«Высшее назначение математики … состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает».

Н. Винер.

Введение

В пособии представлены материалы, необходимые для изучения такого раздела курса «Высшая математика», как «Теория рядов» студентами технических направлений высших учебных заведений. Основная особенность пособия – сочетание необходимого теоретического материала с широким использованием методов решения основных типов задач по изложенным в нём разделам курса.

Идея написания такого пособия пришла автору после многолетнего чтения лекций для студентов технических направлений и переработки уже известной литературы по данным разделам. Опыт работы в вузе выявил особенности в изложении теоретического материала для студентов технических направлений. Основной принцип – его доступность в сочетании со строгостью изложения, поэтому пособие отличается высоким уровнем строгости и методической продуманности изложенных тем, точностью формулировок основных понятий и теорем, краткостью и доступностью при решении задач.

В согласии с обычной практикой прохождения курса теории рядов, обоснование и доказательство основных теорем проводится при помощи нестрогих, правдоподобных («эвристических») рассуждений, а некоторые из них опущены полностью. Уравнение свободных малых колебаний струны с закрепленными концами и его решение методом Фурье, относимые некоторыми вариантами учебных программ к разделу «Ряды», выделены в самостоятельную главу.

Предложенные для решения задачи прошли многолетнюю апробацию. Пособие содержит задачи по всем разделам теории рядов, изучаемых в технических вузах. Большинство задач сопровождаются решениями, а те из них, которые предлагаются для самостоятельного решения, – ответами. В учебном пособии приведен подробный разбор некоторых типовых задач из теории изгиба балки, решение которых позволит студенту глубже понять методику расчётов отдельных конструкций в своей инженерной деятельности.

Данный курс соответствует требованиям, предъявляемым к компетенциям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Поэтому его можно использовать не только как пособие для слушателей курса лекций, но и при самостоятельной работе над предметом.

Глава 1. Числовые ряды

Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных вопросов естествознания и в приближенных вычислениях. С помощью рядов вычисляются значения различных функций, интегралов, решаются дифференциальные уравнения и т.п., в частности, программы приближенного вычисления значений элементарных функций и решения многих стандартных задач, заложения в память микроэвм (включая и микрокалькуляторы), основанные на применении теории рядов.

§1. Числовые ряды. Основные понятия и свойства

Определение 1. Числовой ряд есть алгебраическая сумма бесконечного числа слагаемых. Всякий ряд имеет, таким образом, вид

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots \qquad (1.1)$$

Причем написанное выражение не имеет последнего члена, но за каждым из слагаемых имеется следующее слагаемое.

Для сокращенного обозначения рядов используется знак суммирования $\sum$, а именно:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1.2)$$

Определение 2. Числа $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$ называются членами ряда (1.2); a_n называется ***общим членом ряда***.

Рассмотрим некоторые примеры рядов. В курсе математики средней школы мы уже встречались с понятием ряда, который получается при вычислении суммы членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n . \qquad (1.3)$$

Определение 3. Ряд (1.3) называется ***рядом геометрической прогрессии***.

Если, например, $a=1$, $q=\frac{1}{5}$, то получим ряд

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}. \qquad (1.4)$$

Определение 4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (1.5)$$

называется ***гармоническим рядом***.

Определение 5. Сумма первых n членов ряда называется ***частичной суммой ряда.***

Если частные суммы ряда становятся все более и более точными приближениями некоторого числа, то ряд мы назовем сходящимся. То есть, если существует число S, для которого S_1, S_2,..., S_n,...являются приближенными значениями, то S называют ***суммой ряда*** и пишут

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=S. \qquad (1.6)$$

Определение 6. Ряд (4.1) называется сходящимся, если последовательность его частных сумм (4.6) сходится, т.е. если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S. \qquad (1.7)$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, то ряд называется ***расходящимся*** и ему не приписывается никакое числовое значение [1].

Пример 1. Исследуем на сходимость ряд геометрической прогрессии (1.3).

Решение.

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n=\frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}=$$

$$=\frac{a-aq^{n+1}}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^{n+1}}{1-q}. \qquad (1.8)$$

Рассмотрим q, удовлетворяющее условию $|q|<1$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^{n+1}}{1-q} =$$

$$= \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot 0 = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, при $|q|<1$ ряд (1.3) сходится и его сумма S равна $\frac{a}{1-q}$. В частности, сумма ряда (1.4) равна $S = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$.

Если $|q| \geq 1$, то ряд (1.3) сходится лишь при $a=0$. В этом случае $S_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Если $a \neq 0$ и $|q| \geq 1$, то из (1.8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty}\left(1-q^{n+1}\right) = \frac{a}{1-q}\cdot\infty = \infty,$$ т.е. ряд (1.3) расходится.

Если $a \neq 0$ и $|q| = 1$,то получим при $q=1$ ряд

$$a + a + \ldots + a + \ldots, \tag{1.9}$$

а при $q=-1$ ряд

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n+1} a + \ldots \tag{1.10}$$

Для ряда (1.9) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a = a\lim\limits_{n\to\infty} n = a\cdot\infty = \infty$, т.е. ряд является расходящимся.

Для ряда (1.10) $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = a$, следовательно, последовательность частичных сумм a, 0, a, 0,... не имеет предела.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}.$$

Решение. Для частных сумм данного ряда имеем

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots =$$

$$= \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \ln(n+1).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$.

Согласно определению 6 ряд является расходящимся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}.$$

Решение. Преобразуем частные суммы данного ряда. Для этого запишем общий член ряда следующим образом:

$$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}.$$

Найдем числа A и B:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+B_n}{n(n+2)}=\frac{(A+B)n+2A}{n(n+2)}.$$

Если две равные дроби имеют одинаковые знаменатели, то и их числители равны, т.е.

$1+(A+B)n+2A$ или $0\cdot n+1=(A+B)n+2A.$

Два многочлена являются равными, если равны коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, т.е.

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A=1. \end{cases}$$

Откуда $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. Тогда $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

$$S_1=a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),$$

$$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right),$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right),$$

$$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+2}\right),$$

- -

$$S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+2}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{4},$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$.

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{4}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2-5n+6}$.

§2. Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм

Приступая к изучению какого-нибудь нового ряда, мы вынуждены каждый раз начинать с «пустого места». Наши возможности ограничиваются при этом использованием индивидуальных особенностей каждого из изучаемых рядов, и вместо теории мы имели бы просто коллекцию разрозненных задач. Несколько шагов по этому пути было сделано в §1, посвященной прогрессиям. Но то, что оказалось пригодно для иллюстративных целей, совершенно нетерпимо при систематическом построении математической теории.

Поэтому ввиду трудностей исследования некоторых исходных рядов на сходимость сейчас займемся не столько установлением сходимостей или расходимостей отдельных рядов, сколько выяснением связей между поведением одних рядов и поведением других; мы будем учиться использовать сведения, полученные в результате анализа одного ряда, для упрощения исследования других рядов.

Выполняя эту программу, начнем с доказательства нескольких простых теорем, которые, по существу, являются непосредственным применением простейших теорем о пределах последовательностей к последовательностям частичных сумм рядов.

Рассмотрим свойства сходящихся рядов.

Теорема 1. Если ряд (1.2) сходится и его сумма равна S, то для произвольного числа c ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots \qquad (1.11)$$

Так же сходится и его сумма, равная cS. Если же ряд (1.2) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (1.11) расходится.

<u>Доказательство.</u> Пусть ряд (1.2) сходится и $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Обозначим частные суммы ряда (1.11) через S_n.

Тогда

$$S'_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS_n. \qquad (1.12)$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS_n.$$

Пусть теперь ряд (1.2) сходится, $c \neq 0$, и допустим противное, что ряд (1.11) сходится, причем $\lim_{n\to\infty} S'_n = S'$. Тогда, учитывая (1.12), имеем $S' = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n$, откуда $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S'}{C}$, что противоречит нашему условию о расходимости ряда (1.2), что и требовалось доказать.

Пример 1. Известно, что ряд (1.4) сходится. Показать, что сходится и ряд

$$5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{5^{n-4}} + \ldots$$

<u>Решение.</u> Последний ряд получается из ряда (2.4) умножением на $c = 5^4$, следовательно, он сходится согласно теореме 1.

Теорема 2. Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.13)$$

и $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{1.14}$$

сходятся и их суммы равны соответственно S' и S'', то и каждый из двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots \tag{1.15}$$

сходится и сумма каждого равна соответственно $S' \pm S''$.

Другими словами, ***сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать***.

Доказательство. По условию имеем $S' = \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$, $S'' = \lim\limits_{n\to\infty} S''_n$, где

$$S' = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ S'' = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Пусть $S_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ – частичная сумма ряда (2.15). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S'_n \pm S''_n) = \lim_{n\to\infty} S'_n \pm \lim_{n\to\infty} S''_n = S' \pm S''.$$

Следовательно, каждый из рядов (1.15) сходится и сумма каждого равна соответственно $S = S' \pm S''$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = 2 + \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} + \ldots$$

и если он сходится, найти его сумму S.

Решение. Данный ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) =$$

$$= (1+1) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots$$

Так как ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

являются рядами геометрической прогрессии, его знаменателями, меньшими единицы, то они сходятся и их суммы равны соответственно $S' = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$, $S'' = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$ (см. пример 1).

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна

$$S = S' + S'' = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

Без доказательства сформулируем следствие.

Следствие 1. Разность сходящихся рядов есть ряд сходящийся.

Следствие 2. Сумма расходящихся рядов есть ряд расходящийся

Пример 3. Ряды

$$5 + 10 + 15 + \ldots + 5n + \ldots\ ,\ \ 3 + 6 + 9 + \ldots + 3n + \ldots$$

очевидно являются расходящимися, так как пределы их частных сумм равны бесконечности.

Их сумма

$$8 + 16 + 24 + \ldots + 8n + \ldots$$

и разность

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + \ldots$$

также расходящиеся ряды.

Без доказательств рассмотрим следующую теорему.

Теорема 3. Если в ряде (1.1) добавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд

$$a_1' + a_2' + \ldots + a_n' + \ldots \tag{1.16}$$

сходится или расходится одновременно с данным. В случае сходимости рассматриваемых рядов их суммы отличаются на сумму добавленных или отброшенных членов.

Пример 4. Как известно, ряд геометрической прогрессии (1.4) является сходящимся. Тогда сходящимся является, например, и ряд

$$5 + \sqrt{2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \ldots + \frac{1}{5^{n+1}} + \ldots,$$

который получается из данного отбрасыванием конечного числа членов: $5 + \sqrt{2}$ и добавлением слагаемых: $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{5^4}$.

§3. Необходимый признак сходимости ряда

При анализе рядов, полученных в результате моделирования какой-нибудь конкретной задачи, возникают два вопроса: во-первых, сходится ли полученный ряд, т.е. стабилизируется ли моделируемый процесс, и если он сходится, то во-вторых, найти его сумму. Во многих практических задачах принципиальное значение имеет ответ на первый вопрос. Поэтому мы уделим основное внимание вопросу установления признаков сходимости рядов.

Рассмотрим необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 1. Критерий Коши (необходимые и достаточные условия сходимости ряда).

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n > N$ и любом $p > 0$, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon .$$

Доказательство (необходимость).

Пусть $a_n \to a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство $\left|a - a_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполняется при $n>N$. При $n>N$ и любом целом $p>0$ выполняется также неравенство $\left|a - a_{n+p}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Учитывая оба неравенства, получаем:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|(a_{n+p} - a) + (a - a_n)\right| \le \left|a_{n+p} - a\right| + \left|a - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана. Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Сформулируем критерий Коши для ряда.

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что при $n>N$ и любом $p>0$ выполнялось бы неравенство

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}\right| < \varepsilon .$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому, как правило, используются более простые признаки сходимости:

1) **Теорема 2.** Если ряд (1.2) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю.

Доказательство. Пусть ряд (1.2) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Тогда имеем также $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, при $n>1$ получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. ***Если $n-$й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится, ряд может и расходиться***.

Пример 1. Ряд $\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{7}+\dfrac{6}{10}+\ldots+\dfrac{2n}{3n+1}+\ldots$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\dfrac{1}{n}}\right) = \frac{2}{3} \neq 0.$$

При вычислении предела воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

Подчеркнем, что рассматриваемый признак является только необходимым, но не является достаточным, т.е. ***из того, что член стремится к нулю, еще не следует, что ряд расходится***, ряд может и расходиться. Примером такого ряда может служить ***гармонический ряд*** (1.5). Он расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. Чтобы доказать это, напомним, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,\text{ т.е. } \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e\ . \qquad (1.17)$$

Логарифмируя неравенство (2.17) по основанию *e*, получим

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \ln l\ \text{, или } \ n\ln\frac{n+1}{n} < 1.$$

Отсюда

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n} \quad \text{,или} \quad \ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n}. \tag{1.18}$$

Подставим в (2.18) поочередно $n=1,2,3,...,n-1,n$. Получаем неравенства:

$$\ln 2<1, \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}, \ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

- -

$$\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}, \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

Сложив почленно эти неравенства, получаем

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},$$

т.е. частичная сумма гармонического ряда $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, следовательно, гармонический ряд расходится. Существует множество рядов, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, но которые тем не менее расходятся.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено. Частичная сумма

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$, а это значит, что ряд расходится по определению.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n; \\ 1, & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n.

Задачи для решения в аудитории

Задача. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, если:

а) $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 10}{10n^2 - 3n + 1}$;

б) $u_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$;

в) $u_n = n \sin \dfrac{\pi}{2n+1}$;

г) $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 1}{2^{n+3} + 3}$.

Индивидуальные задания

Доказать расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, используя необходимый признак сходимости.

1. $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+4}{5n+1}}$

2. $u_n = \dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 4}}$

3. $u_n = 3^{-\frac{1}{5^n}} \cdot \dfrac{n+1}{2n+3}$

4. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

5. $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-1}{100n+36}}$

6. $u_n = \cos \dfrac{\pi}{3^n}$

7. $u_n = \operatorname{tg} \dfrac{\pi n}{4n+1}$

8. $u_n = \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n$

9. $u_n = \dfrac{\sqrt{3n^2 - 4n}}{4n+5}$

10. $u_n = \dfrac{\pi\left(n^2 + 2n - 1\right)}{6n^2 - 5n + 6}$

11. $u_n = e^{\frac{n+1}{n^3+2n^2+3}}$

12. $u_n = \cos\frac{\pi n+1}{6n^2+5n+4}$

13. $u_n = \sqrt[3]{\frac{n+1}{8n+7}}$

14. $u_n = \left(n^2+1\right)\sin\frac{\pi}{n^2}$

15. $u_n = \frac{6\cdot 3^n + 2^{2n}}{7\cdot 2^{2n} - 3^{n+1}}$

16. $u_n = \frac{2n^2+3n-1}{10n^2+15n+3}$

17. $u_n = \sin\frac{\pi n+3}{3n+\pi}$

18. $u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$

19. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$

20. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{n}}{2n+1}}$

21. $u_n = \pi n\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{10n+1}$

22. $u_n = \cos\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{4n}$

23. $u_n = \frac{5\cdot 2^n + 2\cdot 5^n}{2\cdot 5^{n+1}}$

24. $u_n = \left(\frac{4n-1}{100n+27}\right)^{\frac{n}{2n+5}}$

25. $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{9n^2+1}}$

26. $u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n+1}{n\sqrt{n+2}}}$

27. $u_n = \cos^2\frac{\pi n+4}{4n+\pi}$

28. $u_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$

29. $u_n = \cos\frac{\pi n}{4n+1}$

30. $u_n = \ln^2\frac{4n-1}{5n+7}$

§4. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Признак сравнения

Существует довольно много примеров, позволяющих устанавливать сходимость или расходимость рядов. Все эти приемы называются *признаками сходимости.* В настоящее время известно большое число различных признаков сходимости рядов. С некоторыми из них мы уже успели познакомиться. Так, например, сходимость ряда можно установить, составив последовательность его частичных сумм и выяснив, имеет ли эта последовательность конечный предел. Этот прием, очевидно, является необходимым и достаточным признаком сходимости рядов. Стремление к нулю члена ряда по мере роста его номера также является признаком сходимости ряда, уже только необходимым, но не достаточным (см. § 3).

К числу признаков сходимости можно отнести также всякого рода теоремы, позволяющие сводить выяснение вопроса о сходимости некоторого данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или хотя бы более знакомый.

Эти теоремы обычно состоят в сравнении членов исследуемого ряда с членами другого ряда, поведение которого уже выяснено. Поэтому они называются *признаками сравнения*. По существу, все рассматриваемые в этой главе признаки сходимости являются такими признаками сравнения. В некоторых из них производится сравнение исследуемого ряда с конкретными стандартными рядами (например, с геометрическими прогрессиями). В этих случаях «сравнительная» природа признака внешне затушевывается, но, разумеется, не пропадает

Без доказательства сформулируем следующие признаки сравнения.

Теорема 1. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \; a_n \geq 0. \tag{1.19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \; b_n \geq 0. \tag{1.20}$$

Если $b_n \leq a_n$ для любого n, то из сходимости ряда (1.19)следует сходимость ряда (1.20) и сумма ряда (1.20) не превосходит сумму ряда (1.19); из расходимости ряда (1.20) следует расходимость ряда (1.19).

Замечание 1. Утверждение теоремы остается в силе, если существует натуральное N такое, что для любого $n \ge N$ выполняется неравенство $b_n \le a_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{\lg 3} + \ldots + \frac{1}{\lg n} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lg n}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим.

Имеем $\ln n \le n$, значит, $\dfrac{1}{\ln n} \ge \dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом. Имеем $\sqrt[3]{n} \le n$, значит, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \ge \dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{n \cdot 5} + \frac{1}{n \cdot 5^2} + \frac{1}{n \cdot 5^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 5^n} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}.$$

<u>Решение.</u> Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots + \dfrac{1}{5^n} + \ldots$, который сходится. Имеем

$$\frac{1}{n \cdot 5^n} \le \frac{1}{5^n}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено. Частичная сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, а это значит, что ряд расходится по определению.

Несмотря на простоту формулировки признака сравнения, на практике более удобна следующая теорема, являющаяся его следствием.

Теорема 2. Если $a_n > 0, \quad b_n > 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

В качестве ряда, используемого для сравнения с данным, часто выбирают ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; \quad p > 0$. Такой ряд называется *рядом Дирихле*. В примерах 2 и 4 было показано, что ряд Дирихле с $p = \frac{1}{3}$ и $p = \frac{1}{2}$ расходится. Можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p>1$сходится, а при $p<1$ расходится.

Если $p = 1$, то получаем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Гармонический ряд расходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \left(e^{\frac{1}{1}} - 1 \right) + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \ldots + \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) + \ldots .$$

Решение.

Возьмем в качестве вспомогательного гармонический ряд, составим соотношение

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

и вычислим его предел, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$$

Поэтому рассмотренный выше ряд должен расходиться.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5n+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. Так как при достаточно больших n $2n-1\sim 2n$, а $3n^2+5n+1\sim 3n^2$, то $u_n=\frac{2n-1}{3n^2+5n+1}\sim\frac{2n}{3n^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}$. Выберем для сравнения с данным гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, т.е. $b_n=\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot n}{3n^2+5n+1}=\frac{2}{3} \quad \text{(см. [5]).}$$

Поскольку предел конечен и отличен от нуля и гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{4n^4+5n^2+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. При достаточно больших n имеем $n^2+3n+4\sim n^2$, $4n^4+5n^2+1\sim 4n^4$, поэтому $b_n=\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}$ – общий член ряда, с которым будем сравнивать данный:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3n+4\right)n^2}{4n^4+5n^2+1}=\frac{1}{4} \quad \text{(см. [5]).}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле с $p=2$), поэтому данный ряд также сходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}=0$, поэтому бесконечно малую $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}$ можно заменить на эквивалентную ей при $n\to\infty$ величину $\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}$ так как $\operatorname{arctg} t \sim t$ при $t\to 0$ (см. [5]).

Тогда $b_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – общий член ряда для сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\ \sqrt{n}\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}\cdot\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{3}}{n+1}=\sqrt{3}.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (ряд Дирихле с $p=\dfrac{1}{2}$), то данный ряд расходится.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, если

а) $u_n=\dfrac{1}{2^n\cdot n}$; б) $u_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с помощью предельного признака сравнения, если

а) $u_n=\dfrac{2n^2+3}{n^3+5n^2+1}$; б) $u_n=\dfrac{3n^3+2n^2+4}{6n^5+2n^4+1}$; в) $u_n=\sqrt{n}\ \sin\dfrac{2\pi}{n^2+1}$.

Ответы

1. а) Ряд сходится, б) ряд расходится. 2. а) Ряд расходится, б) ряд сходится, в) ряд сходится.

Индивидуальные задания

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью предельного признака сравнения.

1. $$u_n = \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$$

2. $$u_n = \frac{1}{n^2-n}$$

3. $$u_n = \frac{n^2+n^3}{\sqrt{n^8+n^2+9n}}$$

4. $$u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

5. $$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

6. $$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

7. $$u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(5\sqrt[3]{n}-1\right)}$$

8. $$u_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$$

9. $$u_n = \frac{2^n+n^2}{5^n+n^5}$$

10. $$u_n = \sin\frac{\pi}{4n^2}$$

11. $$u_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n}{4n^2+4n+1}$$

12. $$u_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

13. $$u_n = \frac{n+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2}$$

14. $$u_n = \sqrt{\frac{n^2}{n^6+4n^3+2n^2+1}}$$

15. $$u_n = \frac{3n^2-5n+6}{\sqrt{n^7+4n^5+2}}$$

16. $$u_n = \frac{3^n+2n^2}{2^{n+4}+4n^4+2n^2+3}$$

17. $$u_n = \frac{\sqrt{3n+2}}{n^4+3n^2+2n}$$

18. $$u_n = \pi n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{10n^3}$$

19. $$u_n = (n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{(n+2)^2}$$

20. $$u_n = \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

21. $$u_n = \frac{n^2+2n+5}{n^4+2n^2+5}$$

22. $$u_n = \frac{3^n}{3^{2n}+3^{n+1}+4}$$

23. $u_n = n\sin\frac{\pi}{2n^3}$

24. $u_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

25. $u_n = \sin\frac{2\pi n}{4n^2+1}$

26. $u_n = \frac{1}{n}tg^2\frac{\pi}{\sqrt{n}}$

27. $u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$

28. $u_n = n^2\,\mathrm{tg}^4\frac{\pi}{n}$

29. $u_n = \frac{\mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n+3}}$

30. $u_n = \frac{3^n}{6^n+n-1}$

§5. Признак сходимости Даламбера

Мы видели примеры весьма медленно сходящихся и весьма медленно расходящихся рядов. В их число прогрессии не входят: если в прогрессии знаменатель меньше единицы, то прогрессия довольно быстро сходится. С другой стороны, если знаменатель прогрессии не меньше единицы, то прогрессия расходится весьма быстро: частичные ее суммы, начиная с некоторого места, растут во всяком случае не медленнее, чем линейная функция.

В связи со сказанным едва ли можно надеяться, что основанный, по существу, только на свойствах прогрессий признак сходимости Даламбера окажется особенно чувствительным.

Теорема 1. Признак Даламбера (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик). Пусть дан ряд (4.19) с положительными членами. Допустим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

существует и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho. \qquad (1.21)$$

Тогда:

если $\rho < 1$, то ряд (4.19) сходится;

если $\rho > 1$, то ряд (4.19) расходится;

если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Доказательство. 1) Пусть $\rho<1$, в этом случае существует такая точка q на числовой оси $0x$, что $\rho<q<1$. Тогда, начиная с некоторого номера N, при $n\geq N$, все члены последовательности $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ будут находиться в окрестности $(0;q)$, т.е. для всех $n\geq N$ имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q<1.$$

Значит, для $n=N,\ N+1,\ N+2,...$ получаем неравенства

$$\begin{cases} a_{N+1}<qa_N, \\ a_{N+2}<qa_{N+1}<q^2a_N, \\ a_{N+3}<qa_{N+2}<q^2a_{N+1}<q^3a_N, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{N+K}<qa_{N+K-1}<q^Ka_N, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Так как $0<q<1$, ряд из членов бесконечно геометрической прогрессии $a_N+a_Nq+a_Nq^2+\ldots$ сходится; следовательно, по замечанию 1 и ряд (4.19) сходится.

Пусть $\rho>1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$. Тогда, начиная с некоторого N, $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ при $n\geq N$, т.е. при $n\geq N$, $a_{n+1}>a_n>a_{n-1}>\ldots>a_N$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

Это противоречит необходимому признаку сходимости рядов. Таким образом, ряд (4.19) расходится, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Если $\rho=1$, то ряд (4.19) может быть как сходящимся, так и расходящимся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5). В этом случае для решения вопроса о сходимости ряда необходимы дополнительные исследования.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n-1}=3+\frac{6}{3}+\frac{9}{5}+\ldots+\frac{3n}{2n-1}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2(n+1)-1}:\frac{3n}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n+1)(2n-1)}{3n(2n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{6+\frac{3}{n}}=\frac{6}{6}=1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда. Но так как

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}\neq 0$, т.е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, предложенный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots$$

<u>Решение.</u> Для данного ряда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+3)^2}:\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+3)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+4}{n^2+6n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}=1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots,$$

который, как мы знаем (пример 3, §1), является сходящимся. Имеем

$$(n+2)^2\leq n(n+2),\text{ т.е. }\frac{1}{(n+2)^2}\leq\frac{1}{n(n+2)},$$

отсюда по теореме 1 получаем сходимость исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots$$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}.$$

<u>Решение.</u> Напомним,

$$(2n+1)!=(2\cdot 1+1)(2\cdot 2+1)(2\cdot 3+1)\ldots(2(n-1)+1)(2n+1)=$$
$$=3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)(2n+1).$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2(n+1)+1)!};\frac{1}{(2n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+3)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}.$$

<u>Решение.</u> Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^n\cdot 5}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{5}=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{8+6^n}=\frac{2}{14}+\frac{4}{44}+\ldots+\frac{2^n}{8+6^n}+\ldots$$

<u>Решение.</u> Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{8+6^{n+1}}:\frac{2^n}{8+6^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\left(8+6^n\right)}{2^n\cdot\left(8+6^{n+1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\cdot\left(8+6^n\right)}{2^n\cdot\left(8+6\cdot 6^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 6^n\cdot\left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{6^n\cdot\left(\frac{8}{6^n}+6\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{\frac{8}{6^n}+6}=$$

$=\frac{2\cdot 1}{6}=\frac{1}{3}<1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится. При решении воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{6^n}=0$.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{n!}=\frac{5}{1}+\frac{7}{2!}+\frac{11}{3!}+\ldots+\frac{2^n+3}{n!}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}+3}{(n+1)!}:\frac{2^n+3}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^{n+1}+3\right)\cdot n!}{\left(2^n+3\right)\cdot(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!}{2^n\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\cdot n!\right)}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)(n+1)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{2^n}}{1+\frac{3}{2^n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{2}{1}\cdot 0=0<1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{10\cdot n^{20}}=\frac{5}{10}+\frac{5^2}{10\cdot 2^{20}}+\frac{5^2}{10\cdot 3^{20}}+\ldots+\frac{5^n}{10\cdot n^{20}}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{10\cdot(n+1)^{20}}:\frac{5^n}{10\cdot(n+2)^{20}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot 10\cdot(n+2)^{20}}{5^n\cdot 10\cdot(n+2)^{20}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5}{5^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{20}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{20}=5\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{20}=5\cdot 1^{20}=5>1,$$ следовательно, по признаку Даламбера ряд расходится.

Без доказательства сформулируем признак Коши, который целесообразно использовать, когда a_n является $n-$ой степенью некоторого выражения, например $a_n=\frac{2^n}{n^n}$, или $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

§6. Признак сходимости Коши

Сравнение рядов с прогрессиями приводит ещё и к другому признаку сходимости, принадлежащему Коши.

Теорема 1 (признак Коши). Пусть ряд (1.19) с неотрицательными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ существует и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho. \tag{1.22}$$

Тогда:

если $\rho<1$, то ряд (1.19) сходится;

если $\rho>1$, то ряд (1.19) расходится;

если $\rho=1$, то ряд (1.19) может быть как сходящийся, так и расходящийся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5).

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n=\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$ следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}=2+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

Решение. Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}7$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$ следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}=\left(\frac{3}{28}\right)^9+\left(\frac{8}{49}\right)^{16}+\ldots+\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}=\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0<1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots$$

<u>Решение.</u> Имеем

$$\lim_{n\to\infty}=\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд исследовать нельзя. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, данный ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

<u>Решение.</u> Используя равенство $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{\alpha}=1$, получаем

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^2=1^2=1$, но этот ряд сходится, так как если отбросить первых два члена, то он совпадает с рядом $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}$, который является сходящимся (см. пример 2 §5.).

§7. Интегральный признак сходимости

Как видно из доказательства признака Даламбера, а признак Коши доказывают аналогично, эти два признака дают ответ о сходимости только тех рядов, порядок малости членов которых не меньше, чем у ряда геометрической прогрессии, т.е. только для “быстро” сходящихся рядов. С другой стороны, эти признаки устанавливают расходимость только таких рядов, у которых общий член даже не стремится к нулю. Эти признаки, следовательно, являются слишком грубыми. Они неприменимы к рядам с медленно растущими частичными суммами, каким является, например, гармонический ряд.

Сформулируем сейчас признак, который в некоторой степени восполняет этот пробел.

Теорема 1 (интегральный признак). Пусть дан ряд (1.19) с положительными членами, причем $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$и $f(n)$– такая непрерывная монотонно убывающая функция, что $f(n) = a_n$. Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$одновременно сходится или расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots \quad \alpha > 0,\ \alpha \neq 1.$$

<u>Решение.</u> Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $x \geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n) = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, следовательно, можно применить интегральный признак. При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{M\to\infty}\int\limits_1^{M}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{M\to\infty}\int\limits_1^{M}x^{-\alpha}dx = \left(\lim_{M\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^M\right) =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}\right)\right) = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha} - 1\right).$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая:

1) $1-\alpha < 0$, т.е. $\alpha > 1$, или $\alpha - 1 > 0$; следовательно, $M^{1-\alpha} = \dfrac{1}{M^{\alpha-1}}$ стремится к нулю, если M стремится к бесконечности. Тогда

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{M^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

таким образом, при $\alpha > 1$ данный ряд сходится.

В частности, ряд $1 + \dfrac{1}{2^{\frac{7}{4}}} + \dfrac{1}{3^{\frac{7}{4}}} + \ldots + \dfrac{1}{n^{\frac{7}{4}}} + \ldots$сходится, т.к. $\alpha = \dfrac{7}{4} > 1$.

$1-\alpha > 0$, т.е. $\alpha < 1$. Тогда $M^{1-\alpha}$ неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности, следовательно,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha}-1\right)=\infty$$

и данный ряд расходится.

В частности, ряд $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$ расходится, так как $\alpha=\frac{1}{3}<1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}=\frac{\ln^3 3}{3}+\frac{\ln^3 4}{4}+\frac{\ln^3 5}{5}+\ldots+\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}+\ldots$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln^3(x+2)}{x+2}$, $x\geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}$, следовательно, можно применить интегральный признак $\int_1^{\infty}\frac{\ln^3(x+2)}{x+2}dx=\lim\limits_{M\to\infty}\int_1^{M}\frac{\ln^3(x+2)}{(x+2)}dx=$

$$=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}\ln^3(x+2)d\ln(x+2)=\lim_{M\to\infty}\frac{\ln^4(x+2)}{4}\Big|_1^M=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{4}\left[\ln^4(M+2)-\ln^4 3\right]=\infty,$$

т.к. $\ln^4(M+2)$ неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности. Следовательно, ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^4}+\frac{3}{e^9}+\ldots+\frac{n}{e^{n^2}}+\ldots$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x}{e^{n^2}}$, $x\geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\frac{n}{e^{n^2}}$, следовательно, можно применить интегральный признак

$$\int_1^\infty \frac{x}{e^{x^2}}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x^2}x\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^M e^{-x^2}(-2x)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty} e^{-x^2}\Big|_1^M = -\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\left(e^{-M^2} - e^{-1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{e^{M^2}} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e},$$

т.к. e^{M^2} неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности. Следовательно, данный ряд сходится по интегральному признаку.

Вывод. Интегральный признак Коши является, как видно из его формулировки, необходимым и достаточным признаком. Это значит, что он устанавливает сходимость любого сходящегося ряда и расходимость любого расходящегося ряда из сферы своей применимости. Иными словами, интегральный признак является идеально чувствительным. В этом отношении он напоминает критерий сходимости Коши. Естественно, что все такие «необходимые и достаточные» признаки, если только они сколько-нибудь широки, неизбежно оказываются по отношению ко многим рядам непрактичными. В этом можно усмотреть проявление весьма общей закономерности: чем шире и богаче возможности того или иного математического аппарата, тем сложнее его логическая природа и тем труднее с ним управляться.

Как видно из рассмотренных выше примеров, путь непосредственного вычисления интеграла при применении интегрального признака сходимости не всегда приемлем. Правда, иногда можно прийти к цели путем каких-нибудь косвенных оценок величины этого интеграла, но это уже будет представлять собой самостоятельную задачу, иногда даже более трудную, чем анализ самого ряда.

Следовательно, при изучении рядов ограничиться одним только интегральным признаком сходимости нельзя, и необходимо использовать еще и другие признаки сходимости, быть может, не столь чувствительными, как интегральный признак, но зато более удобными в обращении, более практичными.

Наконец, для того чтобы применение признака сходимости было не только принципиально возможным и практически выполнимым, но и действительно приводило к цели, признак должен быть достаточно чувствительным.

Такими признаками очевидно являются признаки сходимости Даламбера и Коши. Они весьма практичны и достаточно широки, но зато малочувствительны. Впрочем, как видно из рассмотренных выше примеров, их чувствительности будет хватать для ответа на весьма большое число теоретических вопросов и решения многих практических задач.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера, если:

а) $a_n = \dfrac{2^n}{n^8}$; б) $u_n = \dfrac{n!}{2^n + 3^n}$; в) $a_n = \dfrac{3^n + 1}{n^2 + 1}$;

г) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)!}$; д) $u_n = \dfrac{2^n}{2n+3} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^n}$.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью радикального признака Коши:

а) $a_n = \dfrac{5^n}{(4n+3)^n}$; б) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+4}\right)^{2n}$;

г) $a_n = \operatorname{arctg}^n \dfrac{n}{n+3}$; д) $a_n = \left(\dfrac{3n^2 + 2n}{n^2 + 1}\right)^n \cdot 5^{-n}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью интегрального признака Коши, если:

а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$; б) $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$; в) $a_n = \dfrac{3n^2}{e^{n^3}}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{8 + \ln^2 n}}$.

Ответы

3**.** а) Ряд расходится, б) ряд расходится, в) ряд расходится, г) ряд сходится, д) ряд сходится. 4. а) Ряд сходится, б) ряд расходится, в) ряд сходится, г) ряд сходится, д) ряд сходится.
5. а) Ряд расходится, б) ряд сходится, в) ряд сходится, г) ряд расходится.

Индивидуальные задания

Исследовать сходимость следующих числовых рядов.

4.01а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2+3n}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

4.02а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3+5n}\right)^{4n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4.03а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^7 n}{n}$.

4.04а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{5n+1}$.

4.05а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{7n-2}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

4.06а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

4.07а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

4.08а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(6n+1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^4(5n+2)}{(5n+2)}$.

4.09а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n\cdot(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{e^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4.10а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} n}}{1+n^2}$.

4.11а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg} n\left(n^2+1\right)}$.

4.12а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{e^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}$.

4.13а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{3^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{n^2-1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot 3^{n^2}$.

4.14а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100n^2}{n^2+100}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.

4.15а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+2}{\sqrt{n}}$.

4.16а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+1}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(n+1)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{n}$.

4.17а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{n}$.

4.18а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

4.19а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+1}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)+1}{(n+1)}$.

4.20а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{4n^2+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

4.21а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^{2n}+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5n^2+3}\right)^n\cdot 2^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

4.22а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln n$.

4.23а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-3n}{5n^2-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n^2+1}$.

4.24а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{(n+1)}$.

4.25а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n1}{2^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.

§8. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Определение 1. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1.23)$$

Если в ряде (1.23) имеется лишь конечное число отрицательных (или положительных) членов, то, отбрасывая их, получим ряд, члены которого имеют постоянный знак. По теореме 3 (§2) полученный и первоначальный ряды одновременно сходятся или расходятся. Поэтому будем рассматривать только ряды, которые среди своих членов содержат бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей всех членов ряда (12.23):

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|\ldots \qquad (1.24)$$

Теорема 1. Если ряд (1.24) сходится, то сходится и ряд (1.23).

Доказательство. Так как ряд (1.24) сходится, то и сходится ряд (1.23), потому что все его члены либо меньше, либо равны членам ряда (1.24), и по признаку сравнения он является сходящимся.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Решение. Ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

сходится (см. пример 1, §7), следовательно, и данный ряд сходится.

Определение 2. Знакопеременный ряд (1.23) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд (1.24), составленный из модулей его членов.

Определение 3. Ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots$, составленный из модулей его членов, расходится.

Теорема 1 показывает, что исследование сходимости знакопеременных рядов сводится к исследованию сходимости рядов с неотрицательными членами.

Мы ограничимся исследованием знакочередующихся рядов, являющихся частными случаями знакопеременных.

Определение 4. Ряд называется ***знакочередующимся***, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно. При исследовании таких рядов можно ограничиться знакочередующимися рядами вида

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots, \tag{1.25}$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – положительные числа.

Приведем достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.

Теорема 2 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд (1.25) сходится, если:
его члены убывают по модулю,

$$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots; \tag{1.26}$$

его общий член стремится к нулю,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{1.27}$$

При этом сумма S ряда (1.25) удовлетворяет неравенствам $0\le S\le a_1$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим отдельно частные суммы ряда (1.25) с четным и нечетным числом слагаемых. Имеем

$$\begin{gathered}S_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}=\\=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}).\end{gathered}$$

Так как выполняется соотношение (4.26), выражения в скобках не отрицательны, следовательно, $S_{2n}\ge 0$.

Кроме того, последовательность S_{2n} не убывает при $n\to\infty$, ввиду того, что

$$S_{2n+2}=S_{2n}+(a_{2n+1}-a_{2n+2})\ge S_{2n}.$$

С другой стороны, S_{2n} можно представить в виде

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Так как каждое выражение в скобках не отрицательно и a_n не отрицательно, то последовательность “четных” частичных сумм не убывает и ограничено сверху; значит, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, причем $S \geq 0$.

Частные суммы S_{2m+1} можем представить в виде $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, отсюда

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} =$$
$$= S + 0 = S.$$

Следовательно, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Так как $S_{2n} \geq 0$, то и $S \geq 0$, а из второго представления S_{2n} при $n > 1$ имеем $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) = b < a_1$.

Отсюда $0 \leq S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq b \leq a_1$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

<u>Решение.</u> 1. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots \tag{1.28}$$

Для исследования знакоположительного ряда (1.28) воспользуемся интегральным признаком (см. теорему 1, §7). Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, следовательно, условие интегрального признака удовлетворено. Имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} \frac{3}{2} \left(M^{\frac{2}{3}} - 1 \right) = \infty,$$

так как $\lim\limits_{M\to\infty} M^{\frac{2}{3}} = \infty$.

Итак, ряд (1.28) расходится, т.е. исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем ряд на условную сходимость.

Воспользуемся признаком Лейбница. Имеем

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0.$$

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит, ряд является условно сходящимся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}-\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}+\ldots$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}+\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{3^n+1}+\ldots \tag{1.29}$$

Для исследования знакоположительного ряда (1.29) воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}}{3^n+1}:\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}\cdot(3^{n+1}+1)}{2^{n+1}\cdot(3^n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}\cdot 2\cdot 3^n\left(3+\frac{1}{3^n}\right)}{2^{n+1}\cdot 3^n\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\left(3+\frac{1}{3^n}\right)}{1+\frac{1}{3^n}}\right)=6,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$.

Следовательно, ряд (1.29) сходится, а исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Пример 4. Исследовать данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots \tag{1.30}$$

Решение. Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{2}{2}}=$$

$=1\neq 0$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, мы заключаем, что ряд (4.30) расходится. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. Исследуем его на условную сходимость. Проверим выполнение первого условия признака сходимости Лейбница

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=1\neq 0.$$

Следовательно, предложенный ряд является расходящимся.

Мы видим, что признак сходимости Лейбница является довольно широким по применимости, весьма практичным и идеально чувствительным. Условная сходимость знакочередующегося ряда является «в среднем», если можно так выразиться, более широким фактом, чем сходимость ряда с положительными членами; поэтому и распознать ее оказывается в каком-то смысле легче.

Заметим, наконец, что признак Лейбница является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости для знакочередующихся рядов с монотонно убывающими членами: если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то на основании необходимого признака сходимости из § 3 ряд

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots$$

сходиться не может.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

а) $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n^2}$;

б) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3^n} \left(\dfrac{n+1}{n} \right)^{n^2}$;

в) $a_n = (-1)^n \dfrac{5^{2n-1}}{n!}$;

г) $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n \sqrt[3]{\ln n + 8}}$;

д) $u_n = (-1)^n e^{\frac{2n}{n^2+1}}$;

е) $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n^2}$;

ж) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n^2}{\left(2^n + 1\right)}$.

Ответы

6. а) Ряд сходится условно, б) ряд сходится абсолютно, в) ряд сходится абсолютно, г) ряд сходится условно, д) ряд расходится, е) ряд сходится условно, ж) ряд сходится абсолютно.

Индивидуальные задания

Исследовать сходимость знакопеременных рядов. Если ряд сходится, то определить, сходится он абсолютно или условно**.**

5.01 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;

5.02 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} 2^n \cdot n}{2n-1}$;

5.03 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n!}$;

5.04 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$;

5.05 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$;

5.06 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$;

5.07 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$;

5.08 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

5.09 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1+3n)}{5n+1}$;

5.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{n!}$;

5.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{n^2+6}}$;

5.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2^n+n}$;

5.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+8}$;

5.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2+3^n}$;

5.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{3n^2+1}$;

5.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n+7}$;

5.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{5^{n+1}+1}$;

5.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{8n+7}}$;

5.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^4+1}$;

5.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{n+1}}{2^{n+1}+2}$;

5.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$;

5.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+4}$;

5.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n+5}{5n-4}\right)^n$;

5.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+7}$;

5.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{2n-1}}$.

Глава 2. Функциональные ряды

§1. Определение функционального ряда

Понятие функциональной зависимости является одним из важнейших в математике. Всякая функция осуществляет некоторое соответствие между объектами, составляющими область задания этой функции, и объектами, составляющими область ее значений. Так можно рассматривать числовые функции от чисел (при этом числу-аргументу ставится в соответствие число, являющееся значением функции); можно говорить о числовых функциях от систем чисел (то, что обычно называется функциями нескольких переменных); можно говорить о вектор-функциях (т. е. о функциях, значениями которых являются векторы) и т. д. Близкими к вектор-функциям являются такие функции, которые ставят в соответствие числам – ряды. Эти функции называются функциональными рядами.

Так как задание ряда состоит в задании каждого его члена, а член ряда есть число, задание функционального ряда от некоторой переменной x состоит в задании ряда функций от этой переменной, являющихся членами функционального ряда. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{2.1}$$

называется *функциональным рядом относительно переменной x.*

Если переменная x может принимать только вещественные значения, а параметры функций, являющихся членами ряда (2.1), также все вещественные, то ряд (2.1) называется *вещественным рядом.*

Если же значения переменной x, равно как и параметры функций $u_n(x)$, могут быть не только вещественными, но и комплексными, то ряд (2.1) называется *комплексным рядом.*

Придавая в выражении (2.1) переменной x некоторые значения x_0, x_1 и т. д., мы будем получать те или иные числовые ряды

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$$

$$u_1(x_1) + u_2(x_1) + \ldots + u_n(x_1) + \ldots \tag{2.2}$$

и т. д.

В зависимости от значения, принимаемого переменной x, числовой ряд (2.2) может оказаться сходящимся или расходящимся.

Определение. Совокупность всех значений переменной x, для которых ряд (2.2) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда (2.1).

Если значение x_0 переменной x принадлежит области сходимости функционального ряда, то можно говорить о сумме этого функционального ряда в точке $x = x_0$:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = S(x_0).$$

Таким образом, значение суммы функционального ряда зависит от значения x_0 переменной x, т. е. сумма функционального ряда сама является функцией переменной x. Это и отражено в обозначении $S(x_0)$. Подчеркнем, что областью задания суммы функционального ряда является область сходимости этого ряда.

Сумма функционального ряда, понимаемая как функция, в принципе ничем не отличается от функций, получаемых каким-нибудь другим путем. В частности, можно ставить и решать вопросы о ее непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т. д. Можно интересоваться также тем, какие функции можно получать в виде сумм функциональных рядов и как находить ряды, у которых суммами были бы заданные функции.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots. \tag{2.3}$$

<u>Решение.</u> Ряд (2.3) при каждом x представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $x/2$. Условие сходимости этого ряда состоит в том, чтобы $|x/2|<1$. Таким образом, область сходимости ряда (2.3) состоит из всех тех значений переменной x, для которых $|x|<2$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots \quad . \tag{2.4}$$

<u>Решение.</u> Ряд (2.4) как было установлено в § 7 главы 1, сходится при $x>1$ и расходится при $x<1$. Следовательно, область сходимости этого ряда состоит из всех значений x, для которых $x>1$, или, короче, область сходимости этого ряда описывается неравенством $x>1$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4+x^2}+\ldots+\frac{1}{n+x^2}+\ldots \quad . \tag{2.5}$$

<u>Решение.</u> Члены функционального ряда (2.5) при любом x меньше соответствующих членов ряда «обратных квадратов». Так как последний ряд сходится, должен сходиться и ряд (2.5) при любом x. Таким образом, областью сходимости ряда (2.5) является множество всех вещественных чисел.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$0!+x1!+x^2 2!+\ldots+x^n n!+\ldots$$

<u>Решение.</u> Функциональный ряд

$$0!+x1!+x^2 2!+\ldots+x^n n!+\ldots$$

при любом значении $x \neq 0$ расходится (это проверяется без труда при помощи признака Даламбера). Следовательно, область сходимости этого ряда исчерпывается числом 0.

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{3+\sin x}+\ldots+\frac{1}{n+1+\sin x}+\ldots \tag{2.6}$$

Решение. Рассмотрим ряд (2.6).

Так как $\sin x \leq 1$.члены этого ряда не меньше соответствующих членов гармонического ряда, начиная с третьего:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

который расходится. Следовательно, ряд (2.6) не сходится ни при каком значении x. Можно сказать, что область сходимости этого ряда пуста.

§2. Сходимость последовательности функций. Основные определения

Вспомним некоторые факты, касающиеся сходимости последовательности функций

Определение. Последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к функции $u(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon>0$ и любой точки x_0 из рассматриваемого отрезка

$$u(x_0)=\lim_{n\to\infty} u_n(x_0)$$

т.е. существует номер $N = N(\varepsilon, x_0)$, такой, что неравенство

$$|u(x_0)-u_n(x_0)|<\varepsilon$$

выполняется при $n>N$.

При выбранном значении $\varepsilon>0$ каждой точке отрезка $[a,b]$ соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка $[a,b]$, будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка $[a,b]$, т.е. будет общим для всех точек.

Заметим, что в этом определении n_0 находится по каждому x_0 из нашей области, т. е., вообще говоря, зависит от x_0. Несколько иной факт описывается в следующем определении.

Определение. Последовательность $\{u_n(x)\}$ *равномерно сходится* к функции $u(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что неравенство

$$|u(x) - u_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при $n>N$ для всех точек отрезка $[a,b]$.

Подчеркнем, что, в отличие от предыдущего определения, здесь утверждается существование n_0, в равной мере «обслуживающего» все значения x_0.

Пример 1. Рассмотрим последовательность

$$\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, \dots, \frac{\sin nx}{n}, \dots$$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции $f(x)=0$, т.к.

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Построим графики этой последовательности:

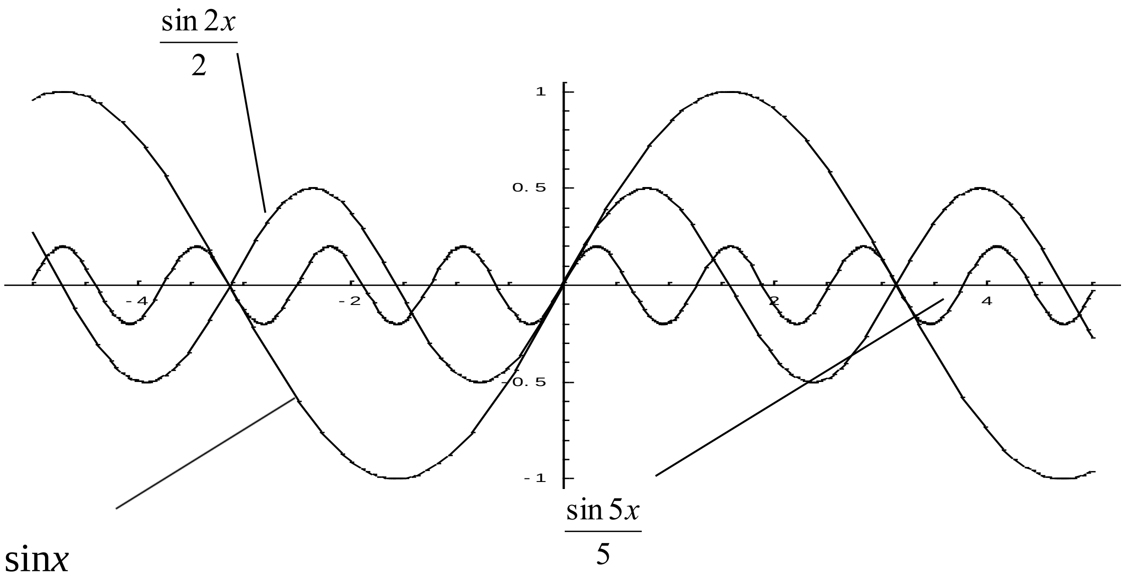

Рис. График последовательности $\frac{\sin nx}{n}$

Как видно, при увеличении числа n график последовательности приближается к оси x.

§3. Функциональные ряды. Критерий Коши

Дадим другое определение сходимости функционального ряда в точке.

Определение. *Частными (частичными) суммами* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,...$$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* в точке (x=x_0), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется *суммой* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a,b]$, если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n>N$ и любом целом $p>0$ неравенство

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке $[a,b]$.

Теорема. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса) (Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

т.е. имеет место неравенство:

$$|u_n(x)| \le a_n .$$

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *мажорируется* числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

<u>Решение.</u> Так как $|\cos nx| \le 1$ всегда, то очевидно, что

$$\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \le \frac{1}{n^3} .$$

При этом известно, что обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при α=3>1 сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

<u>Решение.</u> На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left| \frac{x^n}{n^3} \right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ расходится.

§3. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 1. (Непрерывности суммы ряда)

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма $S(x)$ есть непрерывная функция на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2. (Почленное интегрирование ряда).

Равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку $[a,b]$, сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta}u_n(x)dx;\quad \alpha,\beta\in[a,b]$$

Пример. Найти сумму ряда

$$1-x^2+x^4-x^6...+(-1)^n x^{2n}+... .$$

Решение. Функциональный ряд

$$1-x^2+x^4-x^6...+(-1)^n x^{2n}+...$$

сходится равномерно при $|x|\le\alpha<1$. И, как легко видеть он является геометрической прогрессией, сумма которой равна

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно, получаемый почленным интегрированием ряда (5.45) от 0 до $x<1$ ряд

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

также равномерно сходится при $|x|\le\alpha<1$, и его сумма равна

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_0^x=\operatorname{arctg}x.$$

Теорема 3. (Почленное дифференцирование ряда).

Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходящегося на отрезке $[a,b]$ представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной x, можно производить операцию представления какой –

либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

§4. Степенные ряды. Определение. Область сходимости.

Определение 1. ***Степенным рядом*** называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (2.7)$$

где x – независимая переменная; x_0 – фиксированное число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные коэффициенты.

Если в ряде (2.7) положить $x = a$, где a – некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-x_0)^n = a_0 + a_1(a-x_0) + a_2(a-x_0)^2 + \ldots + \\ + a_n(a-x_0)^n + \ldots \qquad (2.8)$$

Определение 2. Степенной ряд (2.7) ***называется сходящимся в точке*** a, если числовой ряд (2.8), полученный из ряда (2.7) подстановкой $x = a$, является сходящимся рядом. При этом a называется ***точкой сходимости ряда*** (2.7).

Пример 1. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n} = 1 + \frac{x+1}{5} + \frac{(x+1)^2}{5^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{5^n} + \ldots \qquad (2.9)$$

сходится в точке $x = 0$ и расходится в точке $x = 24$. Действительно, подставляя в (2.9) $x = 0$, получим числовой ряд

$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots$, который, как сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{5}$, сходится. Данный степенной ряд расходится в точке $x = 24$, так как числовой ряд

$1+5+5^2+\ldots+5^n+\ldots$ является расходящимся, в силу невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

Определение 3. Множество всех точек сходимости степенного ряда (2.7) называется ***областью сходимости ряда***.

Переходим к выяснению структуры области сходимости степенного ряда.

Если произвести замену $x-x_0=z$, то степенной ряд (2.7) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Следовательно, при изучении степенных рядов мы можем ограничиться степенными рядами вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{2.10}$$

Заметим, что любой степенной ряд (2.10) сходится в точке $x=0$, действительно, если подставить в (2.10) $x=0$, получим ряд, сумма которого равна a_0. Таким образом, точка $x=0$ входит в область сходимости любого степенного ряда (2.10).

§5. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда

Теорема 1 (Теорема Абеля. Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик). *Если степенной ряд* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $x = x_1$*, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| < |x_1|$.

<u>Доказательство.</u> По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то

$$\left|a_n x_1^n\right| \le k,$$

где k– некоторое постоянное число. Справедливо следующее неравенство:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_1^n\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le k \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Из этого неравенства видно, что при $x<x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ по условию теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum\left|a_n x^n\right|$ сходится, а значит ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2|x_1|$ с центром в точке $x = 0$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится.

Рассмотрим довольно часто встречающиеся степенные ряды (2.10), для которых, начиная с некоторого номера, все $a_n \neq 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Вопрос о сходимости таких рядов может быть решен с помощью признака Даламбера, примененного к ряду

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots, \tag{2.11}$$

составленному из модулей членов ряда (2.10). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell. \tag{2.12}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x|<\frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x|>\frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$.

<u>Доказательство.</u> Применяя признак Даламбера к ряду (2.11), имеем (при $\ell \neq +\infty$)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|}{|a_n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot\ell,$$

откуда следует, что ряд (2.11) сходится, если

$$\rho = |x|\cdot\ell < 1, \tag{2.13}$$

и расходится, если

$$\rho = |x|\cdot\ell > 1.$$

а) Допустим, что $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$. Тогда из (2.13) получаем $|x|<\frac{1}{\ell}$, т.е. $-\frac{1}{\ell}<x<\frac{1}{\ell}$. Таким образом, в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$ ряд (2.11) сходится, а следовательно, ряд (2.10) в этом интервале сходится абсолютно.

В ходе доказательства признака Даламбера для числовых рядов с положительными членами было установлено, что если $\rho > 1$, то общий член исследуемого ряда не стремится к нулю. Следовательно, для каждого фиксированного x, при котором $|x|\cdot\ell > 1$, общий член $|a_n x^n|$ ряда (2.11) не стремится к нулю. Отсюда следует, что общий член $a_n x^n$ ряда (2.10) не стремится к нулю, т.е. при $|x|>\frac{1}{\ell}$ ряд (2.10) расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

б) Если $\ell = 0$, то $|x|\cdot\ell = 0 < 1$. Тогда, по признаку Даламбера, ряд (2.11) сходится для любого x, а следовательно, ряд (2.10) сходится абсолютно также для любого x, т.е. в интервале $(-\infty;\infty)$.

в) В случае $\ell = \infty$ при $x \neq 0$ имеем $\rho = +\infty$ и ряд (2.10) расходится для любого $x \neq 0$, так как и в этом случае его общий член не стремится к нулю.

Если рассмотреть ряды, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, то вопрос о сходимости таких рядов может быть решен применением к ряду (2.11) признака Коши. Сформируем тогда без доказательства следующую теорему.

Теорема 3 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell. \qquad (2.14)$$

Тогда:
а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$.

Определение. Число R называется ***радиусом сходимости*** ряда (2.10), если при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (2.10) сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$, ряд (2.10) расходится.

Из теорем 2 и 3 следует, что в случае, когда $\ell \neq 0$ и $R \neq +\infty$, имеет место равенство $R = \frac{1}{\ell}$. Условимся считать $R = 0$ для рядов, расходящихся при всех $x \neq 0$, и $R = +\infty$ для рядов, сходящихся при любых x.

Из этого определения и теорем 2 и 3 следует

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad (2.15)$$

или

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}. \qquad (2.16)$$

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (2.10) в точках $x = +R$ и $x = -R$ решается дополнительными исследованиями.

Таким образом, для области сходимости ряда (2.10) возможны следующие случаи.

1. Ряд (2.10) сходится только при $x = 0$. Область сходимости состоит из одной точки $x = 0$, $R = 0$.

2. Ряд (2.10) не имеет точек расходимости. Область сходимости совпадает со всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, $R = +\infty$.

3. Ряд (2.10) имеет как отличные от нуля числа точки сходимости, так и точки расходимости. В зависимости от данного ряда область сходимости является одним из промежутков

$$(-R;R),\ [-R;R),\ (-R;R],[-R;R],$$

где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, или $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$.

Определение. Независимо от того, какой именно случай имеет место, интервал $(-R;R)$ называется ***интервалом сходимости ряда*** (2.10).

Следствие 1. Область сходимости ***степенного ряда либо совпадает с его интервалом сходимости, либо получается из этого интервала добавлением одной или обеих граничных точек.***

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

<u>Решение.</u> По формуле (2.15) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Данный ряд сходится только в точке $x = 0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+3} + \frac{x^2}{2^2+3^2} + \frac{x^3}{2^3+3^3} + \ldots + \frac{x^n}{2^n+3^n} + \ldots$$

<u>Решение.</u>

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n+3^n} : \frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right| =$$

$$
= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1} \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right)}{3^{n} \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n} + 1 \right)} \right| = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left| \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{2}{3} \right)^{n} + 1} \right| = 3,
$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n} = 0$.

Таким образом, $R = 3$, ряд сходится абсолютно в интервале $(-3;3)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x = 3$ получаем числовой ряд

$$
\frac{3}{2+3} + \frac{3^2}{2^2+3^2} + \frac{3^3}{2^3+3^3} + \ldots + \frac{3^n}{2^n+3^n} + \ldots
$$

Воспользуемся необходимым признаком сходимости рядов с положительными членами.

Рассмотрим

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n} = \lim \frac{3^n}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n} + 1 \right)} =
$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3} \right)^{n} + 1} = 1$, значит, ряд расходится. При $x = -3$ приходим к ряду

$-\dfrac{3}{2+3} + \dfrac{3^2}{2^2+3^2} - \dfrac{3^3}{2^3+3^3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n 3^n}{2^n+3^n} + \ldots$, который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Итак, окончательно получаем, областью сходимости будет промежуток $(-3;3)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$
\frac{x}{5} + \frac{x^2}{5^2} + \frac{x^3}{5^3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{5^n} + \ldots
$$

Решение. К этому ряду формула (2.15) неприменима, так как отсутствуют четные степени переменной x, т.е. $a_{2k} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}} : \frac{x^{2n-1}}{5^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n-1}\cdot x^2\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^n\cdot 5}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{5}.$$

Данный ряд сходится для $\frac{x^2}{5}<1$, или $x^2<5$, т.е. $|x|<\sqrt{5}$, следовательно, $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Проверим сходимость на концах интервала. При $x=\pm\sqrt{5}$ получаем ряды

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5^2}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5^3}\pm\ldots\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n}\pm\ldots,$$

т.е.

$$\sqrt{5}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots,$$

которые, очевидно, расходятся.

Следовательно, областью сходимости будет $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n = \left(\frac{1+1}{4}\right)\cdot x + \left(\frac{2+1}{4\cdot 2}\right)^2\cdot x^2 + \left(\frac{3+1}{4\cdot 3}\right)^3\cdot x^3 +$$

$$+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n+\ldots$$

Решение. По формуле (2.16) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4,$$

т.е. $R=4$, ряд сходится в интервале $(-4;4)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n \cdot 4^n}{4^n \cdot n^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который исследуем с помощью необходимого признака сходимости рядов. Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \ell \neq 0$,т.е. общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. При $x=-4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n \cdot (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(-1)^n 4^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Итак, окончательно имеем: областью сходимости будет промежуток $(-4;4)$.

Пример 5. Найти радиус сходимости ряда

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Решение. К этому ряду неприменима формула (2.15), так как отсутствуют нечетные степени переменной x, т.е. $a_{2k+1}=0$, $k=0,1,2,\ldots$ Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n+2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x^2\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n)!(2n+1)(2n+2)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

при любом x, т.е. ряд сходится на всей числовой прямой.

Замечание. Если степенной ряд имеет вид (2.7), то, как мы отмечали, подстановкой $x-x_0=z$ он приводится к степенному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad (2.17)$$

интервалом сходимости которого будет $(-R;R)$, т.е. $|z|<R$ или $|x-x_0|<R$, или $-R<x-x_o<R$,или $x_0-R<x<x_0+R$. Следовательно, интервалом сходимости ряда (2.7) будет $(x_0-R;x_0+R)$, а радиус сходимости ряда (2.17) и (2.7) совпадают.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда

$$1+\frac{(x-3)}{2^3}+\frac{(x-3)^2}{3^3}+\frac{(x-3)^3}{4^3}+\ldots+\frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}$$

<u>Решение.</u>

Здесь $x_0=3, a_n=\dfrac{1}{(n+1)^3}, a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1+1)^3}=\dfrac{1}{(n+2)^3}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3}:\frac{1}{(n+2)^3}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^3=1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-3|<1$, т.е. при $-1<x-3<1$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots, \qquad (2.18)$$

который является сходящимся как обобщенный гармонический с $\alpha=3$. При $x=2$ имеем $1-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}+\ldots$, который абсолютно сходится, т.к. сходится ряд (2.18). Следовательно, областью сходимости является отрезок $[1;3]$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Даны степенные ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3n-2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n\sqrt{n^2+1}}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{2^n}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$,

е) $1+x+\ldots+n!x^n\ldots$, ж) $x+4x^2+\ldots+(nx)^n\ldots$.

Найти область их сходимости и интервал сходимости.

Ответы

1. Область сходимости: а) $0 \le x < 2$, б) $-\infty < x < \infty$, в) $-2 \le x < 2$, г) $-4 < x < 0$, д) $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$, е) $x = 0$, ж) $x = 0$.

Индивидуальные задания

Исследовать сходимость следующих степенных рядов. Найти их области сходимости.

6.01 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+2}$; 6.02 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$; 6.03 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(n^2+1\right)^n}$;

6.04 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+5}$; 6.05 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n}{n^2+5}$; 6.06 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+8}}$;

6.07 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$; 6.08 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}\cdot 3^n}$; 6.09 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot\left(n^2+1\right)^n}{\left(3n^2+2\right)^n}$;

6.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n\cdot\sqrt{n+1}}$; 6.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot(n+1)}$; 6.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n3^n}$;

6.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{5n^2+4}\right)^n x^n$; 6.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(x+2)^n$; 6.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+9}}$

6.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+9}$; 6.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 5^n}$; 6.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{n^2+1}}$;

6.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 6.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{n^2+1}}$; 6.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$;

6.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n x^n}{4^n}$; 6.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$; 6.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n}\cdot x^n$;

6.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{2^n}$.

§6. Равномерная сходимость степенного ряда в интервале его сходимости

Теорема. Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, содержащемся в его круге сходимости.

Доказательство. Пусть

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (2.19)$$

– степенной ряд и R – его радиус сходимости. Возьмем произвольный замкнутый интервал, лежащий внутри интервала сходимости. Очевидно, можно считать, что центр меньшего интервала также находится в точке 0. (Точнее говоря, всякий меньший интервал можно охватить интервалом с центром в точке 0 и целиком содержащимся в интервале сходимости; равномерная сходимость ряда в охватывающем интервале влечет равномерную сходимость и в меньшем интервале.) Пусть R_x – его радиус. Возьмем точку x_0 лежащую в кольце между нашими двумя интервалами. Так как эта точка расположена внутри круга сходимости степенного ряда (2.19), ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится абсолютно. Но при любом x_1 из меньшего интервала $|x_1|<|x_0|$.

Поэтому

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \ldots + |a_nx^n| + \ldots$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. § 3 главы 2) ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится в меньшем круге равномерно.

Теорема 1 (о непрерывности суммы ряда). В любой замкнутой области, лежащей внутри круга сходимости ряда, сумма ряда является непрерывной функцией.

<u>Доказательство.</u> Каждая частичная сумма степенного ряда, очевидно, есть непрерывная функция. Поскольку по предыдущему в любой замкнутой области внутри круга сходимости ряда сходимость является равномерной, сумма ряда, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, на основании теоремы 1 в § 4 главы 2 сама является непрерывной функцией.

Доказанные теоремы открывают возможности почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов.

Теорема 2 (о почленном интегрировании степенного ряда). Если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то последовательность интегралов от частичных сумм ряда сходится к интегралу от суммы ряда.

Доказательство. Достаточно вспомнить, что внутри своего интервала сходимости ряд сходится равномерно, после чего сослаться на общую теорему 2 § 4 главы 2.

Теорема о почленном дифференцировании общих функциональных рядов выглядела более слабой, чем теорема об их почленном интегрировании: в теореме о дифференцировании требовалась дополнительно сходимость ряда, составленного из производных членов. Для случая степенных рядов это условие внутри интервала сходимости выполняется автоматически, о чем свидетельствует следующая теорема.

Теорема (о почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{2.20}$$

имеет радиус сходимости *R*, Тогда ряд

$$S(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots, \tag{2.21}$$

получаемый в результате почленного дифференцирования ряда (2.20), также имеет радиус сходимости *R*.

Производная суммы ряда (2.20) равна сумме ряда (2.21):

$$\frac{d}{dx} f(x) = S(x)$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что вторая часть теоремы следует из первой ее части. Действительно, раз ряд (2.21) имеет радиус сходимости *R*, согласно теореме о равномерной сходимости, он сходится равномерно в любой замкнутой области интервала сходимости ряда (2.20). Следовательно, мы можем сослаться на общую теорему 3 о почленном дифференцировании функциональных рядов.

Нам остается найти радиус сходимости ряда (2.21).

Пусть $|x_0| = \rho < R$. Возьмем произвольно $\rho < r < R$. Так как точка x_0 принадлежит интервалу сходимости ряда (2.20), числовой ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \ldots + a_n {x_0}^n + \ldots$$

сходится, и потому

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n x_0^n\right| = 0.$$

Это значит, что при любом ε >0 для достаточно больших *n*

$$\left|a_n x_0^n\right| < \varepsilon.$$

Далее, мы имеем

$$\left|na_n x_0^{n-1}\right| = \left|na_n r^n \frac{1}{r}\frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}}\right| = n\left|a_n r^n\right|\frac{1}{r}\left|\frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}}\right| < \frac{n\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$$

Следовательно, члены ряда

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots, \tag{2.22}$$

начиная с некоторого места, становятся меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{\varepsilon}{r} + \frac{2\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right| + \frac{3\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^2 + \ldots + \frac{n\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1} + \ldots \tag{2.23}$$

Применяя к последнему ряду признак сходимости Даламбера, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)\varepsilon}{r}\left|\dfrac{x_0}{r}\right|^n}{\dfrac{n\varepsilon}{r}\left|\dfrac{x_0}{r}\right|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{r} < 1.$$

Следовательно, ряд (2.23) сходится. Поэтому сходится я ряд (2.22). Значит, по теореме Абеля степенной ряд (2.22) сходится в круге радиуса *r* равномерно.

Но число *r* может быть выбрано сколь угодно близким к числу *R*. Это и означает, что радиус сходимости ряда (2.22) равен *R*.

Хотя при почленном дифференцировании степенного ряда радиус его сходимости и не уменьшается, но в пределах области сходимости получившийся ряд сходится медленнее, чем исходный.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \tag{2.24}$$

областью сходимости которого является промежуток $(-1;1)$. Интегрируя ряд (2.24) на отрезке $[0;x]$, $x\in(-1;1)$, получаем

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x dx-\int_0^x x^2\,dx+\int_0^x x^4\,dx+\ldots+(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,dx+\ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \qquad (2.25)$$

Таким образом получим разложение функции в степенной ряд в промежутке $(-1;1]$. Отсюда, например, при $x=2$ получаем

$$\operatorname{arctg} 2 = 2-\frac{2^3}{3}+\frac{2^5}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Пример 2. Дифференцируя почленно равенство (2.24), получим

$$-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=-2x+4x^3-6x^5+\ldots+(-1)^n 2nx^{2n-1}+\ldots,$$

или

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=1-2x+4x^3-6x^5+\ldots+(-1)^{n+1} nx^{2n-2}+\ldots$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Исходя из соотношения $\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$, найти сумму ряда:

а) $1-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}\ldots$; б) $1-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}\ldots$.

Задача 2. Найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots.$$

Задача 3. Найти сумму ряда

$$x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots.$$

Задача 4. Найти сумму ряда

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots.$$

Задача 5. Функция определяется равенством

$$f(x)=1+2\cdot 3x+\ldots+n3^{n-1}x^{n-1}\ldots.$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $\frac{-1}{3}\le x<\frac{1}{3}$. Вычислить $\int\limits_0^{0{,}125} f(x)$.

Ответы

1. а) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$, б) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$; 2. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; 3. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; 4. $(1+x)\ln(1+x)-x$; 5. $0{,}2$.

§7. Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

Сумма всякого сходящегося степенного ряда является некоторой функцией, определенной внутри круга сходимости этого ряда (а также, быть может, еще и в некоторых точках его границы).

В связи с этим возникают две задачи.

Во-первых, можно по заданному ряду искать ту функцию, которой равна его сумма в области сходимости ряда. Эта задача называется суммированием сходящегося ряда.

Во-вторых, можно по заданной функции искать сходящийся ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется разложением функции в ряд.

Сейчас мы займемся вопросами разложения функций в степенные ряды. В дальнейшем будут рассматриваться также разложения функций в тригонометрические ряды. Наряду со степенными рядами относительно переменной x, т. е. рядами вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2.26)$$

нам будет удобно рассматривать также ряды, степенные относительно переменной $x - x_0$, ряды вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (2.27)$$

Ясно, что подстановкой $y = x - x_0$ второй из этих рядов превращается в первый. Поэтому если круг сходимости первого ряда состоит из всех точек, для которых $|x| \le R$ то по тем же самым причинам круг сходимости второго ряда состоит из всех тех точек y, для которых $|y| \le R$ т. е. $|x - x_0| \le R$. Иными словами, на прямой, на которой изображается независимая переменная x, интервал сходимости ряда (2.27) имеет тот же радиус R, что и круг сходимости ряда (2.26), а центр его расположен в точке x_0.

Таким образом интервал сходимости ряда (2.27) получается путем сдвига интервала сходимости ряда (2.26) на x_0 вправо (очевидно, если x_0 <0, то фактически происходит сдвиг влево).

1. Коэффициенты Тейлора. Ряд Тейлора

Предположим, что функция раскладывается в степенной ряд в интервале $|x - x_0| \le R$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (2.28)$$

Найдем коэффициенты ряда (2.28), выразив их через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0. Для этого, полагая в (2.28) $x = x_0$, получим

$$f(x_0) = a_0. \qquad (2.29)$$

По теореме о дифференцируемости степенных рядов из (2.28) находим

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots \qquad (2.30)$$

Полагая в (2.30) $x = x_0$, получим

$$f'(x_0) = a_1. \qquad (2.31)$$

Дифференцируя обе части (2.30), находим

$$f''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 a_4(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots \qquad (2.32)$$

Полагая в (2.32) $x=x_0$, получим

$$f''(x_0)=2\cdot 1a_2. \qquad (2.33)$$

Продолжая дифференцировать полученный ряд и подставляя $x=x_0$, будем иметь

$$f'''(x_0)=3\cdot 2\cdot 1a_3,\ f^{IV}(x_0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4,\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x_0)=n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_n,\ldots\ldots,$$

или

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

где полагаем $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$. Из полученных формул и определим коэффициенты ряда (2.28):

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \qquad (2.34)$$

Определение 1. Числа $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ называются ***коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Подставим значения a_n из (2.34) в (2.28), получим

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (2.35)$$

Определение 2. Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (2.36)$$

называется ***рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Из приведенных выше рассуждений следует.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (2.28), то это разложение единственно и совпадает с разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора функции в точке $x_0 = 0$.

Если в (2.36) полагать $x_0 = 0$, то получим ***ряд Маклорена для функции*** $\boldsymbol{f(x)}$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \quad (2.37)$$

который является частным случаем ряда Тейлора.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка, то для нее можно составить ряд Тейлора или (при $x_0 = 0$) ряд Маклорена (2.37).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***порождающей*** для соответствующего ряда.

2. Многочлены Тейлора. Формула Тейлора

Определение 4. Частичные суммы $S_n(x)$ ряда Тейлора (2.35) обозначаются через $T_n(x)$ и называются ***многочленами Тейлора функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$:

Тогда ряд Тейлора функции $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + r_n(x) = T_n(x) + r_n(x), \quad (2.38)$$

где $r_n(x) -$ остаток ряда.

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до $n-$го порядка включительно, то для нее можно составить многочлен Тейлора степени n. Хотя в ряд Тейлора эта функция может и не разлагаться. Для таких функций можно записать равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + R_n(x), \quad (2.39)$$

где $R_n(x) -$ разность между $f(x)$ и $T_n(x)$, т.е.

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x). \qquad (2.40)$$

Определение 5. Формула (4.60) называется ***формулой Тейлора***, а $R_n(x)$ называется ***остаточным членом формулы Тейлора***.

Рассматриваются различные выражения для остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора. Мы остановимся, без доказательства, на одном из них, известным под названием ***"остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа"***. Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 все производные до $(n+1)-$го порядка включительно,то для любого из x этой окрестности имеет место

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad (2.41)$$

где $t-$некоторая промежуточная точка между x_0 и x. Тогда с учетом (4.62) формула Тейлора (4.60) примет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad (2.42)$$

Если $x_0 = 0$, то получим частный случай формулы Тейлора, ***формулу Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (2.43)$$

Пример 1. Написать формулу Маклорена для функции $f(x) = x^2 e^x$ с остаточными членом в форме Лагранжа для $n = 4$.

<u>Решение.</u> При $n = 4$ из (2.42) имеем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^4(0)}{4!}x^4 + \frac{f^5(t)}{5!}x^5.$$

Находим производные до порядка $4 + 1 = 5$ включительно:

$f'(x) = e^x x^2 + 2xe^x = \left(2x + x^2\right) \cdot e^x;$

$f'(x) = e^x x^2 + 2xe^x = \left(2x + x^2\right) \cdot e^x;$

$$f''(x)=(2+2x)\cdot e^x+\left(2x+x^2\right)\cdot e^x=\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x;$$
$$f'''(x)=(4+2x)\cdot e^x+\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x=\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x;$$
$$f^{(4)}(x)=(6+2x)\cdot e^x+\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x=\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x;$$
$$f^{(5)}(x)=(8+2x)\cdot e^x+\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x=\left(20+10x+x^2\right)\cdot e^x.$$

Для нашего случая:

$$f(0)=0\cdot e^0=0,\ f'(0)=\left(2\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=0,$$
$$f''(0)=\left(2+4\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=2,$$
$$f'''(0)=\left(6+6\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=6,$$
$$f^{(4)}(0)=\left(12+8\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=12,$$
$$f^{(5)}(t)=\left(20+10\cdot t+t^2\right)\cdot e^t.$$

Следовательно, $x^2e^x=\dfrac{2x^2}{2!}+\dfrac{6x^3}{3!}+\dfrac{12x^4}{4!}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5$,

или $x^2e^x=x^2+x^3+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5$, где $|t|<|x|$, t и x одного знака.

3. Сходимость ряда Тейлора к порождающей функции

Если рассмотреть функцию, которая имеет в точке x_0 производные любого порядка, тогда для нее можно составить ряд Тейлора (2.36). Нас интересует вопрос: всегда ли составленный ряд Тейлора (2.36) сходится к порождающей его функции? Существуют функции, ряды Тейлора которых сходятся, но не к порождающей их функции или являются даже расходящимися. Ниже приведем теоремы, которые позволяют получить положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 2. Ряд Тейлора (2.36) сходится к порождающей функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора в каждой точке окрестности стремится к нулю.

<u>Доказательство.</u> Пусть ряд (2.36) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности x_0,т.е. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, где $S_n(x)-n-$я частичная сумма ряда (2.36), которая совпадает с многочленом Тейлора $n-$й степени $T_n(x)$ для функции $f(x)$, т.е. $S_n(x)=T_n(x)$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - T_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - S_n(x)\right) =$$
$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Докажем обратное, пусть $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - R_n(x)\right) =$$
$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - 0 = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если ряд Тейлора (3.36) сходится к порождающей функции, то $R_n(x) = r_n(x)$, т.е. ***остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора***.

На основании теоремы 2 сформулируем теорему, которая дает простое достаточное условие сходимости ряда Тейлора к порождающей функции и может быть применима при разложении функции.

Теорема 3. Если все производные функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к ней, т.е. имеет место разложения.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (2.44)$$

4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Ограничимся частным случаем $x_0 = 0$, т.е. рядами Маклорена, которые чаще используются на практике.

а) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Заметим, что $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$. Тогда $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$

Следовательно, функция e^x сопоставляется ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Для доказательства сходимости данного ряда к порождающей функции e^x нужно показать, что e^x вместе со всеми своими производными ограничена в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$.

Для данного x найдем интервал $(-h;h)$, содержащий число x, и обозначим $e^h = M$. Тогда для любой производной функции имеем $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^h = M$.

Отсюда по теореме 3 сумма ряда сходится, т.е. равна порождающей его функции на всей числовой прямой:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (2.45)$$

б) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$

Найдем производные данной функции:

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, $f^{(6)}(x) = -\sin x$, $f^{(7)}(x) = -\cos x, \ldots$

Вычислим значение функции и ее производных для $x_0 = 0$; $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f'''(0) = -\cos 0 = -1$, $f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$, $f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$, $f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0, \ldots$

Таким образом получаем, если n четное, т.е. $n = 2k$, где $k = 0,1,2...$, то $f^{(n)}(0) = \pm \sin 0 = 0$.

Если n нечетное, то рассмотрим случаи:

$$n = 4k + 1,\ n = 4k + 3,\ k = 0,1,2,...$$

Для первого случая имеем

$$f^{(n)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = \cos 0 = 1.$$

Для второго случая имеем

$$f^{(n)}(0) = f^{(4k+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$$

Учитывая далее, что производные функции $\sin x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$$

Отбросив члены с нулевыми коэффициентами, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (2.46)$$

Нетрудно показать, что согласно теореме 3 $\sin x$ равен сумме этого ряда на всей числовой оси, т.к. все производные функции $\sin x$ ограничены.

в) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$

Повторяя рассуждения и выкладки, аналогичные случаю функции $\sin x$, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (2.47)$$

Учитывая далее, что производные функции $\cos x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем сходимость ряда (2.47) к порождающей его функции $f(x)$.

г) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x)}$

Для разложения функции $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд Маклорена воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \qquad (2.48)$$

которая имеет место, если $|x| < 1$.

Применим теорему об интегрируемости степенных рядов и проинтегрируем ряд (2.48) в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} = \int_0^x dx - \int_0^x x\,dx + \int_0^x x^2\,dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^n\,dx + \ldots$$

или

$$\ln(1+x)\Big|_0^x = x\Big|_0^x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^x + \frac{x^3}{3}\Big|_0^x + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

откуда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad (2.49)$$

Если $x = 3$, то получим числовой ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \ldots,$$

который является сходящимся, как гармонический. Таким образом, разложение (2.49) верно в промежутке $(-1;1]$.

д) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{arctg}\, x}$

Заменяя в (2.48) x на x^2, получим разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \qquad (2.50)$$

в промежутке $(-1;1)$. Интегрируя ряд (2.50) на отрезке $[0;x]$, $x \in (-1;1)$, получаем разложение в ряд функции

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \qquad (2.51)$$

полученный ряд сходится при $x \in (-1;1]$. Действительно, подставим в (2.51) $x = 1$ и, учитывая, что $\mathrm{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, получаем разложение

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \ldots,$$

которое является сходящимся числовым рядом и может быть использовано для приближенного вычисления π.

Замечание. При интегрировании ряда (2.50) воспользовались формулой $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x$.

е) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = (1+x)^\alpha}$,

где α – произвольное действительное число. Нетрудно показать, что функция $(1+x)^\alpha$ в интервале сходимости $(-1;1)$ представима рядом

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2.52)$$

Более того, можно показать, что при $\alpha \geq 0$ разложение (2.52) верно и в обоих концах интервала $(-1;1)$, т.е. имеет место на отрезке $[-1;1]$, а при $-1 < \alpha < 0$ – в правом конце, т.е. на полуинтервале $(-1;1]$.

Определение 6. Ряд (2.52) называется ***биноминальным рядом.***

§8. Примеры практического применения степенных рядов

1.Вычисление значений функций

Пример1. Вычислить число e, т.е. значение функции e^x при $x=1$, с точностью до 0,001 (если известно, что $e<3$).

Решение. Имеем

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Тогда

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

причем абсолютная погрешность этого приближения равна

$h=|r_n(x)|=\dfrac{e^t}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, где $|t|<|x|$. При $x=1$ получаем

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

При этом $h=\dfrac{e^t}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}=\dfrac{e^t}{(n+1)!}$, где $0<t<1$,

но так как $e^t<e^1<3$, то $h<\dfrac{3}{(n+1)!}$.

Число n определим из равенства $\dfrac{3}{(n+1)!}<0{,}001$.

Откуда $\dfrac{3}{(n+1)!}<10^{-3}$, т.е. $(n+1)!>3\cdot 10^3=3000$.

Если взять $n=5$, то $(5+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720<3000$.

Возьмем $n=6$, $(6+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040>3000$.

Следовательно,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+$$

$$+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx$$
≈ 2.718.

Пример 2. Вычислить $\cos 18^\circ$ с четырьмя верными знаками.
Решение. По формуле (2.47) §7 имеем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как угол 18° в радианах (с точностью до 10^{-5}) равен
$\frac{\pi\cdot 18^\circ}{180^\circ}\approx 0{,}31416$, то

$$\cos 18^\circ=1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot3\cdot4}-\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots$$

Для знакочередующихся рядов абсолютная погрешность при замене суммы ряда некоторой его частичной суммой не превышает модуля первого отброшенного члена. Поэтому вычисление слагаемых проводим до тех пор, пока слагаемое по модулю не станет меньше $0{,}0001$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что
$\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{(0{,}31416)^6}{720}<0{,}0001$, значит, достаточно ограничиться тремя слагаемыми

$$\cos 18^\circ\approx 1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot3\cdot4}\approx 0.901709\ .$$

2.Интегрирование функций

Пример 3. При изучении теории вероятности важную роль играет функция

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

называемая ***функцией Лапласа,*** или ***интегралом вероятностей***. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием нельзя, так как $\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ не выражается через элементарные функции.

Заменяя в разложении (2.45) x на $-\frac{x^2}{2}$, получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}+\ldots$$

Это разложение, как и разложение для e^x, имеет место на всей числовой оси, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}\right)dx=$$

$$=\int_0^x dx+\frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx+\frac{1}{2^4\cdot 2!}\int_0^x x^4dx-\frac{1}{2^6 3!}\int_0^x x^6dx+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{24}\cdot n!}\int_0^x x^{2n}dx+\ldots=x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots$$

Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots\right),$$

сходящимся на всей числовой прямой оси. Вычислить значение функции $F(x)$ очень просто, так как ряд быстро сходится.

3.Вычисление определенного интеграла

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx$

с погрешностью $h<0{,}0001$, где при $x=0$ значение подынтегральной функции принимается равным единице.

Решение. Из формулы (2.47), заменяя x на $2x^2$, получаем

$$\cos 2x^2=1-\frac{4x^4}{2!}+\frac{2^4x^8}{4!}-\frac{2^6x^{12}}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$1-\cos 2x^2=\frac{4x^4}{2!}-\frac{2^4x^8}{4!}+\frac{2^6x^{12}}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+\ldots$$

Делением обеих частей последнего равенства на x находим

$$\frac{1-\cos 2x^2}{x}=\frac{4x^3}{2!}-\frac{2^4x^7}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!}+\ldots$$

Это разложение, как и разложение для $\cos x$, имеет место на всей числовой оси, поэтому можно почленно интегрировать:

$$\int_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx=\int_0^1\frac{4x^3}{2!}dx-\int_0^1\frac{2^4x^7}{4!}dx+\ldots+$$

$$+\int_0^1(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!}dx+\ldots=\frac{4\cdot x^4}{2!\cdot 4}\Big|_0^1-\frac{2^4\cdot x^8}{4!\cdot 8}\Big|_0^1+\frac{2^6\cdot x^{12}}{6!\cdot 12}\Big|_0^1-$$

$$-\frac{2^8x^{16}}{8!\cdot 16}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{135}-\frac{1}{2520}+\ldots$$

Данный ряд является знакочередующимся, для которого остаток ряда по модулю не превосходит модуль первого члена остатка ряда. Таким образом, вычисления проводятся до тех пор, пока слагаемое по модулю не будет меньше 0,0001.

Так как $h=|r_n|=\left|-\frac{1}{2520}\right|<0{,}0001$, то достаточно взять

$$\int_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{135}\approx 0{,}1657$$

4.Интегрирование дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь применение рядов Тейлора к решению дифференциальных уравнений. Пусть заданы дифференциальное уравнение и начальные условия, определяющие частное решение. Допустим, что решение уравнения в окрестности точки, в которой заданы начальные условия, можно разложить в степенной ряд,

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Продифференцируем этот ряд с неопределенными пока коэффициентами столько раз, каков порядок уравнения.

Подставляя затем в уравнение вместо неизвестной функции и ее производных соответствующие ряды, мы получим тождество, из которого и определим неизвестные коэффициенты ряда. При этом первые коэффициенты ряда определяются из начальных условий. Если, далее, доказать, что полученный ряд сходится, то можно быть уверенным, что он выражает искомое решение.

Достаточно большое число членов ряда дает нам как угодно хорошее приближенное выражение решения в виде многочлена.

Рассмотрим указанный метод на примерах.

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - xy = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Ищем решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Дифференцируем полученный ряд дважды, получаем

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n (x - x_0)^{n-2} + \ldots$$

Подставляем в дифференциальное уравнение вместо y и y'' их разложения, получаем тождество

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n (x - x_0)^{n-2} + \ldots =$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенных x, находим $2a_2 = 0$, $3\cdot 2a_3 = a_0$, $4\cdot 3a_4 = a_1$, $5\cdot 4a_5 = a_2, \ldots,$ $n\cdot(n-1)a_n = a_{n-2}, \ldots$

Откуда $a_2 = 0$, $a_3 = \dfrac{a_0}{2\cdot 3}$, $a_4 = \dfrac{a_1}{3\cdot 4}$, $a_5 = \dfrac{a_2}{5\cdot 4}, \ldots,$ $a_n = \dfrac{a_{n-3}}{n\cdot(n-1)}, \ldots$

Для определения a_0 и a_1 воспользуемся начальными условиями: для $a_0 : y(0) = 0$, для $a_1 : y'(0) = 1$.

Тогда $a_3 = 0$, $a_4 = \dfrac{1}{3\cdot 4}$, $a_5 = \dfrac{0}{5\cdot 4}, \ldots,$ $a_6 = \dfrac{0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$, $a_7 = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$, $a_8 = \dfrac{0}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 8}$, $a_9 = \dfrac{0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$, $a_{10} = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$.

Нетрудно заметить

$$a_{3m-1} = a_{3m} = 0, \; a_{3m+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m\cdot(3m+1)}.$$

Значит

$$y = x + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m\cdot(3m+1)} + \ldots$$

С помощью признака Даламбера легко убедиться, что этот ряд является сходящимся на всей числовой прямой и, следовательно, представляет искомое решение дифференциального уравнения при всех x.

Заметим, что ***порядок уравнения*** нисколько не влияет на метод решения его при помощи рядов. Данный метод решения позволяет решить и нелинейные дифференциальные уравнения, которые не решаются в квадратурах, т.е. непосредственным интегрированием уравнения.

Пример 6. Найти решение дифференциального уравнения $y' = xy^2 + 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Это уравнение нелинейное, и поэтому подстановка вместо y его разложения в ряд

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \ldots + a_n(x-1)^n$$

привела бы к сложным уравнениям для определения коэффициентов. Поэтому обычно поступают иначе.

Продифференцируем уравнение несколько раз подряд, рассматривая y как функцию от x:

$$y'' = y^2 + 2xyy',$$

$$y''' = 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$$

$$y^{IV} = 4(y')^2 + 4yy'' + 2(y')^2 + 4xy'y'' + 2yy'' + 2xy'y'' + 2xyy''' =$$

$$= 6(y')^2 + 6yy'' + 2xyy''' + 6xy'y''.$$

Подставляя во все уравнения и во все производные $x = 1$ и учитывая начальное условие $y(1) = 0$, последовательно найдем:

$$y'(1) = 1y^2(1) + 1 = 1,\ y''(1) = y^2(1) + 2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y'(1) = 0^2 + 2\cdot 0\cdot 1 = 0,$$

$$y'''(1) = 4y(1)y'(1) + 2\cdot 1\cdot (y'(1))^2 + 2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y''(1) =$$

$$4\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 0 = 2,$$

$$y^{IV}(1) = 6\cdot (y'(1))^6 + 6\cdot y(1)\cdot y''(1) + 2\cdot 1\cdot y(1)\cdot y'''(1) =$$

$$= 6\cdot 1 + 6\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 2 = 6, \ldots\ldots$$

Следовательно, искомое решение записывается в виде ряда Тейлора в точке $x_0 = 1$ равно

$$y = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

Полученный многочлен в окрестности точки $x=1$ дает как угодно хорошее приближенное выражение решении.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Разложить $\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Задача 2. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\cos 10^{\circ}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 3. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 4. Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$. Указание. При решении этого примера полезно иметь в виду равенство: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Задача 5. Найти решение дифференциального уравнения $y''+xy'+y=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0, y'(0)=1$.

Ответы

1. $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}+\ldots$. 2. $0{,}9848$.
3. $0{,}1973$. 4. $\frac{\pi^2}{12}$. 5. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\ldots$.

Индивидуальные задания

Вычислить определенный интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд. Обеспечить абсолютную погрешность $h<0{,}001$:

7.01 $\int\limits_0^{0,1} e^{-5x^2}dx$; 7.02 $\int\limits_0^{0,1}\frac{\sin 10x^2}{x}dx$; 7.03 $\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x^2}{x^4}dx$;

7.04 $\int_0^{0,2} \frac{e^{-5x^2}-1}{x}dx$; 7.05 $\int_0^{0,9} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$; 7.06 $\int_0^{1/2} e^{-x^3}dx$;

7.07 $\int_0^{0,4} \sin 3x^2\,dx$; 7.08 $\int_0^{1/2} \cos 5x^3\,dx$; 7.09 $\int_0^{0,1} \frac{e^{-2x}-1}{x}dx$;

7.10 $\int_0^{0,6} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{6}\right)}{x}dx$; 7.11 $\int_0^{3} e^{-\frac{x^2}{90}}dx$; 7.12 $\int_0^{1/2} \sin\frac{x^2}{2}dx$;

7.13 $\int_0^{0,1} \cos 5x^2\,dx$; 7.14 $\int_0^{0,3} e^{-3x^2}dx$; 7.15 $\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}-1}{10x}dx$;

7.16 $\int_0^{1/2} e^{-\frac{x^2}{5}}dx$; 7.17 $\int_0^{0,4} \frac{1-\cos 7x^2}{x^2}dx$; 7.18 $\int_0^{0,2} \sin\frac{x^4}{4}dx$;

7.19 $\int_0^{1/2} \cos\left(\frac{x}{5}\right)^2 dx$; 7.20 $\int_0^{0,2} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$; 7.21 $\int_0^{0,1} \frac{e^{-5x^2}-1}{x^2}dx$;

7.22 $\int_0^{1/2} x^2\cos x^4\,dx$; 7.23 $\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^3}-1}{x^2}dx$; 7.24 $\int_0^{1/2} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$;

7.25 $\int_0^{1/2} \frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}dx$.

Найти первые три числа разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с заданными условиями.

8.01 $y'' = yy' - x^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8.02 $y' = x^2y^2 - 1, y(0)=1.$

8.03 $y' = e^y + xy, y(0)=0.$

8.04 $y' = 2xy, y(1)=1.$

8.05, $y' = -\frac{y}{x}, y(2)=2.$

8.06 $y' = \cos x + y^2, y(0)=1.$

8.07 $y' = e^x + y^2, y(0)=0.$

8.08 $y'' = y^2 - x^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8.09 $y'' = yy' + x^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8.10 $y' = y + y^2, y(0) = 3$.

8.11 $y' = 2e^y - xy, y(0) = 0$.

8.12 $y' = \sin x + y^2, y(0) = 1$.

8.13 $y' = e^x + y, y(0) = 4$.

8.14 $y' = x^2 + y^2, y(0) = 2$.

8.15 $y' = \sin x + 0{,}5y^2, y(0) = 1$.

8.16 $y' = 2e^y + xy, y(0) = 0$.

8.17 $y' = x + x^2 + y^2\ y(0) = 5$.

8.18 $y'' = yy' - x^2;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

8.19 $y'' + xy^2 = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

8.20 $y' = e^{2x} + y, y(1) = 1$.

8.21 $y'' - \sin x + \cos y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

8.22 $y'' + xy + e^x = 0;\ y(1) = 0,\ y'(0) = 1$.

8.23 $y'' = e^{3x} + y^2;\ y(1) = 0,\ y'(0) = 0$.

8.24 $y' = e^{2x} + y, y(1) = 1$.

8.25 $y'' = xy^2 + x^2;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

§9. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье

1. Представление функций при помощи других заданных функций

Часто при изучении функций появляется необходимость представления данной функции при помощи других функций, которые называются ***базовыми*** и свойства которых считаются известными. Пусть дана система базовых функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x), \ldots$$

Представить данную функцию $f(x)$ при помощи заданных функций означает разложить $f(x)$ в функциональный ряд

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

где коэффициенты c_i – действительные числа. Получив такое представление, можно аппроксимировать данную функцию при помощи частных сумм соответствующего функционального ряда. Выбор базовых функций определяется прежде всего задачей, которую необходимо решить и свойствами данной функции $f(x)$. Как мы видели в предыдущем параграфе, представление функции степенным рядом позволяет вычислить числовые значения функции, значения интегралов, находить решение дифференциальных уравнений.

В случае степенных рядов в качестве базовых служат функции

$$1,\ x,\ x^2,\dots,\ x^n,\dots$$

2 .Тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье

Если изучаемая функция является периодической (моделируется сложный процесс), то в качестве базовых, естественно, взяты тригонометрические функции вида

$$A\sin(kx+\alpha)=A\sin\alpha\cos kx+A\cos\alpha\sin kx=a\cos kx+b\sin kx,$$

которые представляют простые гармонические колебания. Такие задачи часто возникают в электротехнике: представить ток, изменяющийся по сложному закону $I=I(t)$, через простые синусоидальные токи $I_k\sin(\omega t+\varphi_0)$. Математическим аппаратом для исследования таких задач служат ряды, для которых базовыми являются функции

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\dots,\ \cos nx,\ \sin nx,\dots$$

Определение 1. ***Тригонометрическим рядом*** называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+$$
$$+b_n\sin nx+\ldots \qquad (2.54)$$

Числа $\frac{a_0}{2},\ a_1,\ b_1,\dots,\ a_n,\ b_n,\dots$ называются ***коэффициентами*** тригонометрического ряда (2.54).

Допустим, что функция $f(x)$ представляется на отрезке $[-\pi;\pi]$ тригонометрическим рядом

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (2.55)$$

и предположим, что этот ряд является сходящимся для любого x отрезка $[-\pi;\pi]$, следовательно, его можно почленно интегрировать. Не будем приводить вывод коэффициентов a_n и b_n, а лишь отметим, что с помощью приемов интегрирования получаем

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (2.56)$$

где $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (2.57)$$

где $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots.$

Определение 2. Числа a_n и b_n, вычисленные по формуле (2.56) и (2.57), называются ***коэффициентами Фурье*** для функции $f(x)$.

Определение 3. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

коэффициенты которого совпадают с коэффициентами Фурье для функции $f(x)$, т.е. вычисляются по формулам (2.56) и (2.57), называются ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Как и в случае ряда Тейлора, ряд Фурье не всегда сходится к порождающей функции. Для формирования условий сходимости ряда Фурье к порождающей функции введем дополнительные понятия.

Рис.108

Определение 4. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной*** на отрезке $[a;b]$, если она имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода (рис.108), на котором жирными точками обозначено значение функции в точках разрыва).

Определение 5. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-дифференцируемой*** на отрезке $[a;b]$, если ее производная является кусочно-непрерывной функцией на отрез $[a;b]$ (рис.109).

Сформируем без доказательства следующие теоремы Дирихле, которые представляют достаточные условия поточечной сходимости к порождающей функции, за исключением, быть может, точек разрыва и границ отрезка.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится во всех точках $x \in [-\pi;\pi]$, причем в точках непрерывности функции $f(x)$ его сумма равна $f(x)$, в точках разрыва функции $f(x)$ его сумма равна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, на концах отрезка его сумма равна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

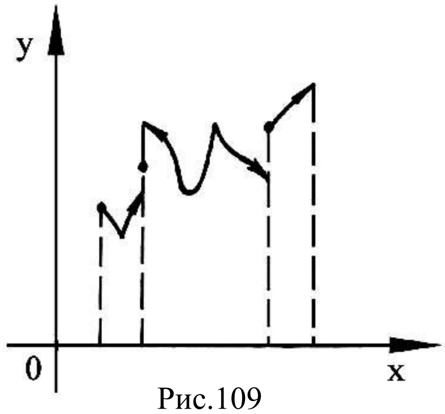

Рис.109

Определение 6.

Функция $f(x)$ называется ***кусочно – монотонной*** на отрезке $[a;b]$, если его можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из интервалов функция монотонна (рис.110).

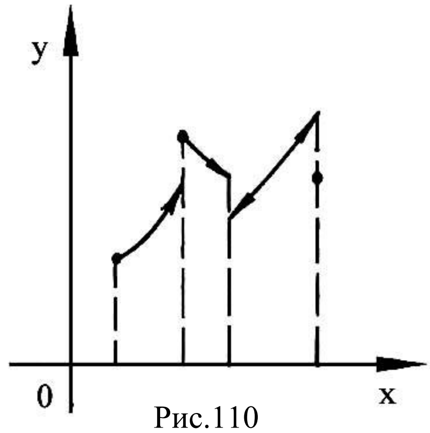

Рис.110

Теорема 2. Если функция $f(x)$ ***кусочно-монотонна*** и ограничена на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье для этой функции сходится во всех точках $x \in [-\pi;\pi]$, причем в точках непрерывности его сумма равна $f(x)$, в точках разрыва функции $f(x)$ его сумма равна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, а на концах отрезка его сумма равна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Пример 1. Разложить функцию $f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi \le x < 0,\\ \pi - x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$$ на интервале $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье.

<u>Решение.</u> Изобразим функцию графиком. Так как функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, в силу того, что ее производная

$$f'(x)=\begin{cases}0, -\pi \le x < 0,\\ -1,\ 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

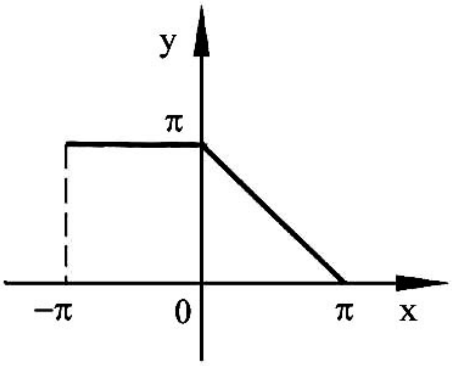

Рис.111

имеет лишь одну точку разрыва $x=0$ внутри отрезка $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к порождающей его функции во всех точках $x\in[-\pi;\pi]$. При этом значение полученного ряда в концах интервала равно

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Вычислим коэффициенты Фурье. По формуле (2.56) имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\,dx-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\,dx=x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{\pi}=\pi-(-\pi)-\left(\frac{\pi^2}{2\pi}-0\right)=$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi\cos nx\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx.$$

При вычислении интеграла $\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx$ воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b u\,dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du. \qquad (2.58)$$

Приняв $u=x$, $dv=\cos nx\,dx$, откуда $du=dx$, $v=\int\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\int\cos nx\,dnx=\frac{\sin nx}{n}$.

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\sin\pi n}{n}-\frac{0\cdot\sin 0n}{n}-\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dnx\right)=$$

$$=\frac{\cos nx}{\pi\cdot n^2}\Big|_0^{\pi}=\frac{\cos\pi n}{\pi n^2}-\frac{\cos 0}{\pi n^2}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dnx=-\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=-\left(\frac{\sin\pi n-\sin(-\pi n)}{n}\right)=-\left(\frac{\sin\pi n+\sin\pi n}{n}\right)=-\frac{2\sin\pi n}{n}=0.$$

Окончательно имеем

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=0-\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}=\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}.$$

По формуле (2.57) имеем

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx.$$

При вычислении интеграла $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$ воспользуемся формулой (2.58). Приняв $u=x$, $dv=\sin nx\,dx$, откуда $du=dx$, $v=\int\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\int\sin nx\,dnx=-\frac{\cos nx}{n}$.

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{x\cos nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=-\left(\frac{\pi\cos\pi n}{\pi n}-\frac{0\cdot\cos 0}{\pi n}\right)+\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dnx=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{\pi n^2}(\sin\pi n-\sin 0)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2}.$$

Окончательно имеем

$$b_n=\frac{\cos nx}{x}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{\cos\pi n-\cos(-\pi n)}{n}-$$

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2}=\frac{\cos\pi n-\cos\pi n}{n}+\frac{(-1)^{n+2}}{\pi n}=0+\frac{(-1)^{n+2}}{\pi n}=\frac{(-1)^{n+2}}{\pi n}.$$

Следовательно, функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n}\cos nx+\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin nx\right).$$

3. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-\ell;\ell]$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\ell;\ell]$. Тогда подстановкой $x=\frac{\ell t}{\pi}$ переходим к функции $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$. Если $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\ell;\ell]$, тогда $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$ будет кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$. Разлагая в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функцию $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, получим (всюду за исключением, быть может, точек разрыва функции и концов отрезка $[-\pi;\pi]$)

$$f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\ \text{где}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell t}{n}\right)\cos nt\,dt,\ n=0,\,1,\,2,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell t}{n}\right)\sin nt\,dt,\ n=0,\,1,\,2,\ldots,$$

Переходя к переменной x, имеем $t=\frac{\pi x}{\ell}$, $dt=\frac{\pi}{\ell}dx$ и при этом $t=-\pi$ соответствует $x=-\ell$, $t=\pi$ соответствует $x=\ell$.

Окончательно,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{\ell}x+b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x\right),\qquad(2.59)$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\cdot\frac{\pi}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\,dx,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \qquad (2.60)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\cdot\frac{\pi}{\ell}\,dx=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \qquad (2.61)$$

Таким образом, функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-\ell;\ell]$ можно разложить в ряд Фурье (2.59), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2.60), (2.61). Равенство (2.77) может нарушиться лишь в точках разрыва функции и на концах отрезка $[-\ell;\ell]$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=x$ на интервале $(-1;1)$ в ряд Фурье.

Решение. По формуле (2.59) (при $\ell=2$) имеем

$$f(x)=x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\pi nx+b_n\sin\pi nx\right).$$

Вычислим коэффициенты ряда a_n по формуле (2.60) и воспользовавшись формулой интегрирования по частям (2.58), где $U=x$, $dV=\cos\,\pi nx\,dx$, откуда $dU=dx$, $V=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx$, получим

$$a_n=\frac{1}{1}\int\limits_{-1}^{1}x\cos\pi nx\,dx=x\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{1}-\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin\pi nx}{\pi n}dx=$$

$$=\frac{\sin\pi n+\sin(-\pi n)}{\pi n}-\frac{1}{\pi^2n^2}\int\limits_{-1}^{1}\sin\pi nx\,d\pi nx=\frac{\sin\pi n-\sin\pi n}{\pi n}+$$

$$+\frac{\cos\pi nx}{\pi^2n^2}\Big|_{-1}^{1}=0+\frac{\cos\pi n-\cos(-\pi n)}{\pi^2n^2}=\frac{\cos\pi n-\cos\pi n}{\pi^2n^2}=0.$$

Вычислим коэффициенты ряда b_n по формуле (2.61) и воспользовавшись формулой интегрирования по частям (2.58), где $U=x$, $dV=\sin\,\pi nx\,dx$, откуда $dU=dx$, $V=-\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx$, получим

$$b_n=\frac{1}{1}\int\limits_{-1}^{1}x\sin\pi nx\,dx=-x\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{1}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos\pi nx}{\pi n}dx=$$

$$=-\left(\frac{\cos\pi n+\cos(-\pi n)}{\pi n}\right)+\frac{1}{\pi^2n^2}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=-\frac{\cos\pi n-\cos\pi n}{\pi n}+\frac{\sin\pi n-\sin(-\pi n)}{\pi n}=$$

$$= -\frac{2\cos\pi n}{\pi n} + \frac{\sin\pi n + \sin\pi n}{\pi^2 n^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$f(x) = x = \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin\pi n x}{n} + \ldots\right)$$

для $-1 < x < 1$.

4. Разложение в ряд Фурье периодических функций

Если данная функция $f(x)$ является периодической с периодом, $T = 2\pi$, $f(x + 2\pi k) = f(x)$ и для нее имеет место разложение в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$, то оно справедливо и на всей прямой $(-\infty;\infty)$.

Действительно, сумма тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

если она существует, является периодической функцией с периодом 2π, так как $\cos nx$ и $\sin nx$ периодические функции.

Аналогично, если функция имеет период, то разложение (2.59) имеет место для всей прямой.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, определенную следующим образом на периоде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \le 0, 2 < x \le \pi, \\ 1, 0 < x < 2, \\ 1/2, x = 0, x = 2. \end{cases}$$

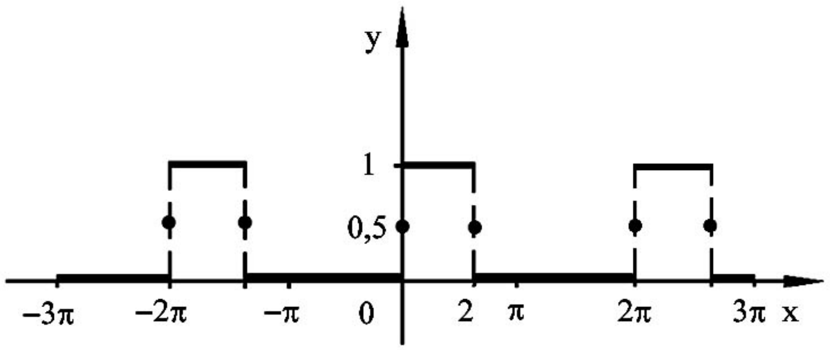

Рис.112

Решение. Данная функция кусочно-дифференцируема, следовательно,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Изобразим график функции с ее периодическим продолжением.

Применив формулы (2.56) и (2.57), найдём коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^2 dx=\frac{x}{\pi}\Big|_0^2=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_1^2 1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^2=$$

$$=\frac{\sin 2n}{\pi n}-\frac{\sin 0}{\pi n}=\frac{\sin 2n}{\pi n},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_1^2 1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{\cos 2n}{\pi n}-\frac{\cos 0}{\pi n}=\frac{1-\cos 2n}{\pi n}.$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2n}{\pi n}\cos nx+\frac{1-\cos 2n}{\pi n}\sin nx\right).$$

Оно справедливо во всех точках непрерывности функции $f(x)$.

5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,dx, \tag{2.62}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=1, 2, 3,\dots \tag{2.63}$$

Если $f(x)$ – четная на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{2.64}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{2.65}$$

Аналогичные формулы можно получить для функции $f(x)$ с периодом 2ℓ.

Если $f(x)$ – нечетная функция, ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{2.66}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{2.67}$$

Если $f(x)$ – четная функция, ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{2.68}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{2.69}$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Разложить $\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Задача 2. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 3. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 4. Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx$. Указание. При решении этого примера полезно иметь в виду равенство: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Задача 5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + xy' + y = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Ответы

1. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + \ldots$. 2. $0{,}9848$.
3. $0{,}1973$. 4. $\frac{\pi^2}{12}$. 5. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \ldots$.

Индивидуальные задания

Разложить данную функцию $\boldsymbol{f(x)}$ в ряд Фурье в интервале $(-\ell; \ell)$.

9.01 $f(x) = x + 1$ в интервале $(-\pi; \pi)$.
9.02 $f(x) = x + 2$ в интервале $(-2; 2)$.
9.03 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.
9.04 $f(x) = 1 + |x|$ в интервале $(-1; 1)$.
9.05 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.
9.06 $f(x) = |1 - x|$ в интервале $(-2; 2)$.
9.07 $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi; \pi)$.
9.08 $f(x) = x - 1$ в интервале $(-1; 1)$.
9.09 $f(x) = |x - 1|$ в интервале $(-2; 2)$.
9.10 $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.
9.11 $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \le 0; \\ x, & 0 < x < 3 \end{cases}$ в интервале $(-3; 3)$.
9.12 $f(x) = 2x$ в интервале $-1 < x < 1$.

9.13 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x \le \pi; \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ в интервале $-\pi < x < \pi$.

9.14 $f(x)=\begin{cases} 1, & -2 < x < 0; \\ 3, & 0 \le x < 2 \end{cases}$ в интервале $-2 < x < 2$.

9.15 $f(x)=\pi - 2x$ в интервале $(-\pi;\, \pi)$.

9.16 $f(x)=3x$ в интервале $-2 < x < 2$.

9.17 $f(x)=\begin{cases} 0, & -4 < x \le 0; \\ x, & 0 \le x < 4 \end{cases}$ в интервале $(-4;\, 4)$.

9.18 $f(x)=\begin{cases} x, & -1 < x \le 0; \\ 2-x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ в интервале $(-1;1)$.

9.19 $f(x)=\begin{cases} 0, & -2 < x \le 0; \\ \dfrac{x}{2}, & 0 \le x < 2 \end{cases}$ в интервале $(-2;\, 2)$.

9.20 $f(x)=10 - x$ в интервале $(-5;\, 5)$.

9.21 $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi < x \le 0; \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi;\, \pi)$.

9.22 $f(x)=-\dfrac{x}{2}$ в интервале $(-\pi;\, \pi)$.

9.23 $f(x)=4 - x$ в интервале $(-4;\, 4)$.

9.24 $f(x)=\dfrac{x}{3}$ в интервале $(-\pi;\, \pi)$.

9.25 $f(x)=x-3$ в интервале $(-3;\, 3)$.

Вопросы для самопроверки

1.Что называется числовым рядом, общим членом ряда?

2.Дайте определение сходящегося и расходящегося ряда.

3.Необходимый признак сходимости ряда. Приведите пример, показывающий, что он не является достаточным.

4.Сформулируйте теорему о сравнении двух рядов с положительными членами.

5.Докажите признак Даламбера.

6.Сформулируйте признак Коши и интегральный признак.

7.Какой ряд называется знакочередующимся? Сформулируйте и докажите признак Лейбница.

8.Дайте определение абсолютной и условной сходимости рядов.

9.Какой ряд называется степенным?

10.Сформулируйте и докажите теорему о структуре области сходимости степенных рядов.

11.Дайте определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.

12.Формулировка леммы Абеля и основных свойств степенных рядов.

13.Дайте определение ряда Тейлора функции $f(x)$ и его коэффициентов.

14.Дайте определение многочлена Тейлора. В чем его отличие от ряда Тейлора?

15.Сформулируйте и докажите теоремы о сходимости ряда Тейлора к порождающей его функции.

16.Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

17.Вычисление значений функций и определенных интегралов с помощью степенных рядов.

18.Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

19.Коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье.

20.Формулировка теорем Дирихле.

21.Разложение в ряд Фурье функций, заданных на произвольном отрезке.

22.Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.