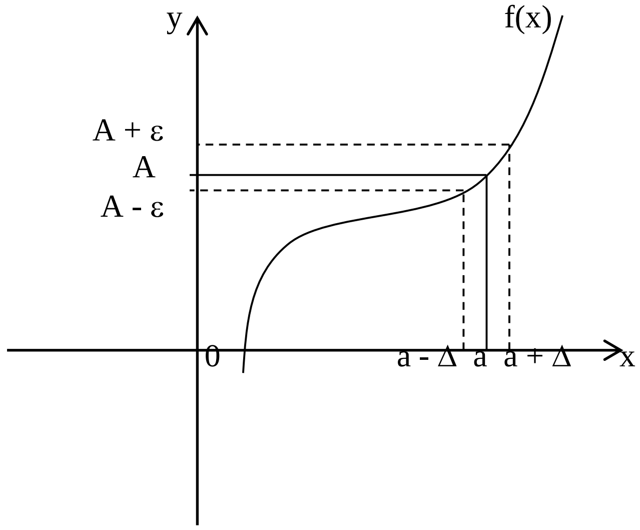
Лекция 11. Предел функции

1. Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

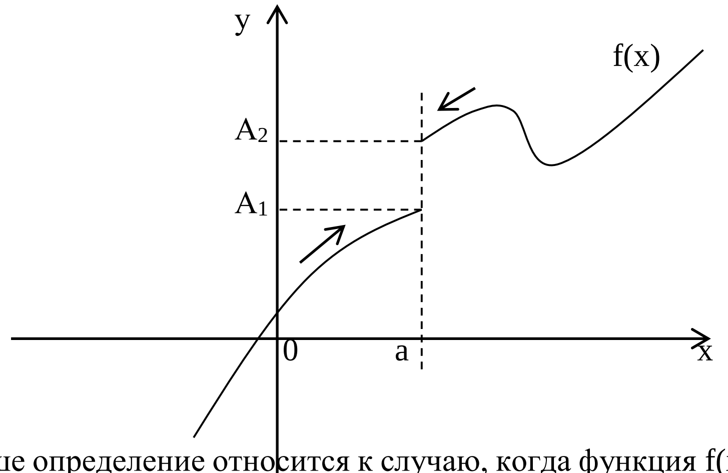
верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

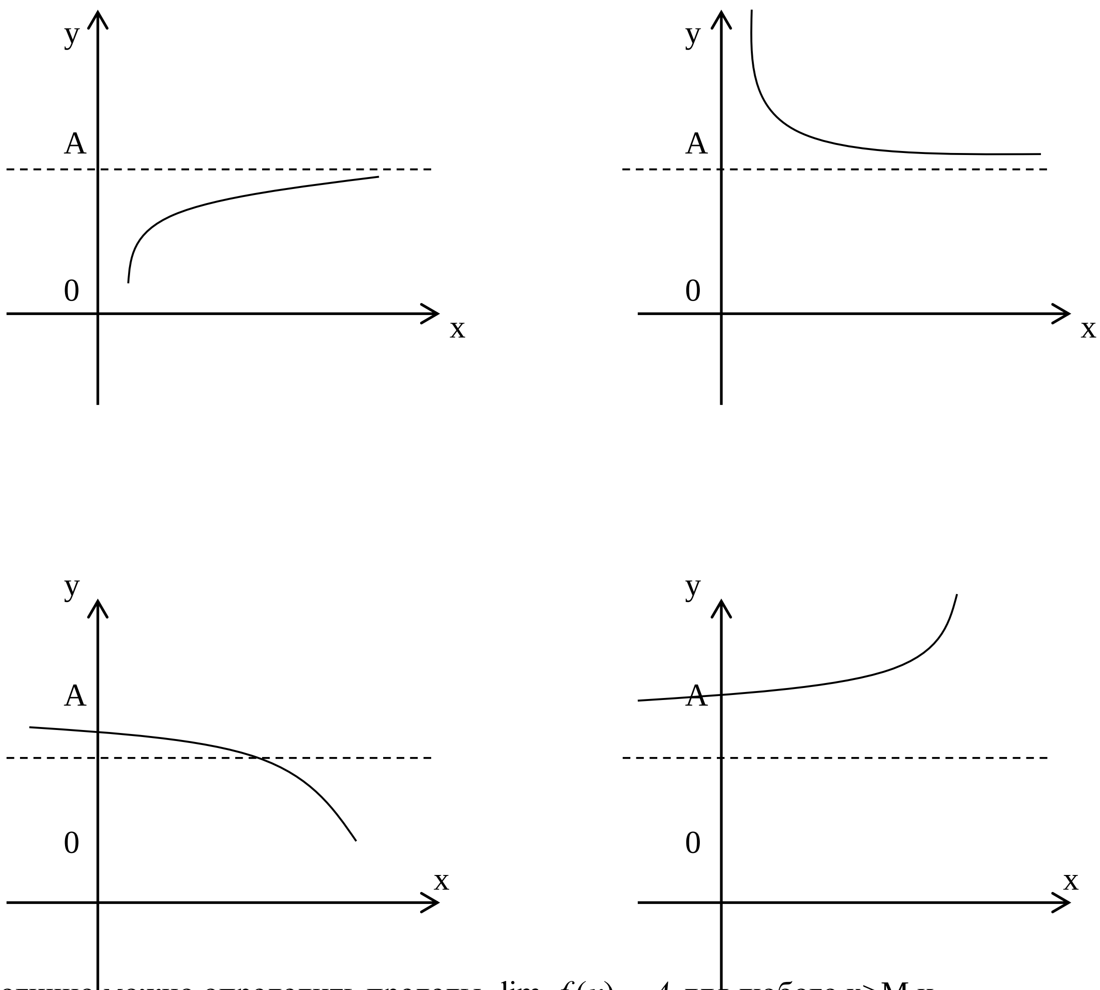
2. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.
Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A.$

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ для любого x>M и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

3. Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где С = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$
Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то A>0.*
Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, то и* $\lim\limits_{x\to a}=A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что |f(x)|<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, т.е. $|f(x)-A|<\varepsilon$, тогда

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A| \text{ или}$$

$$|f(x)|<\varepsilon+|A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)|<M, \text{ где } M=\varepsilon+|A|$$

Теорема доказана.

4. Бесконечно малые функции.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях а функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при x→0 и не является бесконечно малой при x→1, т.к. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

Теорема. *Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие*

f(x) = A + α(x),

где α(x) – бесконечно малая при x → a (α(x)→0 при x → a).

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

$A + B = const$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $A = \lim\limits_{x\to a} f(x), \quad B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$f(x)\cdot g(x) = A\cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$$

$A\cdot B = const$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} A\cdot B + 0 = A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема доказана.

5. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x\to a$, где a- число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\Delta>0$, что неравенство

$$|f(x)|>M$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

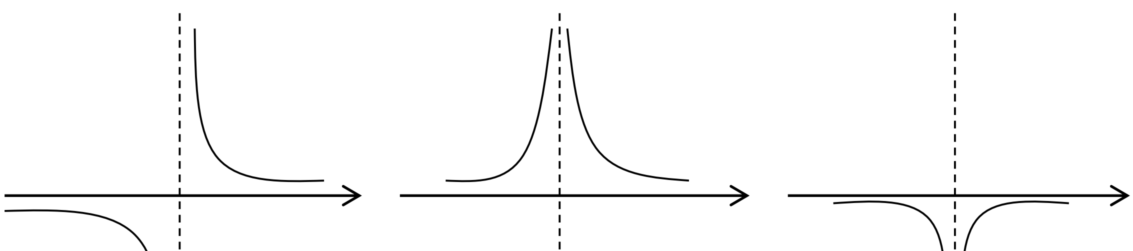
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$, то получим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x)<M$, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



a x a x a x

Определение. Функция называется **бесконечно большой** при x→a, где a – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если f(x)→0 при x→a (если x→∞) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

6. Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть α(x), β(x) и γ(x) – бесконечно малые функции при x → a. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция f(x) = x.

Определение. Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

Определение. Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают α ~ β.

Пример. Сравним бесконечно малые при x→0 функции $f(x) = x^{10}$ и f(x) = x.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{10}}{x} = \lim_{x\to a} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем f(x) = x.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x\sin x, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

Пример. Если $\alpha = x\sin\frac{1}{x}, \quad \beta = x$, то при $x\to 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha$, $\quad \left(\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\quad \left(\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\quad \left(\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1\right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Следствие: а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при $x \to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как 1 – cosx = $2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при x→0, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \infty.$

Если α и β - бесконечно малые при x→a, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то γ = α + β - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция x^2 +x – бесконечно малая при x→0, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем α = x^2, β = x, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1.$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) = $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

Q(x) = $b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots. + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m \\ \infty, & при \quad n > m \end{cases}}$

7. Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{aligned}&y=\pi/2-x\\&x=\pi/2-y\\&\pi-2x=\pi-\pi+2y\end{aligned}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{aligned}&y=x-1\\&x\to\infty\\&y\to\infty\end{aligned}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$	$x^2 - 8x + 12 = 0;$
$D = 36 - 32 = 4;$	$D = 64 - 48 = 16;$
$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$	$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$
$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$	$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Пример. Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$

$=\dfrac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$.

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$, т.к.

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2\qquad\qquad\quad} & x^2-5x+6 \\
-5x^2+11x\qquad & \\
\underline{-5x^2+5x\qquad} & \\
6x-6 & \\
\underline{6x-6} & \\
0\qquad &
\end{array}$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=$$

$$=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

Для самостоятельного решения:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x^2+5x-6}{x^3+2x^2+7x-1}=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}=2$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}=\dfrac{3}{4}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}=-\dfrac{1}{4}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=3$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}$ - не определен.