Лекция № 3-4 Тема 8.3. Случайные величины и их законы распределения.

Лекция № 3

§5. Понятие случайной величины и её закона распределения. Функция распределения и её свойства. Ряд распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Плотность распределения, её свойства. Связь функции распределения и плотности вероятности.

Пример 1. Бросают две правильные однородные монеты. Сколько из них выпадет гербом кверху?

При подбрасывании двух монет пространство элементарных событий имеет вид

$$\Omega = \{ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ\},$$

где *Ц* – цифра; *Г* – герб. Первый символ показывает, как выпала первая монета, а второй – вторая монета. Так как монеты правильные и однородные, то можно считать, что все элементарные события пространства Ω равновероятны, и тогда вероятность *p* каждого из них равна 1/4. Обозначим через X число монет, выпавших гербом кверху, и составим таблицу.

Ω	*ЦЦ*	*ЦГ*	*ГЦ*	*ГГ*
X	0	1	1	2
P	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

Так как элементарным событиям *ЦТ* и *ГЦ* соответствует одно и то же значение величины X равное 1, то можно таблицу переписать в виде

X	0	1	2
p	$1/4$	$2 \cdot 1/4$	$1/4$

Итак, каждое значение величины *X* – есть число, определяемое исходом опыта и зависящее от случая. Величина *X* называется *случайной величиной,* если в результате опыта принимает с определённой вероятностью то или иное значение, зависящее от исхода опыта.

Случайная величина называется непрерывной, если её возможные значения непрерывно заполняют какой-либо интервал или интервалы.

Например, расстояние между центром мишени и точкой попадания; множество значений $[0, \ell]$, где ℓ – максимальное отклонение точки попадания от центра мишени есть непрерывная случайная величина.

Случайная величина называется дискретной, если её возможные значения можно пронумеровать. Случайная величина в примере 1 является дискретной.

Случайная величина *X* может быть задана:

1) рядом распределения (дискретная случайная величина);

2) функцией распределения (дискретная и непрерывная случайные величины);

3) плотностью распределения (непрерывная случайная величина) .

Рядом распределения дискретной случайной величины называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $P_i = P(x = x_i)$. Вероятности P_i удовлетворяют условию $\sum_{l=1}^{n} P_i = 1$, число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

Бессодержательно говорить о вероятности появления данного конкретного значения непрерывной случайной величины. Имеет смысл рассматривать и изучать вероятности $P(\alpha \le x \le \beta)$ того, что значение непрерывной случайной величины X попадает в заданный интервал $[\alpha,\beta]$. Введём *функцию распределения* $F(x)$ случайной величины:

$$F(x) = P(-\infty \prec x \prec X) \text{ или } F(x) = P(x \prec X). \qquad (1)$$

Укажем некоторые *свойства функции распределения:*

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$;

4) $P(\alpha \le x \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Случайная величина X называется непрерывной, если её функция распределения $F(x)$ непрерывно дифференцируема, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется функция

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения и функция распределения связаны соотношением

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (2)$$

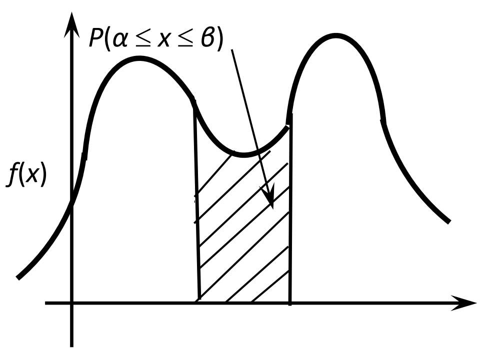
Плотность распределения обладает свойствами:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (аналогично для дискретной случайной величины $\sum\limits_{l=1}^{n} P_i = 1$);

3) $P(\alpha \le x \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (аналогично для дискретной случайной величины $P(x = x_i) = P_i$).

Геометрически свойство 3 означает, что вероятность $P(a \le x \le в)$ равна площади, заключённой между прямыми $x = \alpha, x = \beta, y = 0$ и кривой $y = f(x)$ (см. рис.).



Задача 1. Случайная величина X - абсцисса наудачу выбранной на отрезке $[0;1]$ точки. Построить функцию распределения случайной величины.

Решение. Равенство $X < x$, если $0 < x \le 1$ означает, что точка попала в интервал $[0; x]$; вероятность попасть в этот интервал равна его длине, т.е. x.

Следовательно,

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = P(0 < X < x) = x,$$

если $0 < x \le 1$. Если $x \le 0$, то $X > x$ всегда и равенство $X < x$ невозможно, т.к. $0 < X < 1$. Если $x > 1$, то $X < x$ всегда, т.к. $0 < X < 1$. Поэтому $F(x) = 0$, если $x \le 0$, и $F(x) = 1$, если $x > 1$.

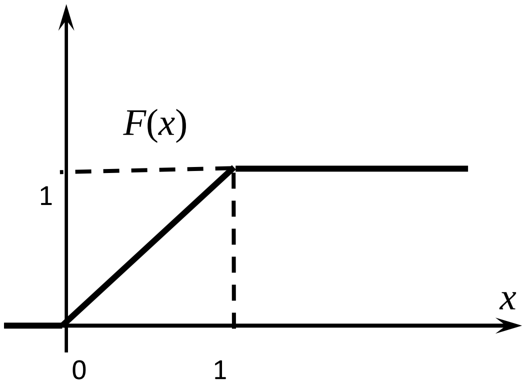


Рис. 1.7

Таким образом (рис. 1.7),

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что эта функция удовлетворяет свойствам 1-3.

Задача 2. Пусть X – число гербов в двух независимых бросаниях монеты. X может принимать значения 0, 1, 2, причём

$$P\{x = 0\} = P\{x = 2\} = \frac{1}{4}, \; P\{x = 1\} = \frac{1}{2}$$

(см. пример 1).

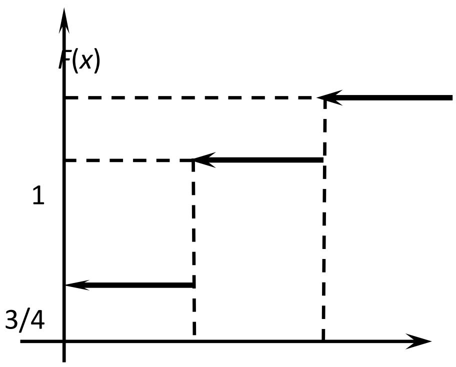
Поэтому если $x \le 0$, то $F(x) = P(-\infty < X < x) = 0$, т.к. X принимает только положительные значения: 0, 1, 2. Если $0 < x \le 1$, то

$$F(x) = P(0 < X < x) = P\{x = 0\} = \frac{1}{4},$$

т.к. на этом интервале X больше только одного значения случайной величины $X = 0$.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = P\{(x = 0) \cup (x = 1)\}$

$$= P\{x = 0\} + P\{x = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$



Т.к. если x принадлежит интервалу $[1;2]$, то x больше двух значений случайной величины: $x = 0$ и $x = 1$. Если $x > 2$, то $P\{X < x\} = 1$, т. к. если $x > 2$, то x больше всех возможных значений случайной величины:

$$x = 0, \; x = 1, \; x = 2.$$

Таким образом, функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0; \\ \dfrac{1}{4}, \text{ если } 0 < x \le 1; \\ \dfrac{3}{4}, \text{ если } 1 < x \le 2; \\ 1, \quad \text{если } x > 2. \end{cases}$$

График этой функции приведён на рис. выше

Лекция № 4

§6. Начальные и центральные моменты. Примеры.

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Начальными α_k и *центральными* μ_k моментами k-го порядка случайной величины X называются соответственно $\alpha_k = M\left(X^k\right)$; $\mu_k = M\left[\left(X-m_x\right)^k\right]$.

Начальные α_k и центральные μ_k моменты случайной величины X вычисляются по формулам $\alpha_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k P_i$; $\mu_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^k P_i$ (для дискретной случайной величины); $\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$; $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-m_x\right)^k f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины). $S_X = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ называется *коэффициентом асимметрии*, характеризует асимметричность распределения.

$E_X = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ называется *эксцессом*, характеризует крутость кривой плотности распределения.

Задача 4. Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид (закон Релея)

$$f(x) = \frac{x}{a^2}\ell^{\frac{-x^2}{2a^2}} \; (x \ge 0).$$

Определить:

а) функцию распределения;

б) математическое ожидание.

Решение.

а) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Так как $x \ge 0$, то

$$F(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{x}{a^2}\ell^{\frac{-x^2}{2a^2}}dx = \int\limits_{0}^{x}\ell^{\frac{-x^2}{2a^2}}d\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) = 1-\ell^{\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-\ell^{\frac{x^2}{2a^2}}, & x \ge 0. \end{cases}$$

б) $M_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^2}{a^2}\ell^{\frac{-x^2}{2a^2}}dx = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

При вычислении воспользовались формулой интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где $u = x,\ du = dx,\ dv = \frac{x}{a^2} \cdot \ell^{\frac{-x^2}{2a^2}} dx,\ v = -\ell^{\frac{-x^2}{2a^2}}$.

Задача 5. Случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} A\cos^2 x, \text{ при } |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, \text{ при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент A;

б) $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. а) Так как все значения случайной величены X принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx = 1,$$

то есть

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} A\cos^2 x dx = 1,$$

$$A\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = A(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{2})\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}A = 1, \quad A = \frac{2}{\pi},$$

то есть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x, \ \text{ при } |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, \ \text{ при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

б) $M_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x\cos^2 x dx = 0,$ т. к. подынтегральная функция нечётная, а её первообразная будет чётной функцией и на симметричном интервале интеграл будет равен нулю.

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x^2 \cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.$$

При вычислении воспользовались формулами:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \ \int_a^в u dv = u \cdot v\Big|_a^в - \int_a^в v du.$$

Лекция №5-6

Тема 8.4. Числовые характеристики случайных величин.

§7. Числовые характеристики (мат. ожидание дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

Математическим ожиданием, или средним значением случайной величины X, называется число

$$M(X) = \sum_{l=1}^{\infty} x_i P_i \,, \qquad (1)$$

если X – дискретная величина, принимающая значения x_i с вероятностями:

$$P_i \,(i = \overline{1, n}).$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \,, \qquad (2)$$

если X – непрерывная величина. Предполагается, что ряд (1.18) и несобственный интеграл (1.19) абсолютно сходятся; если это не так, то говорят, что математическое ожидание не существует.

Математическое ожидание является числом, характеризующим определённое свойство случайной величины, а именно - устойчивость среднего арифметического полученных в результате испытаний значений. Другими словами, математическое ожидание – это самое наивероятнейшее значение, которое может принять случайная величина.

Нам остается только рассмотреть некоторые свойства математического ожидания.

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной величины есть сама эта величина:

$$M(C)=C.$$

Доказательство. Постоянную величину C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение с вероятностью единица. Поэтому

$$M(C) = C–1=C.$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Доказательство. Рассмотрим доказательство отдельно для дискретных и непрерывных случайных величин. Для дискретной случайной величины, пользуясь (1.18), имеем

$$M(CX) = \sum_{l=1}^{\infty} C x_i P_i = C \sum_{l=1}^{\infty} x_i P_i = CM(X).$$

Для непрерывных случайных величин нужно воспользоваться формулой (1.19), которая дает

$$M(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CM(X).$$

Теорема 3. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

$$M(X+ Y+...+Z) = M(X)+ M(Y) +... +M(Z). \quad (3)$$

Теорема 4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y). \quad (4)$$

Не будем приводить здесь доказательств теорем 3 и 4. Итак, мы познакомились с одной из основных числовых характеристик случайной величины – математическим ожиданием, которое характеризует среднее значение случайной величины.

Однако знания только среднего значения случайной величины недостаточно для того, чтобы представить себе расположение значений случайной величины относительно ее среднего значения. Например, для случайной величины, принимающей значения + 1 и – 1 с вероятностью 0,5 каждое, как и для другой случайной величины, принимающей значения +100 и – 100 с теми же вероятностями, математическое ожидание одинаково и равно нулю. Между тем разброс этих величин относительно их общего математического ожидания совершенно различен.

Чтобы охарактеризовать отклонение случайной величины от ее среднего значения, т. е. охарактеризовать разброс значений этой величины, вводят другую ее числовую характеристику – *дисперсию,* или *рассеяние.*

Для характеристики разброса не удается использовать разность между случайной величиной и ее средним значением, хотя на первый взгляд это и кажется наиболее естественным. Дело в том, что сама эта разность есть также случайная величина. Если же взять ее математическое ожидание, то в силу свойств математического ожидания для любой случайной величины X имеем

$$M\,[X — M\,(X)] = M\,(X) – M\,[M\,(X)] = 0,$$

так что такая характеристика оказывается бесполезной.

Чтобы этого избежать, рассматривают не сами отклонения от среднего, а их квадраты, которые все неотрицательны, и в качестве характеристики рассеяния принимают среднее значение квадрата отклонения.

Таким образом, другой характеристикой случайной величины является дисперсия – среднее значение квадрата отклонения значений от её математического ожидания.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания.

$$D(X) = M(x - M(X))^2. \quad (5)$$

Обозначив для краткости $M(X) = \bar{x}$, можем вместо (5) написать

$$D(X) = M(X - \bar{x})^2.$$

Если случайная величина X дискретна и принимает значения x_1, x_2,..., x_i... с вероятностями p_1, p_2,.... p_i,..., то случайная величина $\left(X - \bar{x}\right)^2$ принимает значения $\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ с вероятностью p_i (i = 1,2,...). Поэтому для дискретной случайной величины формула для вычисления дисперсии имеет вид

$$D(X)=\sum_{l=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 p_i \, . \qquad (6)$$

Аналогично для непрерывной случайной величины получаем

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx. \qquad (7)$$

Часто вместо обозначения $D(X)$ применяется также обозначение $\sigma^2(X)$. Величину $\sigma=\sqrt{D(x)}$ называют *средним квадратическим отклонением или стандартом.*

Пример 2. Число очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух стрелков, подчиняется законам распределения, приведенным в таблицах.

Стрелок 1			
x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

Стрелок 2			
x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание числа очков при отдельном выстреле для каждого стрелка. Для первого стрелка имеем

$$M(X_1) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}2.$$

Для второго стрелка

$$M(X_2) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}3 = 2{,}2.$$

Таким образом, математическое ожидание числа очков для обоих стрелков одинаково. Определим теперь дисперсию случайных величин X_1 и X_2. Для первого стрелка

$$D(X_1) = (1-2{,}2)^2 \cdot 0{,}3 + (2-2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (3-2{,}2)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}76.$$

Для второго стрелка

$$D(X_2) = (1-2{,}2)^2 \cdot 0{,}1 + (2-2{,}2)^2 \cdot 0{,}6 +(3-2{,}2)^3 \cdot 0{,}3 =0{,}36.$$

Следовательно, при одинаковом среднем для числа очков, выбиваемых обоими стрелками, рассеяние результатов у первого превышает рассеяние у второго. Таким образом, у второго стрелка большая кучность, т. е. результаты его стрельбы более устойчивы.

Вообще, можно заметить, что *чем меньше дисперсия, тем лучше значения случайной величины характеризуются ее математическим ожиданием.*

Пользуясь свойствами математического ожидания, можно получить другое выражение для вычисления дисперсии, более удобное, чем (5). Для этого преобразуем выражение (5) следующим образом:

$$D(X) = M[X — M(X)]^2 = M[X^2 — 2XM(X) + (M(X)^2].$$

В силу теоремы 3 последнее выражение можно представить в виде суммы математических ожиданий. Заметим еще, что $M(X)$ есть постоянная величина и ее математическое ожидание, по теореме 1, равно ей самой. Поэтому мы получаем

$$D(X) = M(X^2) - 2M(X)M(X) + (M(X))^2,$$

или, окончательно,

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2. \qquad (8)$$

Таким образом, *дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.*

Рассмотрим теперь некоторые свойства дисперсии.

Теорема 5. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(\mathrm{C}) = 0.$$

Действительно,

$$D(C)=M(C—M(C))= M(C—C)= 0.$$

Этого следовало ожидать, ибо математическое ожидание постоянной равно ей самой и никакого рассеяния значений в этом случае не может быть.

Теорема 6. Постоянный множитель можно выносить из-под знака дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X). \tag{9}$$

Доказательство. Из формулы (1.25) следует:

$$D\,(CX) = M\,(C^2X^2) – (M\,(CX))^2 = C^2\,[M\,(X^2) — (M\,(X))^2].$$

Таким образом,

$$D(CX)=C^2D(X),$$

что и утверждалось.

Теорема 7. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y). \tag{10}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (1.25), напишем

$$D(X+ Y) = M(X+ Y)^2 – (M(X+Y))^2.$$

Раскрыв скобки в правой части и пользуясь теоремами 3 и 4 о математическом ожидании, получаем

$$D(\mathrm{Y}+Y) = M\,(X^2 + 2XY+ Y^2) – [M(X) + M(Y)]^2 =$$
$$=M(X^2)+2M(X)M(Y)^+M(Y^2)–(M(X))^2–2M(X)M(Y)–(.M(Y))^2$$

откуда

$$D(X+Y)=M(X^2)–(M(X))^2+M(Y)^2–(M(Y))^2 = D(X)+D(Y).$$

Заметим, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий, как для независимых, так и для зависимых случайных величин. Для дисперсии суммы необходимо предположить независимость слагаемых, ибо при доказательстве приходится пользоваться как теоремой о математическом ожидании суммы, так и теоремой о математическом ожидании произведения.

Теорема 8. Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X–Y)=D(X)+D(Y). \tag{11}$$

Задача 3. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, найти математическое ожидание и дисперсию, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

Решение. X – случайное число испытанных приборов, оно может принимать следующие значения:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5.$$

Вероятности $P_i = P(X = x_i)$ того, что число испытанных приборов, соответствующих данному частному значению x_i, будут равны:

$$P_1 = P(x=1) = 0{,}1; \;\; P_2 = P(x=2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1; \;\; P_3 = P(x=3) = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1;$$

$$P_4 = P(x=4) = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1; \;\; P_5 = P(x=5) = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^5 = 0{,}6591,$$

т.к. либо пятый прибор не исправен, либо все пять приборов исправны.

Таким образом, ряд распределения будет иметь вид

X	1	2	3	4	5
p	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6591

Нетрудно убедиться, что $\sum_{l=1}^{5} p_i = 1$.

Для нахождения математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ воспользуемся формулами (1.18) и (1.25). Таким образом,

$$M(X) = \sum_{l=1}^{n} p_i x_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}081 + 4 \cdot 0{,}0729 + 5 \cdot 0{,}6521 = 4{,}0951;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}09 + 3^2 \cdot 0{,}081 + 4^2 \cdot 0{,}0729 +$$

$$+ 5^2 \cdot 0{,}6521 - (4{,}0951)^2 = 1{,}9881\,.$$