

Раздел 5 «Колебания и волны»

Колебаниями называются процессы в той или иной мере повторяющиеся во времени. Различные колебательные процессы описываются одинаковыми уравнениями и характеристиками.

§1 Общие сведения о колебаниях

1.1 Классификация колебаний

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания:

- *механические* (колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, сооружений, давления воздуха при распространении в нем звука и т. п.);
- *электромагнитные* (колебания переменного электрического тока в цепи; колебания векторов электрической напряженности \vec{E} и магнитной индукции \vec{B} переменного электромагнитного поля и т. п.);
- *электромеханические* (колебания мембраны телефона, диффузора электродинамического громкоговорителя и т. п.).

Система, совершающая колебания, называется колебательной системой или *осциллятором*. В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колебательную систему, различают колебания:

- собственные;
- затухающие;
- вынужденные.

Собственными называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия.

Затухающими называются свободные колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени. Затухание механических колебаний связано с наличием сил трения и сопротивления. Затухание колебаний в электрических колебательных системах обусловлено тепловыми потерями в проводниках.

Вынужденными называются колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается внешнему периодически изменяющемуся воздействию.

1.2 Характеристики колебаний

1. Мгновенное значение колеблющейся величины $\xi(t)$

$$\xi(t) = f(t) = f(t + T), \quad (1.1)$$

где $f(t)$ – заданная периодическая функция времени.

Колеблющая величина определяет положение (координату) или состояние (заряд, давление, температуру, скорость) колебательной системы (тела, электрического контура).

2. **Амплитуда колебаний** (A) – максимальное значение колеблющейся величины. Амплитуда – положительная величина.

3. **Период колебаний** (T) – время одного полного колебания: $T = \frac{t}{N}$

$[T]=с$

4. **Частота колебаний** (ν) – число колебаний за единицу времени. $\nu = \frac{N}{t}$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (1.2)$$

$[\nu]=1/с$

5. **Угловая или циклическая частота** (ω) – число колебаний за 2π секунд.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (1.3)$$

$[\omega]=\text{рад}/с$

6. **Фаза колебаний** (φ) – величина, определяющая мгновенное состояние колебательного процесса

$$\varphi = (\omega t + \varphi_0), \quad (1.4)$$

где φ_0 – начальная фаза (значение фазы при $t=0$)

$[\varphi]=\text{рад}$

§ 2 Гармонические колебания

Гармонические колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону косинуса или синуса:

$$\xi(t) = \xi_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.1)$$

или

$$\xi(t) = \xi_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.1a)$$

Оба представления равноправны. В дальнейшем мы будем считать, что колеблющаяся величина изменяется по закону косинуса.

Амплитуда колебаний и начальная фаза определяются начальными условиями, а частота и период – свойствами колебательной системы. Если хотя бы один из этих параметров изменяется во времени, то колебания не будут гармоническими.

2.1 Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

Скорость колеблющейся точки:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.2)$$

где $v_{\max} = A\omega_0$ – максимальное (амплитудное) значение скорости.

Ускорение колеблющейся точки

$$a = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \quad (2.3)$$

где $a_{\max} = A\omega_0^2$ – максимальное (амплитудное) значение ускорения.

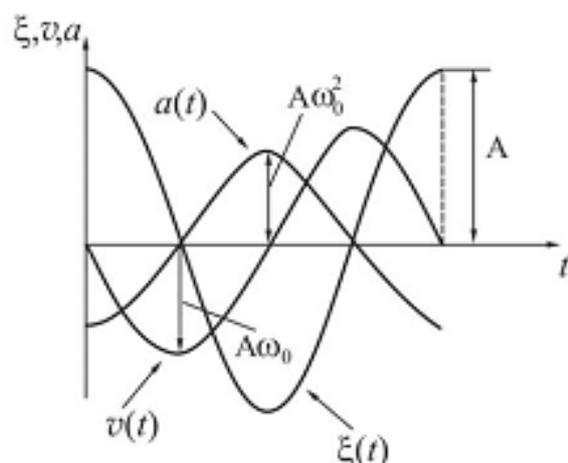


Рисунок 2.1

Гармонические колебания можно представить графически. Для случая $\varphi_0=0$ они имеют вид, показанный на рис. 2.1. Из формул (2.2) и (2.3) и сравнения графиков можно сделать следующие выводы:

- $\xi(t)$ и $a(t)$ колеблются в противофазе, то есть $a(t)$ опережает $\xi(t)$ по фазе на π ;
- $v(t)$ опережает $\xi(t)$ по фазе на $\pi/2$.

2.2 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Согласно уравнению (2.3)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Сравнив данное выражение с формулой (2.1), можно сделать вывод, что

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega_0^2 \xi, \quad \text{или:}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (2.4)$$

Согласно обозначениям, принятым Ньютоном, производные по времени обозначаются следующим образом:

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \ddot{\xi}. \quad (2.5)$$

Тогда дифференциальное уравнение гармонических колебаний можно записать в виде:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.4) называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*. Оно представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Дифференцирование ведется по времени t .

Если при анализе физических процессов той или иной природы, сделанных на основе законов и приближений, возникает уравнение подобного вида, то это означает, что рассмотренная система может совершать гармонические колебания. Частота колебаний будет определяться свойствами самой системы.

§3 Примеры систем, совершающих гармонические колебания

3.1 Пружинный маятник

Пружинный маятник – тело массой m , колеблющееся на пружине жесткостью k (рис. 3.1). Если сместить шарик от положения равновесия на расстояние, равное x , то возникшая сила упругости ($F_{\text{упр}} = -kx$) стремится вернуть шарик в положение равновесия. Применяв второй закон Ньютона, можно получить следующее уравнение

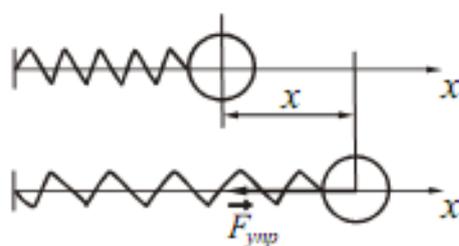


Рисунок 3.1

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.1)$$

где $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ – ускорение, полученное шариком.

Введем обозначение:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (3.2)$$

где ω_0 – это физический параметр, характеризующий колебательные свойства системы и называемый **собственной частотой** колебаний.

Тогда с учетом (3.2) уравнение (3.1) можно переписать в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.4)$$

Период колебаний пружинного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.5)$$

В рассмотренном примере сила по своей природе упругая. Сила иного происхождения может обнаруживать такую же закономерность, то есть оказываться равной $-kx$, где k – постоянная положительная величина. Силы такого вида, независимо от их природы, называются **квазиупругими**.

3.2 Физический маятник

Физический маятник – твердое тело, способное совершать колебания относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

Отклоним маятник на угол α от положения равновесия (рис. 3.2). При этом возникает вращающий момент, который стремится вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl \sin \alpha,$$

m – масса маятника, l – расстояние между точкой подвеса O и центром масс C . Знак “–” означает, что момент силы тяжести стремится уменьшить угол отклонения маятника.

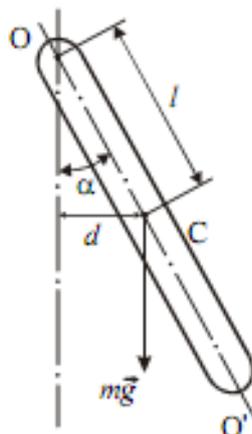


Рисунок 3.2

Будем считать, что угол отклонения мал (до $3^\circ \div 5^\circ$), при этом $\sin \alpha \approx \alpha$ (α должен быть выражен в радианах). Применяя основной закон динамики вращательного движения, получим

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0, \quad (3.6)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний.

$\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ – угловое ускорение маятника,

Введем обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}. \quad (3.7)$$

Тогда дифференциальное уравнение гармонических колебаний запишется в виде:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (3.8)$$

Решение уравнений (3.6) и (3.8) имеет вид:

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.9)$$

где $A = \alpha_{\max}$ – амплитуда колебаний, то есть наибольший угол, на который отклоняется маятник.

Следовательно, *малые колебания физического маятника являются гармоническими.*

Период гармонических колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (3.10)$$

3.3 Математический маятник

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой шарик массой m , подвешенный на длинной нити длиной l (рис. 3.3). Мате-

математический маятник можно рассматривать как предельный случай физического маятника, масса которого сосредоточена в одной точке.

Движение физического маятника описывается уравнением (3.6).

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Если нить длинная, то шарик можно считать материальной точкой. Момент инерции J шарика относительно оси колебаний в этом случае равен:

$$J = ml^2.$$

Период колебаний математического маятника

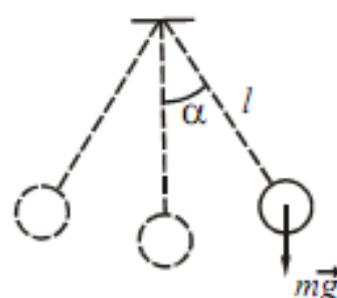


Рисунок 3.3

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.17)$$

Из сопоставления формул (3.16) и (3.17) получается, что математический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} \quad (3.18)$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник.

Величину (3.18) называют приведенной длиной физического маятника. Таким образом, *приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

3.4 Колебательный контур

Колебательный контур – цепь, содержащая катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C (рис. 3.4).

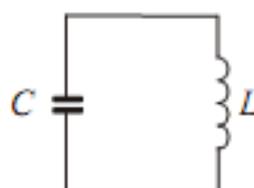


Рисунок 3.4

Колебания в контуре можно вызвать, сообщив обкладкам конденсатора некоторый начальный заряд. Замкнем ключ K в положение 1 (рис. 3.5). На обкладках возникнут два разноименных заряда $+q$ и $-q$. Между ними возникнет электрическое поле, энергия которого

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.19)$$

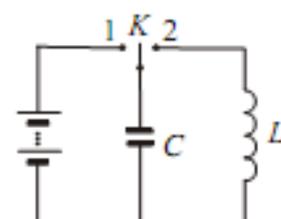


Рисунок 3.5

Если затем отключить источник напряжения и замкнуть конденсатор на индуктивность (ключ K – в положении 2), то конденсатор начнет разряжаться, в контуре потечет ток. В результате этого энергия электрического поля будет уменьшаться, зато возникнет магнитное поле с энергией

$$W_M = \frac{LI^2}{2}, \quad (3.20)$$

которая возрастает. Активное сопротивление $R=0$, поэтому полная энергия не расходуется на нагревание проводов и остается величиной постоянной

$$W_{эл} + W_M = \text{const}$$

или

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}. \quad (3.21)$$

Продифференцируем функцию (3.21) по времени, произведем сокращения и, разделив каждый член уравнения на L , получим:

$$I \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} q \frac{dq}{dt} = 0. \quad (3.22)$$

Так как по определению $\frac{dq}{dt} = I$, то $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$.

На основании этого можно записать:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (3.24)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (3.25)$$

и приведем уравнение (3.24) к виду:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.26)$$

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.27)$$

где q_{\max} – максимальное (амплитудное) значение заряда.

Таким образом, *заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону*. Период колебаний колебательного контура определяется по формуле, которая называется *формулой Томсона*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.28)$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.29)$$

где $U_{\max} = q_{\max}/C$ – амплитудное значение напряжения.

Продифференцировав функцию (3.27) по времени, получим выражение для силы тока:

$$I = -\omega_0 q_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.30)$$

где $I_{\max} = \omega_0 q_{\max}$ – амплитудное значение силы тока.

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

§4 Энергия колебаний

Колебания пружинного маятника совершаются под действием упругой силы. *Потенциальная энергия* гармонического колебания

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.1)$$

Кинетическая энергия гармонического колебания

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.2)$$

Полная механическая энергия гармонического колебания:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}},$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{kA^2}{2} [\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{kA^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

так как согласно (3.5) $k = m\omega_0^2$ (см. §3, п.3.1).

Таким образом, *полная энергия гармонического колебания остается величиной постоянной*.

$$W = \frac{kA^2}{2}. \quad (4.4)$$

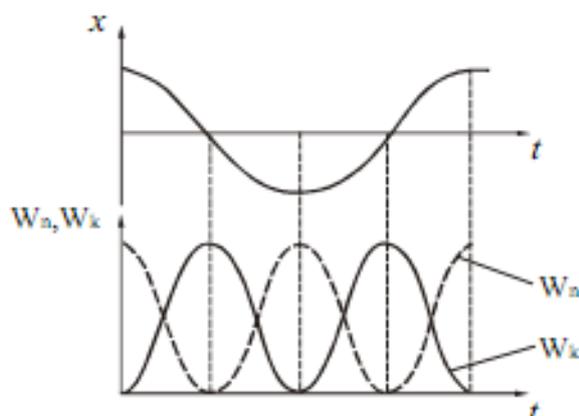


Рисунок 4.1

Графики зависимости кинетической и потенциальной энергии от времени представлены на рис. 4.1. Частота изменения энергии в 2 раза превышает частоту колебаний. В моменты наибольшего смещения x потенциальная энергия $W_{\text{п}}$ достигает максимума.

При прохождении системой положения равновесия ($x=0$) потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия максимальна. Наибольшие значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой.

§5 Сложение гармонических колебаний

Любая колебательная система в общем случае может совершать одновременно несколько колебаний. Сложение нескольких колебаний значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости.

5.1 Графическое изображение гармонических колебаний. Векторная диаграмма

Из произвольной точки O , взятой на оси x , отложим вектор длиной A , образующий с осью Ox угол φ_0 , равный начальной фазе (рис. 5.1).

Если привести этот вектор во вращение с постоянной угловой скоростью ω_0 , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от $-A$ до $+A$. С течением времени угол будет изменяться по закону

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0,$$

Соответственно, проекция вектора \vec{A} на ось x изменяется по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

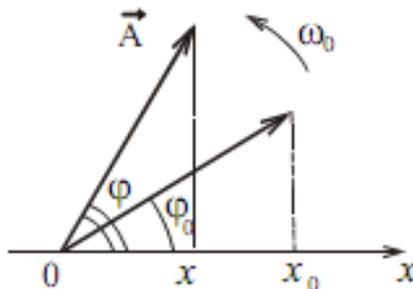


Рисунок 5.1

то есть совершает гармонические колебания.

Из сказанного следует, что *гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный фазе колебания*. Полученная схема называется *векторной диаграммой*.

5.2 Сложение одинаково направленных гармонических колебаний

а). *Сложение колебаний одинаковой частоты*: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$. Смещение x колеблющейся точки будет равно сумме смещений x_1 и x_2 , которые описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Оба колебания представим в виде векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 и сложим их по правилу параллелограмма (рис. 5.2). Проекция вектора \vec{A} на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор \vec{A} представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0 , как и векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 ,

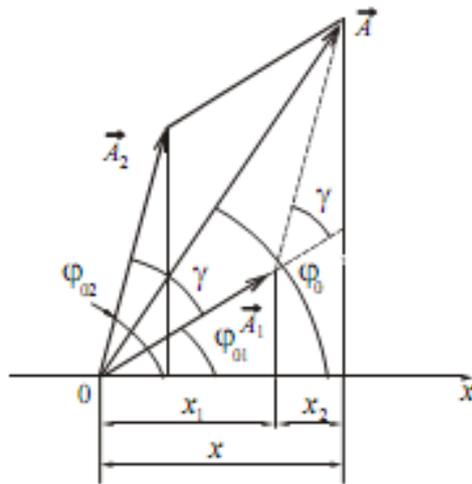


Рисунок 5.2

так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с той же частотой ω_0 , амплитудой A и начальной фазой φ_0 :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.2)$$

Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания определяются соотношениями;

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (5.4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (5.5)$$

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз. Если:

- 1) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2\pi m$, где $m=0, 1, 2, \dots$, то $A = A_1 + A_2$.
- 2) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2m + 1)\pi$, где $m=0, 1, 2, \dots$, то $A = A_1 - A_2$.

б). Сложение колебаний одного направления с различными, но близкими частотами. В результате получаются негармонические колебания называемые **биениями**.

Частота одного колебания ω , частота второго – $(\omega + \Delta\omega)$. По условию $\Delta\omega \ll \omega$. Будем считать, что амплитуды обоих колебаний одинаковы и равны A . Начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Складываемые уравнения будут иметь вид:

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad (5.6)$$

$$x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \quad (5.7)$$

Результирующее колебание опишется уравнением

$$x = x_1 + x_2 = A(\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t$$

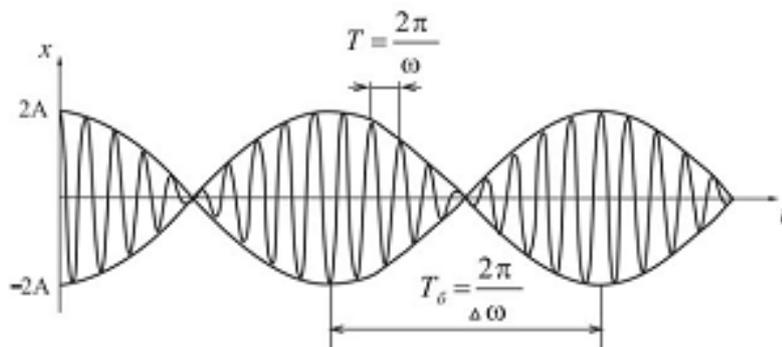


Рисунок 5.3

(во втором множителе пренебрегаем слагаемым $\Delta\omega/2$ по сравнению с ω).

Уравнение, описывающее биения, имеет вид:

$$x = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \cos \omega t. \quad (5.8)$$

График функции (5.8) дан на рис. 5.3. Амплитуда

биений $A(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$. Циклическая частота $\Delta\omega$ называется циклической частотой биений. Период биений $T_{\text{биен}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

5.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

а). *Сложение колебаний одинаковой частоты.* Начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos \omega t \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $\alpha = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ – разность фаз складываемых колебаний. Эти два уравнения составляют систему, которая задает траекторию движения в параметрической форме. Чтобы получить уравнение траектории в обычной форме, надо исключить из (5.10) параметр t . В результате получим:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15) представляет собой уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей x и y произвольно. Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз.

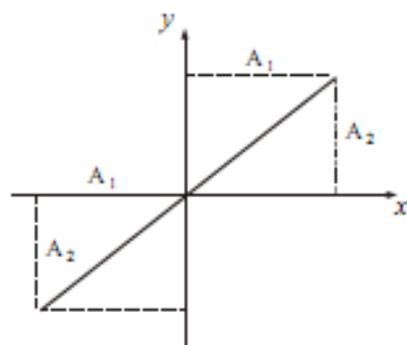


Рисунок 5.4

Частные случаи.

1. Разность фаз складываемых колебаний $\alpha = \Delta\varphi = 0$. В этом случае уравнение (5.15) примет вид

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (5.16)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат и лежащей в I и III четвертях (рис. 5.4)

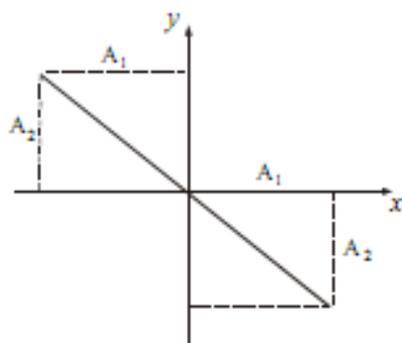


Рисунок 5.5

2. Разность фаз складываемых колебаний $\alpha = \Delta\varphi = \pm\pi$.

Уравнение (5.15) примет вид:

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (5.17)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат и лежащей в II и IV четвертях (рис. 5.5):

3. Разность фаз складываемых колебаний $\alpha = \Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Уравнение (5.15) переходит в каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \quad (5.18)$$

Полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам. Если $A_1 = A_2 = R$, то эллипс вырождается в окружность

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (5.19)$$

Случаи $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = \Delta\varphi = -\pi/2$ отличаются направлением движения по эллипсу или окружности (рис. 5.6).

б). *Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний с кратными частотами* (частоты относятся как целые числа). Точка в результате будет двигаться вдоль замкнутой кривой, форма которой зависит от отношения амплитуд A_2/A_1 , кратности частот ω_2/ω_1 и

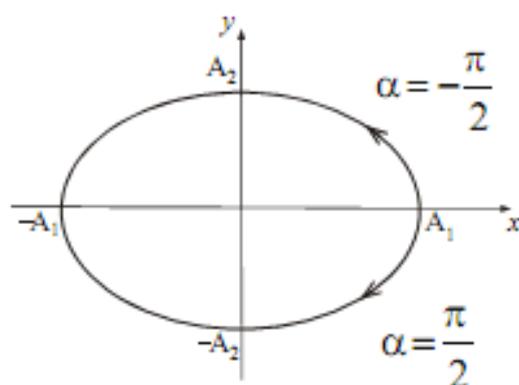


Рисунок 5.6

§6 Затухающие колебания

6.1 Затухающие колебания пружинного маятника

В реальных условиях на шарик массы m , совершающий колебания вдоль оси Ox под действием силы упругости $F_{\text{упр}} = -kx$, действует также сила сопротивления (вязкого трения). При малых скоростях она пропорциональна скорости

$$F_c = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \quad (6.1)$$

где r – коэффициент сопротивления. Знак “–” обусловлен тем, что сила и скорость имеют противоположные направления. В этом случае второй закон Ньютона запишется в виде

$$-kx - r \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (6.2)$$

Разделив обе части полученного уравнения на m , перепишем его следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (6.2a)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.3)$$

где обозначено:

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

6.2 Затухающие колебания в колебательном контуре

Всякий реальный контур (рис. 6.2) обладает активным сопротивлением ($R \neq 0$). Энергия, запасенная в контуре, расходуется в этом сопротивлении на нагревание, поэтому свободные колебания затухают.

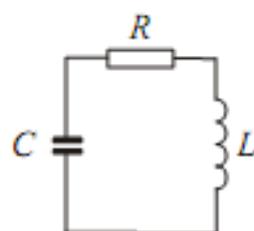


Рисунок 6.2

Потери энергии равны количеству тепла, выделившемуся на активном сопротивлении:

$$-d(W_{эл} + W_m) = \delta Q. \quad (6.7)$$

Знак “-” перед дифференциалом означает, что энергия уменьшается.

$$\text{Согласно (3.19) и (3.20): } W_{эл} = \frac{q^2}{2C}, \quad W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

По закону Джоуля – Ленца $\delta Q = I^2 R dt$.

Сделав подстановку в (6,7) и проведя математические преобразования, получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (6.10)$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (6.11)$$

где

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Уравнение (6.11) по своему виду совпадает с дифференциальным уравнением (6.3) для затухающих механических колебаний. Если затухание невелико ($\beta < \omega_0$), то его решение имеет вид:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.12)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \text{ – частота затухающих колебаний.} \quad (6.13)$$

График функции $q(t)$ имеет тот же вид, что и $x(t)$ (см. рис. 6.1).

6.3 Основные характеристики затухающих колебаний

Величинами, характеризующими затухающие колебания, являются:

1. **Коэффициент затухания** (β) – скалярная физическая величина, характеризующая скорость затухания. $[\beta] = 1/c$

Для механических колебаний

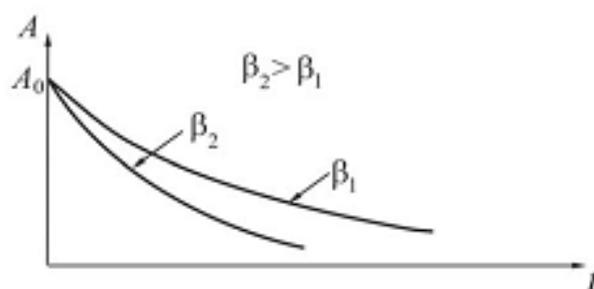


Рисунок 6.3

$$\beta = \frac{r}{2m}. \quad (6.14)$$

Для электромагнитных колебаний

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (6.15)$$

Чем больше коэффициент затухания, тем быстрее уменьшается амплитуда (рис. 6.3).

2. **Время релаксации** (τ) – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e=2,71\dots$ раз (e – основание натуральных логарифмов).

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad (6.16)$$

3. **Логарифмический декремент затухания** (λ) – безразмерная величина, количественная характеристика быстроты затухания колебаний, численно равная натуральному логарифму отношения двух следующих друг за другом амплитуд $A(t)$ и $A(t+T)$ в одну и ту же сторону (см. рис. 6.1)

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} \quad (6.17)$$

Логарифмический декремент затухания и коэффициент затухания связаны соотношением.

$$\lambda = \beta T. \quad (6.18)$$

4. **Число колебаний за время релаксации** – N_e .

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}. \quad (6.19)$$

5. **Добротность колебательной системы** (Q) – безразмерная физическая величина, характеризующая убыль энергии за период и равная произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебаний системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за один период T .

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W_T}, \quad (6.20)$$

где $\Delta W_T = W(t) - W(t+T)$.

Если затухание невелико, то добротность определяется по соотношению:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (6.21)$$

Большим значениям Q соответствует слабое затухание.

6. **Энергия колебаний.** Так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды (см. формулу (4.4)), то закон изменения энергии при затухающих колебаниях примет вид:

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t}, \quad (6.22)$$

где в соответствии с (4.4):

$$W_0 = \frac{kA_0^2}{2}. \quad (6.23)$$

7.2 Вынужденные колебания в колебательном контуре

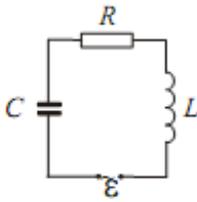


Рисунок 7.4

Чтобы вызвать вынужденные колебания в колебательном контуре, нужно включить последовательно с элементами контура переменную эдс (рис. 7.4):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \Omega t, \quad (7.11)$$

где ε_0 – амплитудное значение эдс.

Получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, применив закон сохранения энергии. В левую часть уравнения (6.7) (см. § 6, п. 6.2) добавим элементарную работу, которую совершает источник эдс:

$$\delta A = \varepsilon l dt. \quad (7.12)$$

Уравнение (6.7) примет вид:

$$-d(W_{эл} + W_M) + \delta A = \delta Q. \quad (7.13)$$

Проведя такие же преобразования, как в п. 6.2, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \Omega t \quad (7.14)$$

или:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \Omega t. \quad (7.15)$$

Здесь β и ω_0 определяются теми же формулами, что в случае затухающих колебаний (см. п.6.2).

Уравнение (7.15) является *дифференциальным уравнением вынужденных электромагнитных колебаний*. Оно имеет тот же вид, что и дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний (7.3). Следовательно, его решение также представим в виде:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t),$$

где $q_1(t) = q_{01} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения;

$q_2(t) = q_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ – частное решение данного неоднородного уравнения.

При установившихся вынужденных колебаниях заряд изменяется по гармоническому закону:

$$q(t) = q_0 \cos(\Omega t + \varphi). \quad (7.16)$$

Амплитудное значение заряда q_0 и сдвиг фаз φ находятся по формулам, аналогичным для механических колебаний:

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\Omega \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}, \quad (7.17)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}. \quad (7.18)$$

В формулах (7.17) и (7.18) произведена замена:

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Сила тока в колебательном контуре при установившихся колебаниях

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \Omega \sin(\Omega t + \varphi) = I_0 \cos\left(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (7.19)$$

где $I_0 = q_0 \Omega$ – амплитуда силы тока, $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ – сдвиг фаз между током и
приложенным напряжением.