Лекция 9 Уравнение прямой в пространстве

1. Уравнение линии в пространстве.

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким-либо уравнением.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L.

Тогда пару уравнений

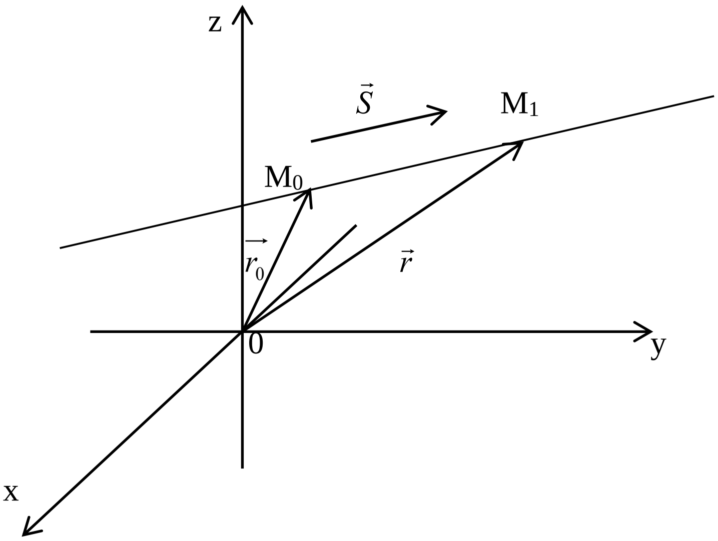
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

назовем **уравнением линии в пространстве**.

2. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$.



Обозначим радиус- векторы этих точек как $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}t$, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}t.}$

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Определение. Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\vec{S}$, которые могут быть вычислены по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Отсюда получим: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

Числа m, n, p называются **угловыми коэффициентами** прямой. Т.к. $\vec{S}$ - ненулевой вектор, то m, n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

3. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.}$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

4. Общие уравнения прямой в пространстве.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0, \text{ где}$$

$\vec{N}$ - нормаль плоскости; $\vec{r}$ - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2); $\vec{r}$ (x, y, z).

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

Пример. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату x = 0, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$, т.е. A(0, 2, 1).

Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Пример. Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

2x – 9x – 7 = 0;

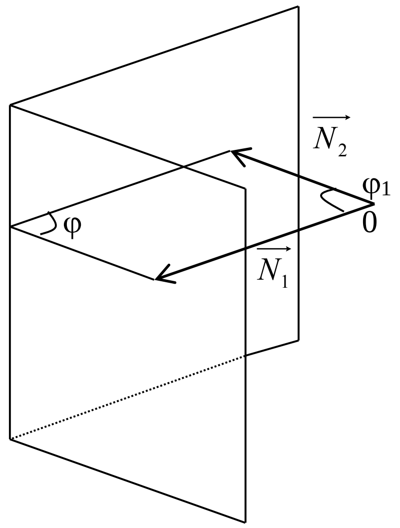
x = -1; y = 3;

Получаем: A(-1; 3; 0).

Направляющий вектор прямой: $\vec{S}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -16\\ 3 & 1 & -17\end{vmatrix}=-35\vec{i}-14\vec{j}-7\vec{k}$.

Итого: $\frac{x+1}{-35}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z}{-7}$; $\qquad \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$;

5. Взаимное расположение плоскостей



Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, т.е. $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

Определим угол φ_1. Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{cases}\overrightarrow{N_1}\cdot\vec{r}+D_1=0\\ \overrightarrow{N_2}\cdot\vec{r}+D_2=0\end{cases}, \text{ где}$$

$\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2). Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos\varphi_1=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\boxed{\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.}$$

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \,||\, \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.}$

Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1: \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2: \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2); \quad \overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\boxed{\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.}$$

Условия параллельности и перпендикулярности
прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

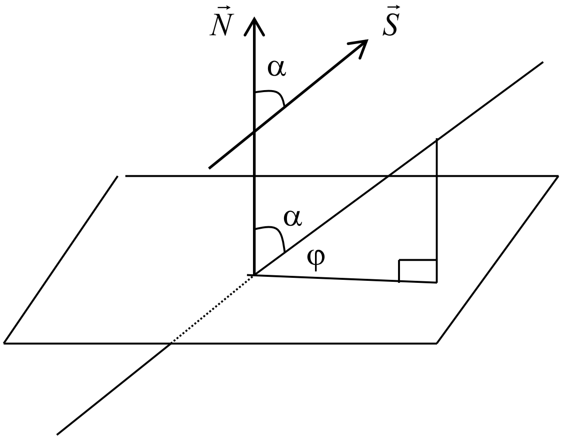
$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$\boxed{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0}$$

6. Взаимное расположение прямой и плоскости

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость задана уравнением $\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0$, а прямая - $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол $\alpha = 90^0 - \varphi$, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

$$\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

В координатной форме: $\boxed{\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$

Условия параллельности и перпендикулярности
прямой и плоскости в пространстве.

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N} \cdot \vec{S} = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\boxed{\vec{N} \times \vec{S} = 0; \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$