

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3} = \frac{4 + 5}{4 - 3} = 9 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right) = \frac{0 - 3 \cdot 0 + 1}{0 - 4} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{0}{9 + 3 + 1} = 0$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x-2}}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)}{6(x-1/2)(x-1/3)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2(x-1/2)(4x^2 + 2x + 1)}{6(x-1/2)(x-1/3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 2x + 1}{3(x-1/3)} = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1}{3(1/2 - 1/3)} = 6 \quad \text{где } 6x^2 - 5x + 1 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad x_1 = 1/2, x_2 = 1/3$$

Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Разделим числитель и знаменатель дроби на } x^4 \text{ (наивысшая степень)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0 \quad \left(\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{x^3} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \right)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^4}} = \frac{1 - 0}{0 - 0 + 0} = \infty$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2 - 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)((\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)}{x^2((\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - 1}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x+6} - 2)((\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)(\sqrt{x+7} + 3)}{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)((\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x+6} - 2)(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt{x+6} + 4}{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+6 - 8)}{(x+7 - 9)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = \frac{1}{2}$$

Применение 1-ого замечательного предела.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) 3 = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) 5x \left(\frac{7x}{\sin 7x} \right) 7x = \frac{5}{7}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) \frac{2x}{\cos 2x \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 \cos 2x} = \frac{2}{3 \cos 0} = \frac{2}{3}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \right) \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \right) \frac{x}{2} \frac{x}{2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{4x^2} = 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\operatorname{tg} 2\pi x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+3)^2 - 2(t+3) - 3}{\operatorname{tg} 2\pi(t+3)} =$$

Пусть $x-3=t$ при $x \rightarrow 3$ $t \rightarrow 0$ $x=t+3$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 6t + 9 - 2t - 6 - 3}{\operatorname{tg}(2\pi t + 6\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 4t}{\operatorname{tg} 2\pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+4)}{\frac{\sin 2\pi t}{\cos 2\pi t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi t}{\sin 2\pi t} \right) \frac{(t+4) \cos 2\pi t}{2\pi} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+4) \cos 2\pi t}{2\pi} = \frac{4 \cos 0}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Применение 2-ого замечательного предела.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (1^\infty)$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)+1}{x+1} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) = e \cdot 1 = e.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)+3+5}{x-3} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{x-3} \right)^{\frac{x-3}{8} \cdot (2x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{8(2x+3)}{x-3}} = e^{16}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+8} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x+8)-8+5}{2x+8} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{2x+8} \right)^{\frac{2x+8}{-3} \cdot (3x-1)} = e^{-\frac{9}{2}}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-5x+8} \right)^{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2-5x+8)+5x-8+3x+4}{x^2-5x+8} \right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x-4}{x^2-5x+8} \right)^{\frac{x^2-5x+8}{8x-4} \cdot (3x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{(8x-4)(3x+2)}{x^2-5x+8}} = e^{24}.$$

Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-3}{300x+100} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-2x-3}{3x^2+10x+3} \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-2x^2+2}}{\sqrt{x^4+2x}} \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+2x^2-3x}{6x^3+10x^2-2} \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-5}{5x^3+x^2-2}$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 12x + 12} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} \quad 10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - x - 6} \quad 13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3x^2 - x + 4} - 2} \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3} \quad 17) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 4} \right) \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x^6 + 4x^3} - \sqrt{x^6 - 4x^2} \right)$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \sin 0 = 0.1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} (\cos 0 = 1)$

2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \operatorname{tg} 0 = 0.$ 6. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a (a^0 = 1)$

3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \arcsin 0 = 0.$ 7. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0 (e^0 = 1)$

4. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \operatorname{arctg} 0 = 0.$

5. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \ln 1 = 0.$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x^2 - 2x)}{e^{\operatorname{tg} x} - 1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - x)}{e^{\sin(x-1)} - 1} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2^x - 1} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - 5^{x^2}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{x \operatorname{tg} 3x} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x - x^2}{x \operatorname{tg} 3x} \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{-x} - 1} \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x + \ln(x+1)}{e^{-x} + e^x - 2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - 2x}{2x^2 - e^x + 1} \quad 10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\ln(3x - 2)} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sqrt{x+9} - 3} \quad 12) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 - 4}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{2^{2x^2} - 3^{x^2}} \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x+1} \right)^{x+2} \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2+1} \right)^{x^2+2}$$

Нечётные в классе, четные дома

Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-3}{300x+100} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-2x-3}{3x^2+10x+3} \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-2x^2+2}}{\sqrt{x^4+2x}} \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+2x^2-3x}{6x^3+10x^2-2} \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-5}{5x^3+x^2-2}$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 12x + 12} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} \quad 10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - x - 6} \quad 13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3x^2 - x + 4} - 2} \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3} \quad 17) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 4} \right) \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x^6 + 4x^3} - \sqrt{x^6 - 4x^2} \right)$$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

- $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \sin 0 = 0.1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} (\cos 0 = 1)$
- $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \operatorname{tg} 0 = 0.$
- $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \arcsin 0 = 0.$
- $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \operatorname{arctg} 0 = 0.$
- $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0, \ln 1 = 0.$
- $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a (a^0 = 1)$
- $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \rightarrow 0 (e^0 = 1)$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x^2 - 2x)}{e^{\operatorname{tg} x} - 1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - x)}{e^{\sin(x-1)} - 1} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2^x - 1} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - 5^{x^2}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{x \operatorname{tg} 3x} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x - x^2}{x \operatorname{tg} 3x} \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{-x} - 1} \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x + \ln(x+1)}{e^{-x} + e^x - 2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - 2x}{2x^2 - e^x + 1} \quad 10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\ln(3x - 2)} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sqrt{x+9} - 3} \quad 12) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 - 4} \quad 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{2^{2x^2} - 3^{x^2}}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x+1} \right)^{x+2} \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2+1} \right)^{x^2+2}$$

Нечётные в классе, четные дома