

Аналитическая геометрия на плоскости . Уравнение прямой

1. Общее уравнение прямой на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр t .

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $By + C = 0$ }- прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$ } – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

2. Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A .

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1} (x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

4. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т.е. $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

5. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$.

при $x = 1, y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

6. Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$
$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1, \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

7. Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ разделить на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое

называется **нормирующим множителем**, то получим

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 -$$

нормальное уравнение прямой.

Знак \pm нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu \cdot C < 0$.

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox .

Пример. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \quad \cos \varphi = 12/13; \quad \sin \varphi = -5/13; \quad p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2 .

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a = b = 1$; $ab/2 = 8$; $a = 4$; -4 .

$a = -4$ не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или $x + y - 4 = 0$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

Для самостоятельного решения: Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-3, -4)$ и параллельных осям координат.

Ответ: $\{x + 3 = 0; y + 4 = 0\}$.

8. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:



$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

10. Расстояние от точки до прямой.

Теорема. Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1 :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4.$$

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .

$$\text{Находим уравнение стороны } AB: \frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}; \quad \frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}; \quad 4x = 6y - 6;$$

$$2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C , то ее координаты

удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Для самостоятельного решения: Даны стороны треугольника $x + y - 6 = 0$,
 $3x - 5y + 15 = 0$, $5x - 3y - 14 = 0$. Составить уравнения его высот.

Указание: Сначала следует найти координаты вершин треугольника, как точек пересечения сторон, затем воспользоваться методом, рассмотренном в предыдущем примере.

Ответ: $\{ x - y = 0; 5x + 3y - 26 = 0; 3x + 5y - 26 = 0 \}$