НАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость

Плоскость π задается уравнением первой степени относительно x,y,z. $\pi: Ax + By + Cz + Д = 0$. Это общее уравнение плоскости. Здесь A, B, C - координаты нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ (рис.1).

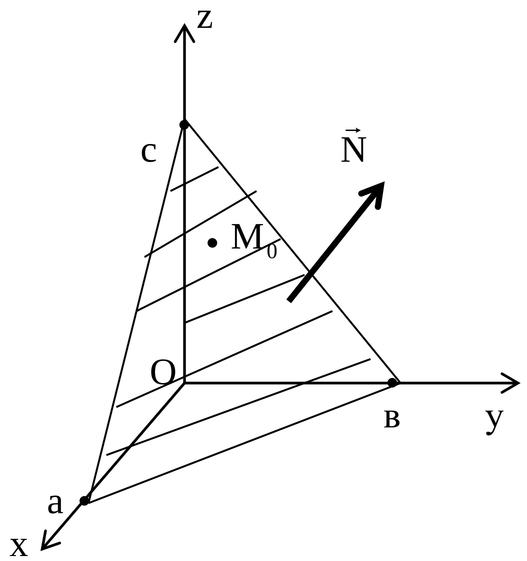

Рис. 1

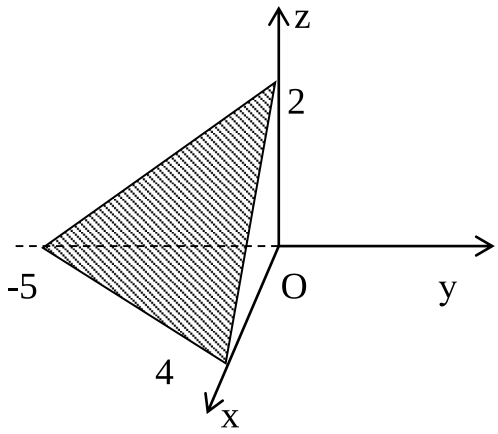

Рис. 2

Если плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнение имеет вид $\pi: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Чтобы построить плоскость, рекомендуется

ее уравнение записать в «отрезках»: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Пример 1. Построить плоскость 5x - 4y + 10z – 20 = 0 (рис. 2).

Решение. 5x – 4y + 10z= 20, $\frac{5x}{20} - \frac{4y}{20} + \frac{10z}{20} = 1$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{2} = 1$.

Итак, a = 4, b = - 5, c = 2

Известно, что если точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то они определяют единственную плоскость. Ее уравнение имеет вид

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 0, -3)$, $M_2(4, -1, 2)$, $M_3(2, -2, 1)$.

Решение. $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 4-1 & -1-0 & 2+3 \\ 2-1 & -2-0 & 1+3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix}-1 & 5\\ -2 & 4\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0, \qquad 6(x-1)-7y-5(z+3)=0.$$

$\pi: \quad 6x-7y-5z-21=0.$

Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости $\pi_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0, \quad \vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\pi_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0, \quad \vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$. Угол Θ между ними численно равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, поэтому

$$\cos\Theta=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

В частности, если $\pi_1 \| \pi_2$, то $\vec{N}_1 \| \vec{N}_2$ и $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Если же $\pi_1 \perp \pi_2$, то $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$; тогда $\cos\Theta=0$, т.е.

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0.$$

Пример 2

Найти угол между плоскостями $x+y-1 = 0$ *и* $2x-y+\sqrt{3}z+1 = 0$

Найдем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+1(-1)+0\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \frac{1}{4}, \ \varphi = arc\cos\frac{1}{4}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **до плоскости** $Ax+Bx+Cz+D=0$ находится по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Пример 3 Найти расстояние от точки $M_0(1, -2, 3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$, $M_3(2, 0, 2)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix}x-3 & y+1 & z-2\\ 4-3 & -1+1 & -1-2\\ 2-3 & 0+1 & 2-2\end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix}x-3 & y+1 & z-2\\ 1 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по первой строке:

$$(x-3)\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 0;$$

$3(x-3)+3(y+1)+(z-2) = 0; \qquad 3x+3y+z-9+3-2=0; \ 3x+3y+z-8=0.$

Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости $3x+3y+z-8=0$.

$$d = \frac{|3\cdot 1-3\cdot 2+3-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

Прямая линия в пространстве

Известно, что две плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой $\ell = \pi_1 \times \pi_2$. Поэтому уравнения прямой ℓ имеют вид

$$\ell : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + Д_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + Д_2 = 0. \end{cases}$$

Это <u>общие уравнения</u> прямой ℓ в трехмерном пространстве.

Положение прямой ℓ будет определено, если известны некоторая точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ на этой прямой и вектор $\vec{S} = (m, n, p)$, которому прямая ℓ параллельна (рис. 3). Если $M = (x, y, z)$- произвольная точка прямой ℓ, то $\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Так как $\overline{M_0 M} \| \vec{S}$, то

$$\ell : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{8}$$

Здесь $\vec{\ell} = (m, n, p)$- направляющий вектор прямой ℓ.

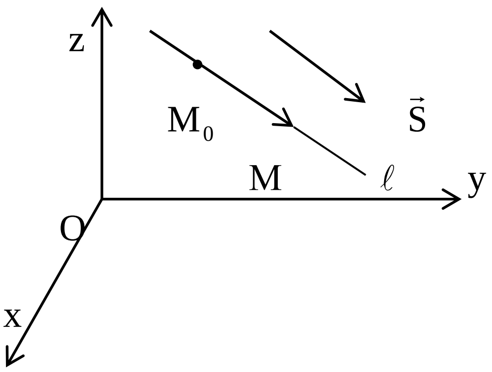

Рис. 3

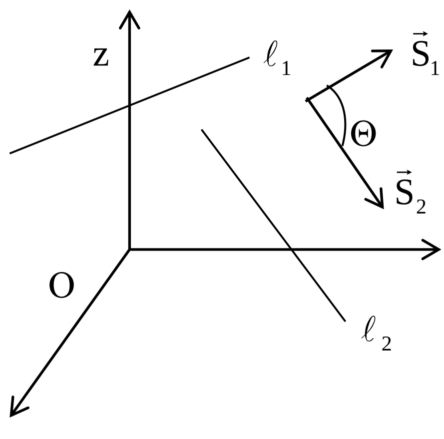

Рис. 4

Уравнеия (8) называются каноническими уравнения прямой ℓ.

Как и на плоскости, прямую ℓ в пространстве можно задать с помощью двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые она проходит:

$$\ell : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример 4. Написать уравнение прямой ℓ, которая проходит через точки $M_1(1,-3,5)$ и $M_2(0,4,-2)$.

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+3}{4+3} = \frac{z-5}{-2-5} \qquad \textit{или} \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-5}{-7}.$$

В механике часто используются <u>параметрические уравнения</u> прямой ℓ:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Пример 5. Уравнения полученной прямой записать в параметрической форме. Приравнивая каждое из отношений параметру t, получим

$$\frac{x-1}{-1}=t, \frac{y+3}{7}=t, \frac{z-5}{-7}=t.$$

Отсюда следует, что

$$x = -t + 1,\ \ y = 7t - 3,\ \ z = -7t + 5.$$

Угол между двумя прямыми ℓ_1 и ℓ_2 - это угол Θ между их направляющими векторами (рис. 4)

$$\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1) \quad и \quad \vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2).$$

Поэтому

$$cos\Theta = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Если $\ell_1 \| \ell_2$, то $\vec{S}_1 \| \vec{S}_2$, поэтому $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$ и $\cos\Theta = 0$, поэтому $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$.

Пример 6. Написать уравнения прямой ℓ, которая проходит через точку $M(1,-2,3)$ параллельно прямой ℓ_1: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-5}$.

Решение. Так как $\ell \| \ell_1$, то $\vec{S} \| \vec{S}_1$. Это значит, что в качестве направляющего вектора прямой ℓ можно взять вектор $\vec{S}_1 = (1,3,-5)$. Канонические уравнения искомой прямой имеют вид

$$\ell: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}$$

Пример 7. Написать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, лежащую на прямой. Пусть $z_0 = 0$.

$$\text{Тогда} \begin{cases} x_0 - 2y_0 = 4, \\ 3x_0 + 2y_0 = 4. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $x_0 = 2$ *и* $y_0 = -1$. Таким образом, $M_0(2,-1,0)$. Найдем направляющий вектор прямой

$$\vec{\ell} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}.$$

Запишем канонические уравнения:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8} \quad или \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

Пример 8.

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x+5y-z-2=0$.

Решение. Приведем уравнения прямой к параметрическому виду:

$\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}=t$; $\frac{x-12}{4}=t \Rightarrow x=12+4t$;

$\frac{y-9}{3}=t \Rightarrow y=9+3t$; $\frac{z-1}{1}=t \Rightarrow z=1+t$, т. е. параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t. \end{cases}$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдем t:

$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0; \quad t=-3.$

Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты

$x_0=12+4(-3)=0; \quad y_0=9+3(-3)=0; \quad z_0=1-3=-2$, т. е. $P(0,\ 0,\ -2)$.

Задачи для самостоятельного решения

Пример 1. Какой угол образуют плоскости $\pi_1: x-2y-z+4=0$, $\pi_2=3x+y-2z-7=0$?

Ответ $\cos\Theta=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$.

Пример 2.

Найти расстояние от точки $M_0(1,1,0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 0;\ 3{,}5)$, $M_2(1;\ 2;\ 5{,}5)$, $M_3(1;\ 1;\ 4{,}5)$. **Ответ** $d=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3.

Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $-2x+y-z+1=0$ и проходящей через точку $M(1;1;1)$.

Пример 4.

Написать уравнение плоскости, параллельной векторам $\overrightarrow{a_1}(2;0;1)$ и $\overrightarrow{a_2}(1;1;0)$, проходящей через точку $M(0;1;2)$.

Пример 5.

Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ и $M_3(3;0;1)$.

Пример 6.

Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;0;-3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{l}(2;-3;5)$; б) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; в) оси $0x$;