphi'(t))dt,$$

Пример 1. Вычислить (Пример выполнения задания 3-а)) $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

Решение. Используя правила 1 и 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx = \int_1^4 dx + 5\int_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = x\Big|_1^4 + 5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4 =$$

$$= x\Big|_1^4 + \frac{5}{2}x^2\Big|_1^4 + x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = (4-1) + \frac{5}{2}\left(4^2 - 1^2\right) + \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = 3 + \frac{75}{2} + 7 = \frac{95}{2}.$$

Пример 2. (*Пример выполнения задания* 3-б)) Вычислить $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $t = x^2+9$, тогда $dt = d(x^2+9)$, $dt = 2x\,dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$.
Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = x^2+9$. Поэтому если $x=0$, то $t_1 = 0^2+9=9$, если $x=4$, то $t_2 = 4^2+9=25$ и получаем

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_9^{25} x\sqrt{t}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_9^{25} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_9^{25} = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{25}^3 - \sqrt{9}^3\right) = \frac{1}{3}\left(5^3 - 3^3\right) = \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}.$$

Пример 3. Вычислить (*Пример выполнения задания* 3-б)) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение. Положим $1-\cos x = t$, тогда $dt = (1-\cos x)'\,dx$, $dt = \sin x\,dx$, $dx = \frac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = 1-\cos x$: если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t_1 = 1-\cos\frac{\pi}{2} = 1-0=1$, если $x=\pi$, то $t_2 = 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2$.
Следовательно,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2} = \int_1^2 \frac{2\sin x\frac{dt}{\sin x}}{t^2} = 2\int_1^2\frac{dt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2}dt = 2\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^2 = 2\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^2 =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}-1\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Пример 4. Вычислить (*Пример выполнения задания* 3-б)) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

Решение. Положим $8-x=t$, тогда $dt = (8-x)'\,dx$, $dt = -1dx$, $dx = -dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = 8-x$, если $x=0$, то $t_1 = 8-0=8$, если $x=7$, то $t_2 = 8-7=1$. Таким образом,

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \int_8^1 -\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\int_8^1 t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Big|_8^1 = -\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_8^1 = -3\sqrt[3]{t} = -3\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{8}\right) =$$

$$-3(1-2) = 3.$$

Пример 5. Вычислить (*Пример выполнения задания* 3-в)) $\int_1^e x\ln x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, тогда $du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}dx$, $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$. Следовательно, по формуле (1.5)

$$\int_1^e (x\ln x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

1. $\int_2^4 (x^3+x)dx$, Ответ: 66.
2. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$, Ответ: 1.
3. $\int_4^9 \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$, Ответ: 40.
4. $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}\,dx$, Ответ: $64\frac{2}{3}$.
5. $\int_{-3}^{1} e^{-x}\,dx$, Ответ: $e^3 - \frac{1}{e}$.
6. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx$, Ответ: $\frac{20}{3}$.
7. $\int_1^3 \ln x\,dx$, Ответ: $\ln 27 - 2$.
8. $\int_0^{\pi/2} x\cdot\cos x\,dx$, Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.
9. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$, Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задание 1-5 непосредственное интегрирование

Задание 7-8 интегрирование по частям

1. $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx.$
2. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx.$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2}.$
4. $\int_{-1}^7 \sqrt{x+2}dx.$
5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}.$
6. $\int_0^1 (x^4+1)^5\cdot x^3 dx.$
7. $\int_1^e \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}.$
8. $\int_0^1 x^2 e^{1-x^3} dx.$

9. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$.

10. $\int_0^1 (x+3)2^x dx$.

11. $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$.

12. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

13. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^2 x dx$.

14. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$.

15. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{7-3\cos x}$.

16. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x+\cos x+1}$.

Выполнить 5-8 заменой переменных

Ответы

1. $\frac{21}{8}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{52}{3}$. 5. $\frac{\pi}{6}$. 6. $\frac{21}{8}$. 7. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 8. $\frac{1}{3}(e-1)$. 9. $\frac{\pi^2}{4}-2$. 10. $\frac{5\ln 2-1}{\ln^2 2}$. 11. $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$. 12. $1-\frac{2}{e}$. 13. $\frac{\pi}{32}$. 14. 0.

15. $\sqrt{\frac{1}{10}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{2}}$. 16. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.