

Лекция 11

Числовая последовательность.

1. Определение числовой последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n , то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n .

$$x_n = f(n)$$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \dots$
 $\{x_n\} = \{\sin \pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \dots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

- 1) Умножение последовательности на число m : $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. mx_1, mx_2, \dots
- 2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
- 3) Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
- 4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M; M)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M , что

$$x_n \leq M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M , что

$$x_n \geq M$$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots\}$.

2. Предел числовой последовательности

Определение. Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполняется условие:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к a при $n \rightarrow \infty$.

Свойство: Если отбросить какое-либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Пример. Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при $n > N$ верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n , что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim \{x_n\} = 2$.

Теорема. Последовательность не может иметь более одного предела.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b , не равные друг другу.

$$x_n \rightarrow a; x_n \rightarrow b; \quad a \neq b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε - любое число, то $|a - b| = 0$, т.е. $a = b$. Теорема доказана.

Теорема. Если $x_n \rightarrow a$, то $|x_n| \rightarrow |a|$.

Доказательство. Из $x_n \rightarrow a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время:

$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \rightarrow |a|$. Теорема доказана.

Теорема. Если $x_n \rightarrow a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимости.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{при четном } n \\ 2 - \frac{1}{n}, & \text{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя

$$|x_n| \leq 2.$$

3. Монотонные последовательности.

Определение. 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n , то последовательность возрастающая.

2) Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n , то последовательность неубывающая.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n , то последовательность убывающая.

4) Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n , то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными**. Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Пример. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная
 $\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \frac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\} = \frac{n+1}{2n+2+1} = \frac{n+1}{2n+3}$

$$\begin{aligned} \text{Найдем знак разности: } \{x_n\} - \{x_{n+1}\} &= \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} = \frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 2n - n - 1}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N}, \text{ то знаменатель положительный при любом } n. \end{aligned}$$

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность $\{x_n\} = \frac{n}{5^n}$.

$$\begin{aligned} \text{Найдем } x_{n+1} &= \frac{n+1}{5^{n+1}}. \text{ Найдем разность } x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{5 \cdot 5^n} - \frac{n}{5^n} = \frac{n+1-5n}{5 \cdot 5^n} = \\ &= \frac{1-4n}{5 \cdot 5^n}, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N}, \text{ то } 1-4n < 0, \text{ т.е. } x_{n+1} < x_n. \text{ Последовательность монотонно убывает.} \end{aligned}$$

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Доказательство. Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n \leq M$, где M – некоторое число.

Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет четкую верхнюю грань, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N , что $x_N > a - \varepsilon$, где a – некоторая верхняя грань множества.

Т.к. $\{x_n\}$ – неубывающая последовательность, то при $N > n$ $a - \varepsilon < x_N \leq x_n$,
 $x_n > a - \varepsilon$.

Отсюда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично.

Теорема доказана.

4. Число e .

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n :

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n , и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$.

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

геометр. прогрессия

Итак, последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е.

имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что $e \leq 3$. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем

$$e \geq 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

Таким образом, число e заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e . Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,71828...

Аналогично можно показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к x до любого

действительного числа:

Предположим:

$$n \leq x \leq n+1$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$$

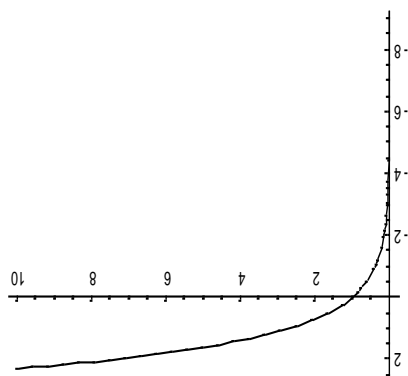
$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \cdot 1 = e$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{e}{1} = e$; $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Число e является основанием натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \text{ т.е. } e^y = x.$$



Выше представлен график функции $y = \ln x$.