Основные правила дифференцирования

1. Производная константы равна нулю: $(c)' = 0$.

2. Производная независимой переменной равна единице: $(x)' = 1$.

3. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в заданной точке x, то $(u+v)' = u' + v'$. $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(cu)' = c \cdot u'$.

5. Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то y – сложная функция. Тогда $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

6. Если $y = f(u)$ и $x = \varphi(y)$ - взаимно обратные функции, то $y'_x = 1/x'_y$.

Найти производные функций.

Пример. $y = 5x^3$, $y' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3^2 = 15x^2$.

Пример. $y = x^3 \cdot \sin x$, $y' = (x^3) \cdot \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cos x$.

Пример. $y = \dfrac{\sin x}{2x^3}$,

$$y' = \left(\frac{\sin x}{2x^3}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin x)' \cdot x^3 - \sin x \cdot (x^3)'}{x^6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x \cdot x^3 - \sin x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x \cos x - 3 \sin x}{2x^4}.$$

Пример. $y = \sin x^3$. Это сложная функция $y = \sin u$, $u = x^3$, $y' = (\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot (x^3)' = 3x^2 \cdot \cos x^3$.

Примеры. *Найти производные функций*

Пример 1. $y = (5+3x)^7$, $y' = 7 \cdot (5+3x)^6 \cdot (5+3x)' = 21(5+3x)^6$.

Пример 2. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 3. $y = \cos^2(x^2)$.

$$y' = 2\cos(x^2) \cdot (\cos(x^2))' = 2\cos(x^2) \cdot (-\sin(x^2))' \cdot (x^2)' = -2x \cdot \sin(2x^2).$$

Пример 4. $y=\arcsin\sqrt{x}$, $y'=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Пример 5. $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)$.

$$y'=\frac{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)'}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)'}=\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $y=3x^2\sqrt{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+9\sqrt[3]{x^2}-6x+\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$.

Указание. *Каждое слагаемое записать в виде степенной функции с дробным показателем степени.*

Ответ: $y'=7x\sqrt[3]{x}-7\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+\dfrac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$.

2. $y=\sqrt[4]{\left(3+4\sqrt[3]{2x}\right)^3}$. Ответ: $y'=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$.

3. $y=\left(8x^3-21\right)\cdot\sqrt[3]{\left(7+4x^3\right)^2}$. Ответ: $y'=\dfrac{160x^5}{\sqrt[3]{4+4x^3}}$.

4. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ответ: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

5. $y=\left(\cos^2 x+2/3\right)\cdot\sin^3 x$. Ответ: $y'=5\sin^2 x\cdot\cos^3 x$.

6. $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-2$. Ответ: $y'=\dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

7. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x^2}$. Ответ: $y'=\dfrac{-2x}{2\cdot 2x^2+x^4}$.

8. $y=\ln\dfrac{x^2-2}{\sqrt{\left(6-2x^2\right)^3}}$. Ответ: $y'=\dfrac{x^3}{\left(x^2-2\right)\left(3-x^2\right)}$.

Указание. *Целесообразно предварительно выполнить логарифмирование* $y=\ln\left(x^2-2\right)-\dfrac{3}{2}\ln\left(6-2x^2\right)$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Производная функции $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, заданной параметрически, находится по формуле $y'=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример. $\begin{cases} x=a\cos^3 t & x'_t=-3a\cos^2 t\cdot\sin t \\ y=a\sin^3 t & y'_t=3a\sin^2 t\cdot\cos t \end{cases}$, $y'_x=\dfrac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\operatorname{tg}t$.

Пример. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln\left(1-t^2\right) \end{cases}$, $x'_t=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $y'_t=\dfrac{-2t}{1-t^2}$. $y'_x=\dfrac{(-2t)\sqrt{1-t^2}}{\left(1-t^2\right)\cdot 1}=\dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$. Ответ: $y'=\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

2. $\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=\dfrac{2t}{1+t} \end{cases}$. Ответ: $y'_x=-1$.

3. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$. Ответ: $y'_x=\operatorname{tg}\dfrac{3t}{2}$.

4. $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=3t^5+5t^3+1 \end{cases}$. Ответ: $y'_x=5t^2$.