ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Назначение геодезических сетей

Геодезические сети, в целях ускорения темпа научно-технического прогресса и повышения производительности труда во всех отраслях народного хозяйства, предназначаются для решения следующих научных и инженерно-технических задач.

1. Закрепление единой геоцентрической системы геодезических координат, надежно связанной с инерциальной астрономической системой координат, изучение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли, определение движения полюсов и неравномерности вращения Земли на каждую эпоху.

2. Геодезическое обеспечение картографирования обширных территорий суши, континентального шельфа, акваторий морей и Мирового океана, освоения космического пространства, наземных, морских, воздушных и космических средств определения координат и изучения природы, крупномасштабных съемок и инженерно-технических работ и изысканий.

3. Геодезическое обоснование динамики литосферы и водной оболочки Земли, прогноза геотектонических процессов глобального и регионального характера, изучения движения земной коры в пределах литосферных плит и отдельных регионов.

4. Эталонирование спутников — носителей координат и времени, наиболее точных систем наблюдения космических объектов, в том числе Луны и далеких радиоисточников.

Геодезические сети, обеспечивающие решение фундаментальных задач, строят по особой программе, добиваясь максимально возможной точности астрономо-геодезических и гравиметрических определений в массовых работах. При этом проявляется особая забота не только в выполнении всей программы измерений и строгой математической обработки их результатов, но и в обеспечении на местности сохранности пунктов такой сети на долгие годы. Только соблюдая эти условия, можно приступать к решению проблемы установления системы координат на эпоху и изучения собственных движений пунктов геодезической сети.

В последние годы геодезическую сеть относят не только к некоторой референцной, но и к геоцентрической системе. Обычная оценка взаимного положения пунктов оказывается недостаточной. Положение каждого пункта относительно начального пункта необходимо знать с высокой точностью. Начальный пункт и система координат теперь определяются относительно центра масс Земли.

Эпоха, фиксируемая геоцентрическими положениями пунктов в планетарном масштабе или в некоторой референцной системе в масштабе континента и отдельного региона, должна характеризовать геодезические сети ближайшего будущего.

Особые требования к геодезическим сетям предъявляются при картографировании и решении задач инженерно-технического характера.

§ 2. Необходимые и избыточные величины в геодезической сети

Для вычисления в геодезической сети необходимо иметь одну исходную сторону, определяющую масштаб и ориентировку, и один пункт с исходными координатами.

Геодезическая сеть, имеющая только необходимые исходные данные, называется свободной сетью.

Геодезическая сеть, имеющая исходные данные сверх необходимых, называется несвободной.

Геодезические сети, как правило, включают несколько исходных базисов и азимутов. Сплошные сети, опирающиеся на пункты высшего класса точности, имеют большое число исходных пунктов.

Необходимыми параметрами в геодезической сети называются такие независимые между собой величины, задаваясь которыми, можно однозначно определить любые элементы сети. Такими величинами могут быть координаты пунктов.

Если в свободной сети триангуляции в каждом треугольнике для засечки определенного пункта заданы два угла, можно вычислить координаты всех определяемых пунктов.

В геодезической сети, содержащей только необходимые величины, не возникает никаких условий. Если имеется хотя бы одна величина, которую можно предвычислить как функцию необходимых величин, то такая величина будет избыточной и ее не включают в состав необходимых параметров. Каждая избыточно заданная величина, вычисленная из ряда комбинаций необходимых величин, может иметь несколько значений. Вследствие неизбежных погрешностей измерений между найденными значениями каждой искомой величины будут расхождения. Отсюда возникает задача отыскания поправок v к результатам измерения L', после исправления которых этими поправками любой искомый элемент в геодезической сети, вычисленный различными путями, будет иметь одно и то же значение.

Таким образом, при наличии избыточных измерений в геодезических сетях из-за неизбежных погрешностей в измерениях всегда возникает задача уравнивания.

Конечно, если нет избыточных данных, то трудоемкая задача уравнивания не возникает. Это обстоятельство дает повод для сомнений в целесообразности использования избыточных измерений. Например, в триангуляции, если прецизионными угломерными приборами весьма точно измерять углы и после контрольных вычислений отбросить избыточно измеренные углы, то простыми вычислениями можно будет однозначно определить координаты всех пунктов и тогда отпадут уравнительные вычисления. Или распределив невязки в фигурах и вычислив приближенные значения углов, можно отбросить избыточно заданные углы.

Однако эффект уравнивания, имеющего теоретическое обоснование, существен и поэтому прибегают к уравнительным вычислениям.

§ 3. Принципы уравнивания

1. Методические аспекты

Ограниченная возможность механических и электромеханических средств вычислений не всегда позволяет реализовать строгие методы математической обработки геодезических измерений. В целях сокращения объема вычислений приходится применять нестрогие методы. При этом, исследуя нестрогие методы на моделях или сравнивая их со строгими, обосновывают целесообразность их применения для решения той или иной частной задачи. Такой традиционный подход к выбору метода вычислений оказывается непригодным для ЭВМ, так как надо указать такой метод, который был бы практически строгим для всех частных задач данного класса.

Все возрастающие требования практики к точности астрономо-геодезических данных, применение прецизионных геодезических приборов и ЭВМ, постоянное совершенствование технологии производства стимулируют разработку строгой теории обработки измерений. Реализация же строгих теорий обратно воздействует, форсируя совершенствование технологии производства, применение оптимальных программ геодезических измерений и внедрение все более высокоточных приборов и измерительной аппаратуры.

В современной геодезии применяются разнообразные средства и способы геодезического изучения объекта. Как правило, часть измерений содержит систематические погрешности из-за неполного учета внешних условий и свойств объекта, из-за несовершенства геодезических приборов и программ геодезических измерений. При этом хотя природа многих источников систематических погрешностей известна, но в количественном отношении они еще не изучены.

В результате уравнивания по методу наименьших квадратов будет получена математическая модель, максимально правдоподобная реальному объекту в том случае, если результаты измеренных величин не содержат систематических погрешностей, а случайные погрешности измерений имеют нормальное распределение.

При наличии значительных систематических погрешностей в результатах измерений обычное применение метода наименьших квадратов, несмотря на его замечательные свойства, может оказаться неэффективным. Поэтому следует принимать все меры, чтобы ослаблять влияние систематических погрешностей, применяя соответствующие схемы геодезических построений, методику измерений и строгие математические теории обработки.

Так как не удается полностью исключить из измерений систематические погрешности, строгое уравнивание является важной научно-технической проблемой. Она включает разработку рекомендаций по технологии измерений, соответствующей условиям работ, математический анализ измерений с целью изучения характера систематических и случайных погрешностей.

Строгое применение принципа наименьших квадратов предполагает исключение систематической части погрешности в измерениях самой процедурой уравнительных вычислений. При этом последовательное количественное изучение каждого класса систематических погрешностей позволяет найти слабые места в технологии работ и совершенствовать ее так, что предельные погрешности измерений, вызываемые каждым источником, были малы и примерно равны по величине. В этом случае, согласно центральной предельной теореме А. М. Ляпунова, суммарная погрешность измерений, представленная множеством малых погрешностей равного влияния, по распределению мало отличается от нормального и составляет ряд независимых случайных величин.

Пусть величины L_i' независимы, нормальны и $L' \in N\left(\overset{0}{L}_i, \dfrac{\sigma}{\sqrt{p_i}}\right)$, так что $L_i = L_i' + v_i$, p_i — веса $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\overset{0}{L}_i = M(L_i')$.

При оптимизации обработки результатов измерений стремятся получить максимум плотности вероятности появления совокупности L_i'. Такой принцип получил название принципа наибольшего правдоподобия.

Плотность вероятности совместного появления $f(L')$ равна произведению плотностей вероятностей $f(L_i')$ появления отдельных результатов измерений

$$f(L') = \prod_{i=1}^{n} f(L_i').$$

Плотность вероятности $f(L')$ носит название функции правдоподобия Фишера.

Как известно, плотность нормального распределения вероятностей

$$f(L_i') = \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{p_i(L_i' - \overset{0}{L}_i)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Отсюда

$$f(L') = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}{\sqrt{(2\pi)^n}\, \sigma^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i (L'_i - \overset{0}{L}_i)^2\right].$$

По принципу максимального правдоподобия требуется найти такие оценки L_i для математического ожидания $\overset{0}{L}_i$ и μ для стандарта σ, чтобы функция правдоподобия $f(L')$ имела бы максимальное значение.

Логарифмируя функцию правдоподобия $f(L')$ находим, что она достигает максимума при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (L'_i - \overset{0}{L}_i)^2 = \min.$$

Заменяя математическое ожидание $\overset{0}{L}_i$ его искомой оценкой L_i и обозначая разность $L_i - L'_i$ через поправку v, получаем математическую формулировку принципа наименьших квадратов $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \min$ для независимых аргументов в классической постановке.

Таким образом, в случае нормального распределения результатов измерений, уравнивая по принципу наименьших квадратов, получаем математическую модель, наиболее правдоподобную реальному объекту.

Уравнивание по методу наименьших квадратов позволяет согласовать значения измеренных величин со всеми элементами геодезической сети, т. е. выполнить математические условия, возникающие между всеми измеренными величинами, а также удовлетворить уравнения, связывающие измеренные величины со всеми параметрами сети. Кроме того, прправки к измеренным величинам, удовлетворяющие условию $[pv^2] = \min$, будут найдены так, что уравненные элементы сети будут иметь лучшую оценку.

2. Определения

Пусть искомые параметры $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и измеренные (уравниваемые) величины $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ связаны уравнением

$$\Phi(X, L) = 0. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) назовем фундаментальным уравнением.

В частном случае, уравнение (3.1) в форме

$$\Phi(X, L) = f(X) - L = 0$$

назовем фундаментальным параметрическим уравнением. Уравнение

$$\Phi(L) = 0$$

— фундаментальным условным уравнением.

Если известны счислимые значения X^0 и результаты измерений L' с весом $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, то в уравнительных вычислениях нахождение искомых величин $x_j = x_j^0 + \delta x_j$ $(j = 1, 2, \ldots k)$ и $L_i = L_i' + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих фундаментальному уравнению, сводится к решению системы линейных уравнений (3.1) в форме

$$\Phi = \Phi^0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)_0 \delta X + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial L}\right)_0 V \tag{3.2}$$

под условием $V'pV = \min$.

Эта задача и составляет основное содержание уравнительных вычислений.

Система (3.2) представляет фундаментальное уравнение в линейной форме. В этом уравнении:

Φ^0 — столбец свободных членов $W\,(m \times 1)$ с элементами $W_s = \Phi_s(X^0, L')$, $s = 1, 2, \ldots, m$;

$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)_0$ — матрица B $(m \times k)$ с элементами $b_{sj} = \left(\frac{\partial\Phi_s}{\partial x_j}\right)_0$;

$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial L}\right)_0$ — матрица A $(m \times n)$ с элементами $a_{si} = \left(\frac{\partial\Phi_s}{\partial L_i}\right)_0$; δX и V — столбцы из поправок δx_j и v_i к счислимым значениям X^0 и результатам измерений L_i'.

Представив уравнение (3.2) в матричных символах

$$AV + B\delta X + W = 0, \tag{3.3}$$

построим для нее функцию Лагранжа

$$F = V'pV - K'(AV + B\delta X + W), \tag{3.4}$$

где $V'pV = [pv^2]$, $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — диагональная матрица весов, $K' = [k_1 k_2 \ldots k_m]$ — коррелаты. Поиск минимума (3.4) сведется к решению уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial V} &= pV - A'K = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \delta X} &= B'K = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

следующих из теории нахождения экстремума функции F и ее производной в матричной форме.

Пользуясь формулами (3.3) и (3.5), получаем уравнения относительно искомых величин δX, V и K:

$$V = qA'K; \tag{3.6}$$

$$AqA'K + B\delta X + W = 0; \tag{3.7}$$

$$B'K = 0;$$

$$q = p^{-1} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}. \tag{3.8}$$

Из уравнений (3.7) и (3.8) следует

$$K = -(AqA')^{-1}(B\delta X + W); \tag{3.9}$$

$$B'(AqA')^{-1}B\delta X + B'(AqA')^{-1}W = 0. \tag{3.10}$$

В частном случае, если $A = -E$, то в уравнениях (3.9) и (3.10) обратная матрица $(AqA')^{-1} = p$. Следовательно,

$$K = -p(B\delta X + W); \tag{3.11}$$

$$B'pB\delta X + B'pW = 0. \tag{3.12}$$

Подставив значения коррелат (3.11) в уравнение (3.6), находим

$$V = B\delta X + W. \tag{3.13}$$

Это же уравнение следует из (3.3) при условии $A = -E$.

Уравнение (3.13) представляет систему параметрических уравнений поправок, а (3.12) — нормальные уравнения, соответствующие условию $V'pV = \min$.

Из условия $V'pV = \min$ и формулы (3.13) следует, что искомая функция, выраженная через δX, есть

$$F = V'p(B\delta X + W).$$

На основании теории отыскания экстремума функции F и нахождения ее производной в матричной форме имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \delta X} = (V'pB)' = 0$$

или

$$B'pV = 0, \tag{3.14}$$

т. е. сумма произведений поправок на соответствующие коэффициенты уравнений поправок (3.13) и веса измерений равна нулю. Это утверждение выражает лемму Гаусса.

Уравнение (3.14) можно интерпретировать следующим образом: вектор V с составляющими $p_i v_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) ортогонален каждому вектору $\boldsymbol{B}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$) с составляющими b_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$), представленными столбцами матрицы из уравнений поправок (3.13).

Нетрудно заметить, что условие (3.14) следует и из прежних выводов (3.12) и (3.13). Кроме того, пользуясь уравнениями (3.13) и (3.14), можно получить нормальные уравнения (3.12).

Если в исходных уравнениях (3.1) известны X и отыскиваются только L, то уравнение (3.3) вырождается в условные уравнения поправок

$$AV + W = 0. \tag{3.15}$$

Приняв в уравнениях (3.7) и (3.9) $\delta X = 0$, получим

$$V = qA'K, \tag{3.16}$$

$$AqA'K + W = 0, \tag{3.17}$$

$$K = -(AqA')^{-1}W. \tag{3.18}$$

Из уравнений (3.16) и (3.18) имеем

$$V = -qA'(AqA')^{-1}W. \quad (3.19)$$

Таким образом, как параметрический способ, так и способ коррелат представляют частные случаи в способе условий с дополнительными параметрами.

Все наши выводы выполнены для случая, когда уравниваемые величины L_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) не содержат систематических погрешностей и не коррелированы.

3. Функции независимых аргументов. Коррелированные величины

Всевозможные функции измеренных величин будут, как правило, коррелированными и уравнивание под условием суммы квадратов их погрешностей относится к приближенному решению задачи.

Во-первых, в случае уравнивания функции Ф измеренных величин L имеем невязки в уравнениях, связывающих искомые параметры X и измеренные величины L. По условию

$$V'_{Ф}V_{Ф} = \min \quad (3.20)$$

допускается $V_{Ф} = Ф(X, L)$, тогда как всегда должно быть выполнено условие $Ф(X, L) = 0$.

Во-вторых, условие (3.20) не учитывает корреляцию функций Ф. К тому же их погрешности, являясь сложной функцией погрешностей измеренных величин, могут распределиться так, что решение задачи под условием (3.20) не приведет к лучшей оценке искомых элементов.

Для примера рассмотрим уравнивание функций измеренных величин Ф, поправки которых $V_{Ф}$ связаны с поправками V измеренных величин L' соотношением

$$V_{Ф} = A_0V. \quad (3.21)$$

Пусть в геодезической сети возникают условные уравнения

$$BV_{Ф} + W = 0. \quad (3.22)$$

Решая их под условием $V'_{Ф}V_{Ф} = \min$, находим поправки к функциям измеренных величин

$$V_{Ф} = -B'(BB')^{-1}W. \quad (3.23)$$

Строгое решение (3.22) под условием $V'pV = \min$ должно быть реализовано так, что согласно формулам (3.21) и (3.22)

$$BA_0V + W = 0 \quad (3.24)$$

и искомые поправки по уравнению (3.19)

$$V = -qA'_0B'(BA_0qA'_0B')^{-1}W. \quad (3.25)$$

Подставив уравнение (3.25) в (3.21), найдем

$$V^0_{Ф} = -q^0B'(Bq^0B')^{-1}W, \quad (3.26)$$

где $q^0 = A_0 q A_0'$ — корреляционная матрица функции измеренных величин.

Из формул (3.23) и (3.26) следует, что погрешность приближенного уравнивания функций измеренных величин можно оценить по формуле

$$\delta V_\Phi = V_\Phi - V_\Phi^0 = B_\Phi W, \tag{3.27}$$

где

$$B_\Phi = q^0 B' (B q^0 B')^{-1} - B' (BB')^{-1}. \tag{3.28}$$

Таким образом, уравнивание коррелированных величин под условием

$$V_\Phi' p^0 V_\Phi = \min \tag{3.29}$$

эквивалентно уравниванию некоррелированных величин L с диагональной весовой матрицей $p = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ по принципу

$$V' p V = \min.$$

При этом, если имеет место корреляция (3.21), то матрица

$$p^0 = (A_0 q A_0')^{-1} \tag{3.30}$$

является обратной корреляционной матрице $q^0 = AqA'$.

Дальнейшее обобщение сделаем, введя понятие случайного вектора и уточнив определение корреляционной матрицы.

Вектор $\boldsymbol{L}$, составляющими которого являются независимые случайные величины L_i ($i = 1, 2, ..., n$), называется случайным вектором n-мерного пространства. Таким образом, систему случайных величин L_i ($i = 1, 2, ..., n$) можно принять за составляющие n-мерного случайного вектора $\boldsymbol{L}$.

Случайный вектор $\boldsymbol{L}$ характеризуется математическими ожиданиями $M(L_i)$ и ковариациями

$$K_{ij} = M\{[L_i - M(L_i)][L_j - M(L_j)]\}$$

его составляющих.

Матрица, элементы которой представлены ковариациями (корреляционными моментами)

$$K_L = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

называется ковариационной матрицей.

Диагональный элемент K_{ii} ковариационной матрицы равен дисперсии σ_i^2 случайной величины L_i. Действительно

$$K_{ii} = M\{[L_i - M(L_i)]^2\} = \sigma_i^2.$$

Кроме того, ковариационная матрица по определению является симметрической, т. е. $K_{ij} = K_{ji}$.

Как известно,

$$K_{ij} = r_{ij}\sigma_i\sigma_j,$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции L_i и L_j.

Заменив дисперсию σ_i^2 через квадрат стандарта случайной величины с весом единица и введя обозначение

$$Q_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}},$$

получим выражение для корреляционного момента

$$K_{ij} = \sigma^2 Q_{ij}.$$

При $i = j$ коэффициент корреляции $r_{ii} = 1$, следовательно, весовой коэффициент

$$Q_{ii} = \frac{1}{p_i}.$$

Таким образом, ковариационную матрицу K_L случайного вектора можно представить через стандарт σ и корреляционную матрицу Q_L в виде

$$K_L = \sigma^2 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix} = \sigma^2 Q_L. \tag{3.32}$$

Если составляющие случайного вектора L независимы, т. е. $r_{ij} = 0$, $(i \neq j)$, то корреляционная матрица вырождается в диагональную

$$Q_L = \left\{\frac{1}{p_1}, \ \frac{1}{p_2}, \dots, \frac{1}{p_n}\right\}. \tag{3.33}$$

Вычислим корреляционную матрицу линейной функции случайного вектора. Корреляционную матрицу (3.31) случайного вектора L можно записать в матричной форме

$$K_L = M\,\{[L - M(L)]\,[L - M(L)]'\}. \tag{3.34}$$

При уравнивании или оценке точности функций случайного вектора выгодно применять матричный аппарат. Поэтому рассмотрим правило получения корреляционной матрицы функции

$$\Phi = A_0 L + \Phi_0,$$

представляющей линейную комбинацию случайного вектора L. При этом A_0 и Φ_0 — постоянные параметры.

Математическое ожидание функции

$$M(\Phi) = M(A_0 L + \Phi_0) = A_0 M(L) + \Phi_0.$$

Корреляционная матрица

$$K_{\Phi} = M\{[(A_0L + \Phi_0) - A_0M(L) - \Phi_0] \times$$
$$\times [(A_0L + \Phi_0) - A_0M(L) - \Phi_0]'\} =$$
$$A_0M\{[L - M(L)][L - M(L)]'\} A_0'.$$

Отсюда

$$K_{\Phi} = \sigma^2 Q_{\Phi};$$
$$Q_{\Phi} = A_0 Q_L A_0'. \tag{3.35}$$

Пусть уравниваемые величины L коррелированы так, что в корреляционной матрице (3.32)

$$Q_L = \begin{bmatrix} p_1^{-1} & r_{12}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{-\frac{1}{2}} & \dots & r_{1n}p_1^{-\frac{1}{2}}p_n^{-\frac{1}{2}} \\ r_{12}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{-\frac{1}{2}} & p_2^{-1} & \dots & r_{2n}p_2^{-\frac{1}{2}}p_n^{-\frac{1}{2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{-\frac{1}{2}} & r_{2n}p_2^{-\frac{1}{2}}p_n^{-\frac{1}{2}} & \dots & p_n^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Как известно, симметрическая матрица Q_L представляется произведением двух транспонированных друг другу треугольных матриц, т. е.

$$Q_L = \overline{Q}_L \overline{Q}_L'. \tag{3.37}$$

Обратная матрица

$$Q_L^{-1} = (\overline{Q}_L')^{-1} \overline{Q}_L^{-1}. \tag{3.38}$$

Существует оператор B_0, преобразующий случайный вектор $\boldsymbol{L}$ с коррелированными составляющими в новый случайный вектор $\boldsymbol{L}_0$, составляющие которого не коррелированы и имеют одинаковые веса, т. е.

$$\boldsymbol{L}_0 = B_0 \boldsymbol{L}. \tag{3.39}$$

Корреляционная матрица

$$K_{L_0} = \sigma^2 E.$$

Согласно формулам (3.35) и (3.37)

$$K_{L_0} = \sigma^2 B_0 \overline{Q}_L \overline{Q}_L' B_0'.$$

По условию

$$B_0 \overline{Q}_L \overline{Q}_L' B_0' = E.$$

Следовательно, оператор

$$B_0 = \overline{Q}_L^{-1}. \tag{3.40}$$

Поскольку все составляющие нового вектора $\boldsymbol{L}_0$ независимы и имеют одинаковые веса, принцип наименьших квадратов формулируется в виде

$$V_0'V_0 = \min. \tag{3.41}$$

С учетом уравнений (3.39), (3.40) и (3.38) условие (3.41) эквивалентно заменяется условием для коррелированных величин

$$V'Q_L^{-1}V = \min. \tag{3.42}$$

Пользуясь сделанными выводами, формулируем следующее.

1. Уравнивание коррелированных величин L по принципу $V'PV = \min$ будет строгим при условии, если весовая матрица P есть обратная от корреляционной матрицы Q_L (3.32).

В частном случае, если же уравниваемые величины L независимы, то весовая матрица будет диагональной, т. е.

$$P = \{p_1,\ p_2, \ldots, p_n\}.$$

2. Уравнивание функции $\Phi = A_0L$ случайного вектора $\boldsymbol{L}$ можно выполнить строго по принципу $V_\Phi'PV = \min$, определив весовую матрицу P как обратную от корреляционной матрицы Q_Φ (3.35). При этом, если составляющие случайного вектора коррелированы, то корреляционная матрица Q_L, являющаяся ядром Q_Φ (3.35), вычисляется по формуле (3.32). В частном случае, если составляющие случайного вектора $\boldsymbol{L}$ независимы, то корреляционная матрица $Q_L = \{p_1^{-1},\ p_2^{-1}, \ldots, p_n^{-1}\}$ является диагональной.

Таким образом, для коррелированных величин L по аналогии с выводами п. 2 имеем сводку формул:

$$\left.\begin{aligned} &AV + B\delta X + W = 0, \\ &V = Q_LA'K, \\ &K = -(AQ_LA')^{-1}(B\delta X + W), \\ &\delta X = -(B'Q_L^{-1}B)^{-1}B'Q_L^{-1}W \end{aligned}\right. \tag{3.43}$$

— в способе условий с дополнительными параметрами;

$$\left.\begin{aligned} &AV + W = 0, \\ &V = Q_LA'K, \\ &K = -(AQ_LA')^{-1}W \end{aligned}\right. \tag{3.44}$$

— в способе коррелат;

$$\left.\begin{aligned} &V = B\delta X + L, \\ &V = P_BL, \\ &P_B = E - B(B'Q_L^{-1}B)^{-1}B'Q_L^{-1}, \\ &\delta X = -(B'Q_L^{-1}B)^{-1}B'Q_L^{-1}L \end{aligned}\right. \tag{3.45}$$

— в параметрическом способе.

Во всех уравнениях (3.43)—(3.45), заменив Q_L на Q_Φ, получим формулы для функции

$$\Phi = A_0 L,$$

являющейся линейной комбинацией случайного вектора $\boldsymbol{L}$.

4. Уравнивание с учетом систематических погрешностей в измерениях

Пусть результаты измерений L' отягощены систематическими погрешностями ΔL, распределенными по величине на t групп. Однако число групп t существенно меньше, чем число всех измерений.

Уравненное значение измеренной величины L_i, отнесенной по характеру систематической погрешности к группе t, вычисляется по формуле

$$L_i = L'_i + \Delta L_t + v_i. \tag{3.46}$$

Строгое уравнивание сведется к составлению, по аналогии с выражением (3.3), системы уравнений поправок

$$V = A\,\Delta L + B\delta X + W \tag{3.47}$$

и решению ее под условием $V'pV = \min$.

Для удобства выражение (3.47) представим в блочных матрицах

$$V = [A \;\; B]\begin{bmatrix} \Delta L \\ \delta X \end{bmatrix} + W. \tag{3.48}$$

Решив уравнение (3.48) по принципу наименьших квадратов, получим нормальные уравнения

$$\begin{aligned} &A'pA\,\Delta L + A'pB\delta X + A'pW = 0, \\ &B'pA\,\Delta L + B'pB\delta X + B'pW = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Решив первую строку уравнения (3.49) относительно

$$\Delta L = -(A'pA)^{-1} A'p\,(B\delta X + W) \tag{3.50}$$

и исключив ΔL из второй строки формулы (3.49), получим

$$B'PB\delta X + B'PW = 0, \tag{3.51}$$

где весовая матрица

$$P = pP_A \tag{3.52}$$

с ядром

$$P_A = E - A\,(A'pA)^{-1} A'p. \tag{3.53}$$

Из решения уравнения (3.51) находим искомые параметры

$$\delta X = -(B'PB)^{-1} B'PW. \tag{3.54}$$

Подставляя (3.54) в уравнение (3.50), вычисляем поправки за систематические погрешности

$$\Delta L = -(A'pA)^{-1} A'pP_B W, \tag{3.55}$$

где весовая матрица

$$P_B = E - B(B'PB)^{-1} B'P. \tag{3.56}$$

Исключая выражения (3.55) и (3.54) из исходного уравнения (3.47), находим поправки за случайные погрешности

$$V = P_A P_B W. \tag{3.57}$$

Согласно ранее сделанным заключениям в п. 1, эквивалентное решение имеем, считая измерения коррелированными из-за общих систематических составляющих ΔL и формулируя задачу уравнивания под условием

$$V'_\Phi P V_\Phi = \min. \tag{3.58}$$

При этом весовая матрица P вычисляется по формуле (3.52). Поправки к измерениям, содержащим и систематические погрешности,

$$V_\Phi = B\delta X + W. \tag{3.59}$$

Решив уравнение (3.59) под условием (3.58), получим формулу

$$\delta X = -(B'pP_A B)^{-1} B'pP_A W, \tag{3.60}$$

эквивалентную выражению (3.54).

Подставляя значение δX (3.54) в формулу (3.59), находим поправку коррелированных измерений

$$V_\Phi = P_B W. \tag{3.61}$$

Сравнивая формулы (3.61) и (3.57), находим поправки за случайные погрешности

$$V = P_A V_\Phi. \tag{3.62}$$

Систематическая часть по условию (3.47) и согласно уравнениям (3.61), (3.62)

$$A\,\Delta L = V - V_\Phi = -(E - P_A) P_B W.$$

Отсюда с учетом выражения (3.53) имеем формулу

$$\Delta L = -(A'pA)^{-1} A'pP_B W,$$

точно соответствующую формуле (3.55).

Поправки за систематические погрешности можно отыскивать как дополнительные параметры ΔL в условных уравнениях

$$AV + B\,\Delta L + W = 0. \tag{3.63}$$

Решение задачи в такой формулировке выполнено в п. 1 и поэтому ограничимся сводкой формул

$$\Delta L = -(B'p^0B)^{-1}B'p^0W; \tag{3.64}$$

$$V = -qA'p^0P_B^0W; \tag{3.65}$$

$$P_B^0 = E - B(B'p^0B)^{-1}B'p^0; \tag{3.66}$$

$$p^0 = (AqA')^{-1}. \tag{3.67}$$

5. Учет результатов ранее выполненных работ и погрешности исходных параметров

Пусть ранее выполненные работы на объекте определяют параметры X_B^0, а их корреляционная матрица Q_0. Новые измерения доставляют другую совокупность параметров X_C и уточняют прежние параметры X_B^0.

Сформулируем решение задачи в алгоритмах параметрического способа. Приняв X_B^0 и X_C^0 за счислимые значения искомых параметров, составим уравнения поправок

$$\begin{gathered} v = B\delta X_B + C\delta X_C + l, \dots p, \\ v_0 = E\delta X_B, \dots P_0 = Q_0^{-1} = B_0'p_0B_0. \end{gathered} \tag{3.68}$$

Решая систему уравнений (3.68) под условием

$$V'PV = \min,$$

где

$$V' = [v\ v_0],\ P = \{p,\ P_0\},$$

получаем нормальные уравнения

$$\begin{gathered} (B'pB + P_0)\,\delta X_B + B'pC\delta X_C + B'pl = 0, \\ C'pB\delta X_B + C'pC\delta X_C + C'pl = 0. \end{gathered} \tag{3.69}$$

Обозначив

$$(B'pB + P_0)^{-1} = Q \tag{3.70}$$

и решив нормальные уравнения (3.69) относительно δX_B, получим

$$\begin{gathered} \delta X_B = -QB'p\,(C\delta X_C + l), \\ -C'pBQ\,(B'pC\delta X_C + B'pl) + C'pC\delta X_C + C'pl = 0. \end{gathered} \tag{3.71}$$

Вторая строка после преобразования имеет вид

$$C'P_BC\delta X_C + C'P_Bl = 0, \tag{3.72}$$

где

$$\begin{gathered} P_B = pP_B^0, \\ P_B^0 = E - BQB'p. \end{gathered} \tag{3.73}$$

Решая уравнение (3.72) относительно δX_C, находим

$$\delta X_C = -(C'P_BC)^{-1}P_Bl. \tag{3.74}$$

Подставляя найденные значения δX_C (3.74) в первую строку (3.71), находим

$$\delta X_B = -QB'P_Cl, \tag{3.75}$$

где

$$\begin{aligned} P_C &= pP_C^0, \\ P_C^0 &= E - C(C'P_BC)^{-1}C'P_B. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Выведенные уравнения строго решают проблему учета ранее выполненных работ. Для этого достаточно сохранить матрицу нормальных уравнений P_0, а за счислимые значения параметров X_B принять их значения X_B^0, найденные из обработки данных ранее выполненных работ.

Если параметры X_B^0, определенные из обработки наблюдений ранее выполненных работ, примем за исходные, то уравнения поправок для новых измерений имеют следующий вид:

$$v_\Phi = C\delta X_C + l. \tag{3.77}$$

Строгое решение будет найдено, если, приняв за весовую матрицу (3.73), решим уравнения (3.77) под условием

$$v'_\Phi P_B v_\Phi = \min.$$

Действительно, нормальные уравнения, соответствующие уравнениям (3.77), точно совпадают с нормальными уравнениями (3.72).

Таким образом, проблема учета ошибки исходных параметров сводится к задаче коррелированных величин. При этом весовую матрицу для новых измерений следует вычислять по формулам (3.73) и (3.70).

Все выводы можно обобщить и на случай уравнивания коррелированных величин, отягощенных систематическими погрешностями.

Матрицы P_A, P_B и P_B^0, приложения которых проиллюстрированы на частных примерах, обладают замечательными свойствами. Исследования подобных матриц и другие примеры их приложения рассмотрены в п. 7 настоящего параграфа.

6. Учет изменения состава исходной информации

На практике возникает задача оценки эффекта дополнительных измерений или изменения весов измеренных величин.

В первом случае, уравнивая параметрическим способом, будем иметь нормальные уравнения

$$(N_0 + \Delta N)(X_0 + \Delta X_1) + (R_0 + \Delta R) = 0, \tag{3.78}$$

где ΔN, ΔX_1 и ΔR — приращения элементов исходных нормальных уравнений

$$N_0 X_0 + R_0 = 0 \tag{3.79}$$

из-за внесения дополнительных измерений.

Раскрывая скобки в формуле (3.78) и пользуясь формулой (3.79) находим

$$N_0 \Delta X_1 + \Delta N X_0 + \Delta N \Delta X_1 + \Delta R = 0. \tag{3.80}$$

Если пренебречь членом $\Delta N \Delta X_1$, то эффект дополнительных измерений на оценку искомых величин оценим по формуле

$$\Delta X_1 = -N_0^{-1} (\Delta N X_0 + \Delta R). \tag{3.81}$$

В случае изменения весов p_0 измеренных величин исходные нормальные уравнения

$$B' p_0 B X_0 + B' p_0 W = 0 \tag{3.82}$$

получат приращения из-за Δp и будут иметь вид

$$(B' p_0 B + B' \Delta p B)(X_0 + \Delta X_2) + (B' p_0 + B' \Delta p) W = 0. \tag{3.83}$$

Раскрывая скобки в уравнении (3.83) и пользуясь формулой (3.82), находим

$$B' p_0 B \Delta X_2 + B' \Delta p B \Delta X_2 + B' \Delta p B X_0 + B' \Delta p W = 0. \tag{3.84}$$

Пренебрегая членом $B' \Delta p B \Delta X_2$, находим эффект изменения весов измерений на оценку искомых величин по формуле

$$\Delta X_2 = -(B' p_0 B)^{-1} B' \Delta p V_0, \tag{3.85}$$

где $V_0 = B X_0 + W$ — поправки измеренных величин, вычисленные ранее с весом p_0.

Формулы (3.81) и (3.85) решают поставленную задачу с точностью первых членов разложения. Если приращения матриц нормальных уравнений велики и обратные матрицы их чувствительны к таким изменениям, то следует применять более строгие формулы

$$\Delta X_1 = -(N_0 + \Delta N)^{-1} (\Delta B X_0 + \Delta R), \tag{3.86}$$

$$\Delta X_2 = -(B' p_0 B + B' \Delta p B)^{-1} B' \Delta p V_0. \tag{3.87}$$

Чувствительность обратной матрицы к изменениям элементов ее исходной матрицы можно оценить, изучая обусловленность систем нормальных уравнений. Этим вопросам, в геодезическом приложении, посвящен отдельный параграф в гл. 7.

7. Вопросы оценки точности

Оценку точности сформулируем как задачу определения эмпирических значений стандартов измеренных величин и корреляционной матрицы заданной функции измеренных величин.

В общей постановке, представив оцениваемый вектор как линейную функцию некоторого случайного вектора, корреляционная матрица которого задана, можно найти корреляционную матрицу оцениваемого вектора. За исходный случайный вектор удобно принять вектор результатов измеренных величин $\boldsymbol{L}'$, компоненты которого взаимно независимы.

Корреляционная матрица измеренного вектора

$$Q = \{q_1, q_2, \dots q_n\}$$

есть диагональная матрица.

Если оцениваемый вектор

$$\boldsymbol{\Phi} = F\boldsymbol{L}',$$

то его корреляционная матрица

$$Q_\Phi = FQF',$$

а ковариационная матрица

$$K_\Phi = \sigma^2 Q_\Phi.$$

Рассмотрим основные положения оценок в рамках теории уравнивания коррелатным и параметрическим способами.

1. Если вектор измеренных величин $\boldsymbol{L}'$ является нормальным случайным вектором, то векторы свободных членов условных уравнений $\boldsymbol{W}$, коррелат $\boldsymbol{K}$ и поправок $\boldsymbol{V}$ являются нормальными случайными векторами.

Действительно, невязку условных уравнений как линейную функцию истинных ошибок измерений можно выразить таким образом, что

$$\boldsymbol{W} = A(\boldsymbol{L}' - \overset{0}{\boldsymbol{L}}). \tag{3.88}$$

Поскольку матрица A и вектор $\overset{0}{\boldsymbol{L}}$, компоненты которого представлены истинными значениями измеренных величин, постоянны, а вектор $\boldsymbol{L}'$ по условию нормальный случайный вектор, то и вектор свободных членов $\boldsymbol{W}$ условных уравнений является нормальным случайным вектором.

Математическое ожидание вектора свободного члена

$$M(\boldsymbol{W}) = AM(\boldsymbol{L}') - A\overset{0}{\boldsymbol{L}} = 0,$$

ибо $M(\boldsymbol{L}') = \overset{0}{\boldsymbol{L}}$.

Вектор коррелат

$$\boldsymbol{K} = -(AQA')^{-1}\boldsymbol{W} \tag{3.89}$$

как линейная функция нормального случайного вектора $\boldsymbol{W}$ также является нормальным случайным вектором.

Математическое ожидание вектора коррелат

$$M(\boldsymbol{K}) = -(AQA')^{-1}M(\boldsymbol{W}) = 0,$$

поскольку $M(\boldsymbol{W}) = 0$.

В свою очередь, вектор поправок измерений

$$V = QA'K$$

как линейная функция нормального случайного вектора коррелат также является нормальным случайным вектором.

Математическое ожидание вектора поправок измерений

$$M(V) = QA'M(K) = 0,$$

поскольку $M(K) = 0$.

Вектор поправок измерений

$$V = QA'(AQA')^{-1}A(L - \overset{0}{L}). \qquad (3.90)$$

Вектор уравненных величин

$$L = L' + V$$

или

$$L = QA'(AQA')^{-1}A\overset{0}{L} + (E - QA'(AQA')^{-1}A)L'. \qquad (3.91)$$

Таким образом, вектор уравненных величин L как линейная функция нормального случайного вектора L' также является нормальным случайным вектором.

Математическое ожидание уравненного вектора

$$M(L) = M(L') = \overset{0}{L},$$

поскольку $M(L') = \overset{0}{L}$, $M(V) = 0$.

Корреляционная матрица нормального случайного вектора L

$$Q_L = (E - QA'(AQA')^{-1}A)Q(E - QA'(AQA')^{-1}A)' = Q_AQ, \qquad (3.92)$$

где

$$Q_A = E - QA'(AQA')^{-1}A. \qquad (3.93)$$

Корреляционная матрица нормального случайного вектора коррелат (3.89), (3.88)

$$Q_K = (AQA')^{-1}AQA'(AQA')^{-1} = (AQA')^{-1}. \qquad (3.94)$$

Корреляционная матрица вектора поправок измерений

$$Q_V = QA'Q_KAQ = QA'(AQA')^{-1}AQ. \qquad (3.95)$$

Обратим внимание на следующее, а именно

$$L = L' + V,$$

$$Q_L = Q_{L'} - Q_V = Q - QA'(AQA')^{-1}AQ = Q_AQ$$

точно соответствуют выражениям (3.92) и (3.93).

Функцию Φ, в общем случае нелинейную функцию вектора уравненных величин L, оценим следующим образом. Приведя функцию к линейному виду

$$\Phi(L) = \Phi(\overset{0}{L}) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial L_i}\right)_0 (L_i - \overset{0}{L}),$$

запишем ее в форме

$$\Phi(L) = FL + \Phi_0,$$

где

$F = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial L_1} \frac{\partial \Phi}{\partial L_2} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial L_n} \right]$ — матрица-строка частных производных,

$\Phi_0 = \Phi(\overset{0}{L}) - F\overset{0}{L}$ — постоянная величина.

Корреляционная матрица функции $\Phi(L)$

$$Q_\Phi = FQ_LF' = FQ_AQF',$$
$$Q_A = E - QA'(AQA')^{-1}A \tag{3.96}$$

есть число и поэтому назовем ее обратным весом функции.

Заметим, что корреляционные матрицы (3.92)—(3.96) содержат матрицу $(AQA')^{-1}$, обратную матрице нормальных уравнений коррелат.

Рассмотрим практические приемы вычислений, позволяющие избежать процедуру обращения матрицы AQA' высокого порядка.

Представим формулу (3.96) в следующей записи:

$$Q_\Phi = FQF' - FQA'(AQA')^{-1}AQF'.$$

Введя обозначение

$$X_r = -(AQA')^{-1}AQF', \tag{3.97}$$

получим новую форму записи обратного веса функции

$$Q_\Phi = FQF' + FQA'X_r. \tag{3.98}$$

При этом X_r $(r \times 1)$ есть матрица-столбец.

Присоединяя к формуле (3.98) уравнение

$$AQA'X_r + AQF' = 0,$$

вытекающее из условия (3.97), и представляя в блочной записи, получим

$$\begin{bmatrix} AQA' & AQF' \\ FQA' & FQF' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_\Phi \end{bmatrix}. \tag{3.99}$$

В обычной записи

$$(AQF')' = FQA' = \left[\sum_{i=1}^{n} q_i a_{1i} f_i \sum_{i=1}^{n} q_i a_{2i} f_i \ldots \sum_{i=1}^{n} q_i a_{ri} f_i \right],$$

$$FQF' = \sum_{i=1}^{n} q_i f_i f_i,$$

$$f_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial L_i} \right)_0.$$

Уравнение (3.99) отличается от нормальных уравнений коррелат

$$AQA'K + W = 0$$

тем, что имеет $r + 1$ порядок. Расширенная матрица этих уравнений является симметрической.

Нетрудно заметить, что исключив r неизвестных X_r, получим преобразованный диагональный элемент $r + 1$ строки, точно равный обратному весу Q_Φ оцениваемой функции.

После r преобразований получим преобразованный коэффициент $[FQF' \cdot r] < FQF'$. Отсюда следует, что $Q_\Phi < FQF'$.

Докажем, что число FQF' равно обратному весу функции $\Phi' = \Phi(L')$, вычисленной по результатам измерений. Действительно, в линейной форме

$$\Phi(L') = \Phi(\overset{0}{L}) + F(L' - \overset{0}{L})$$

или

$$\Phi(L') = FL' + \Phi_0.$$

Отсюда обратный вес функции Φ', вычисленной по результатам измерений,

$$Q_{\Phi'} = FQF'.$$

Таким образом, обосновывается, что уравнивание приводит к повышению веса функции измеренных величин.

Сформулируем правило вычисления обратного веса функции измеренных величин.

В таблице коэффициентов условных уравнений поправок в дополнительном столбце F в i-й строке ($i = 1, 2, \ldots, n$) выписываются частные производные оцениваемой функции $f_i = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial L_i}\right)_0$. В схеме решения нормальных уравнений также отводится дополнительный столбец Q_Φ, в который выписываются вычисленные значения элементов $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i a_{ji} f_i$ в j-й строке ($j = 1, 2, \ldots, r$). В строке $r + 1$ столбца Q_Φ выписывается вычисленное значение элемента $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i f_i f_i$. В дополнительном столбце Q_Φ в процессе решения нормальных уравнений выполняются преобразования, связанные с исключением коррелат. В результате r преобразований будет вычислен элемент $\left[\sum\limits_{i=1}^{n} q_i f_i f_i \cdot r\right]$, равный обратному весу оцениваемой функции.

Число дополнительных столбцов будет равно числу оцениваемых функций.

Для измеренной величины $F = E$ и поэтому уравнение (3.99) имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} AQA' & AQ \\ QA' & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_L \end{bmatrix}. \qquad (3.100)$$

Действительно, исключив X_r, получим корреляционную матрицу (3.92) уравненного вектора $\boldsymbol{L}$.

В частном случае для оценки измеренной величины L_i в дополнительном столбце Q_{L_i} таблицы коэффициентов нормальных уравнений необходимо выписать элементы $a_{ji}q_i$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, а в строке $(r + 1)$ — элемент q_i. В процессе решения нормальных уравнений, r раз преобразуя дополнительный столбец Q_{L_i}, в $(r + 1)$-й строке получим преобразованный элемент $[q_i \cdot r]$, равный обратному весу уравненного значения измеренной величины L_i. При этом $Q_{L_i} < q$. Таким образом доказано, что уравнивание повышает вес измеренной величины.

Для оценки средней квадратической погрешности единицы веса необходимо знать численное значение $[pv^2] = V'pV$. Обычный способ сводится к вычислению вектора поправок по формулам

$$V = QA'K, \qquad (3.101)$$

$$V'pV = [pv^2]. \qquad (3.102)$$

Рассмотрим вычисление значения функции $V'PV = \min$ в схеме решения нормальных уравнений.

Из соотношения $V = QA'K$ следует, что

$$V'PV = K'AQA'K = -KW, \qquad (3.103)$$

поскольку $PQ = E$, $AQA'K = -W$.

Равенство (3.103) можно представить таким образом, что

$$V'PV = -W'K. \qquad (3.104)$$

Присоединяя равенство (3.104) к нормальным уравнениям коррелат, получаем нормальные уравнения

$$\begin{bmatrix} AQA' & W \\ W' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V'PV \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.105)$$

порядка $(r + 1)$. Исключив все r коррелат, получим последнюю преобразованную строку

$$[W \cdot r] + [V'PV] = 0.$$

Откуда

$$V'PV = -[W \cdot r]. \qquad (3.106)$$

Поскольку $W_{r+1} = 0$, вычисление $[W \cdot r]$ сведется к суммированию произведений элементов, стоящих в элиминационных строках столбца W, на элементы вышестоящей строки этого же столбца. Сумма $[W \cdot r]$ всегда имеет отрицательный знак.

2. Решение параметрическим способом эквивалентно решению коррелатным способом, т. е. при заданном значении вектора $\boldsymbol{L}'$ с корреляционной матрицей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ будет найден один и тот же вектор поправок $\boldsymbol{V}$ под условием $V'Q^{-1}V = \min$.

Далее утверждается следующее. В параметрическом уравнении

$$\boldsymbol{V} = B\delta\boldsymbol{X} + (\boldsymbol{L}^0 - \boldsymbol{L}'), \tag{3.107}$$

где $\boldsymbol{L}^0$ — счислимый вектор измеренных величин. Если вектор результатов измерений $\boldsymbol{L}'$ является нормальным случайным вектором, то вектор необходимых параметров $\delta\boldsymbol{X}$ также является нормальным случайным вектором.

Действительно, решая уравнение (3.107) под условием $V'PV = \min$, получаем

$$\delta\boldsymbol{X} = -(B'PB)^{-1} B'P (\boldsymbol{L}^0 - \boldsymbol{L}'). \tag{3.108}$$

По условию $\boldsymbol{L}'$ — нормальный случайный вектор, следовательно, и вектор необходимых параметров $\delta\boldsymbol{X}$ есть нормальный случайный вектор.

Корреляционная матрица вектора $\delta\boldsymbol{X}$

$$Q_X = (B'PB)^{-1} B'PQPB (B'PB)^{-1},$$

отсюда

$$Q_X = (B'PB)^{-1}. \tag{3.109}$$

На этом основании заключаем, что обратная матрица нормальных уравнений является корреляционной матрицей параметров $\delta\boldsymbol{X}$.

Подставляя $\delta\boldsymbol{X}$ (3.109) в формулу (3.107), получаем формулу для вектора поправок

$$\boldsymbol{V} = (E - B(B'PB)^{-1} B'P)(\boldsymbol{L}^0 - \boldsymbol{L}'). \tag{3.110}$$

Корреляционная матрица вектора поправок

$$Q_V = (E - B(B'PB)^{-1} B'P)\, Q\, (E - PB(B'PB)^{-1} B').$$

Откуда

$$Q_V = Q - B(B'PB)^{-1} B'. \tag{3.111}$$

Уравненный вектор $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{V}$ найдем, исключив $\boldsymbol{V}$ (3.110), т. е.

$$\boldsymbol{L} = B(B'PB)^{-1} B'P\boldsymbol{L}' + (E - B(B'PB)^{-1} B'P)\,\boldsymbol{L}^0. \tag{3.112}$$

Корреляционная матрица уравненного вектора

$$Q_L = B(B'PB)^{-1} B'PQPB (B'PB)^{-1} B'.$$

Откуда

$$Q_L = B(B'PB)^{-1} B'. \tag{3.113}$$

Замечаем, что

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{V},$$

$$Q_L = Q_{L'} - Q_V = Q - (Q - B(B'PB)^{-1} B') = B(B'PB)^{-1} B'$$

точно соответствует уравнению (3.113).

Ранее было показано, что диагональные элементы Q_{jj} корреляционной матрицы являются обратными весами компонентов вектора функции некоторого случайного вектора, т. е.

$$Q_{jj} = \frac{1}{p_j}. \tag{3.114}$$

Таким образом, обратный вес неизвестного δx_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) равен j-му диагональному элементу обратной матрицы нормальных уравнений.

Веса некоторых неизвестных можно вычислять, не обращая полную матрицу нормальных уравнений.

Воспользуемся одним из свойств блочных матриц, сформулированных в гл. 7. Запишем нормальные уравнения в блочной форме

$$RX_{\hat{R}} + TX_S + L_{\hat{R}} = 0,$$
$$T'X_{\hat{R}} + SX_S + L_S = 0.$$

Исключив неизвестные X_R по алгоритму Гаусса, получим преобразование S-блока в новый блок $S_1 = [S \cdot R]$. Затем, обратив преобразованный таким образом блок S_1, получим блок S_1^{-1} обратной матрицы. Это правило можно эффективно использовать, выделив S-блок малого размера.

Пользуясь правилом обращения S-блока, решаем задачу оценки двух последних неизвестных.

После исключения X_R по алгоритму Гаусса, преобразованный S_1-блок имеет следующий вид:

$$S_1 = \begin{bmatrix} [a_{k-1}pa_{k-1}\cdot(k-2)] & [a_{k-1}pa_k\cdot(k-2)] \\ [a_{k-1}pa_k\cdot(k-2)] & [a_kpa_k\cdot(k-2)] \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы обратной матрицы S_1^{-1}, равные обратным весам двух последних неизвестных, имеют следующий вид:

$$p_k^{-1} = \frac{1}{[a_kpa_k\cdot(k-2)] - \dfrac{[a_{k-1}pa_k\cdot(k-2)]^2}{[a_{k-1}pa_{k-1}\cdot(k-2)]}},$$

$$p_{k-1}^{-1} = \frac{[a_kpa_k\cdot(k-2)]}{[a_{k-1}pa_{k-1}\cdot(k-2)]\,[a_kpa_k\cdot(k-1)]}.$$

Откуда веса неизвестных

$$p_k = [a_kpa_k\cdot(k-1)], \tag{3.115}$$

$$p_{k-1} = p_k\frac{[a_{k-1}pa_{k-1}\cdot(k-2)]}{[a_kpa_k\cdot(k-2)]}. \tag{3.116}$$

Таким образом, вес последнего неизвестного δx_k равен преобразованному коэффициенту перед ним, полученному после исключения предпоследнего неизвестного.

Вес предпоследнего неизвестного δx_{k-1} вычисляется по формуле (3.116), аргументы которой представлены в схеме решения нормальных уравнений по алгоритму Гаусса.

Функцию уравненного вектора L можно оценить, представив, его составляющие L_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) через необходимые параметры x_j ($j = 1, 2, \ldots, k$). Оценим в общем случае нелинейную функцию $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, приведя к линейному виду

$$\Phi = F\delta X + \Phi_0,$$

где $F = [f_1 f_2 \ldots f_k]$ — матрица-строка из частных производных,

$$f_j = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)_0; \quad \Phi_0 = \Phi\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0\right); \quad x_j = x_j^0 + \delta x_j.$$

Корреляционная матрица оцениваемой функции Φ вырождается в число

$$Q_\Phi = FQ_X F', \tag{3.117}$$

равное обратному весу p_Φ^{-1} функции.

Сформулируем правило вычисления обратного веса функции в дополнительном столбце в схеме решения нормальных уравнений. Обозначая $Q_X F'$ через X_k, пишем нормальные уравнения ($k + 1$)-го порядка в блочных матрицах

$$\begin{bmatrix} B'PB & -F' \\ -F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_\Phi \end{bmatrix}, \tag{3.118}$$

удовлетворяющие условию (3.117).

Нетрудно заметить, что исключив k неизвестных X_k, получим преобразованный диагональный элемент ($k + 1$)-й строки, точно равный по модулю Q_Φ и обратный по знаку.

Вычисление обратного веса функции в процессе решения нормальных уравнений сводится к следующему. В схеме решения нормальных уравнений в дополнительном столбце F выписываются частные производные функции f_j оцениваемой функции в соответствующих строках с номером $j = 1, 2, \ldots, k$. В процессе решения в этом дополнительном столбце выполняются такие же преобразования, как и в столбце свободных членов. После завершения всех преобразований обратный вес функции с обратным знаком (всегда отрицательным) вычисляется как сумма произведений элементов, стоящих в элиминационных строках столбца F, на элементы вышестоящей строки этого же столбца.

В дополнительных столбцах можно вычислить и корреляционную матрицу Q_X необходимых параметров δX. По условию $F = E$. Следовательно, $X_k = Q_X$ и имеет место k систем нормальных уравнений

$$B'PBQ_X - E = 0,$$

где E — единичная матрица порядка k, решая который, находим корреляционную матрицу $Q_X = (B'PB)^{-1}$ необходимых параметров.

Весовые коэффициенты вычисляют по тем же формулам, что и неизвестные δx_j. При этом j-ю строку корреляционной матрицы вычисляют, пользуясь преобразованными элементами j-го дополнительного столбца.

Если необходимо оценить только параметр δx_j, достаточно иметь один дополнительный столбец F, j-элемент которого равен —1, а остальные все элементы нулевые.

Пользуясь дополнительным столбцом, можно оценить обратный вес любой компоненты (измеренной величины) уравненного вектора $\boldsymbol{L}$.

Записав для условия (3.113) систему нормальных уравнений $(k+1)$-го порядка

$$\begin{bmatrix} B'PB & -B' \\ -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_{L_l} \end{bmatrix}, \tag{3.119}$$

где $X_k = (B'PB)^{-1}B'$, замечаем ее полную аналогию с системой (3.118).

Таким образом, выписав в дополнительном столбце с обратным знаком коэффициенты уравнения поправок b_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, k)$, обратный вес i-й компоненты уравненного вектора $\boldsymbol{L}$ вычислим по тем же правилам, по которым вычисляется обратный вес функции Φ $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Численное значение функции $[pv^2] = V'PV = \min$ в параметрическом способе можно найти, непосредственно вычислив вектор поправок по формуле

$$\boldsymbol{V} = B\delta \boldsymbol{X} + \boldsymbol{l}. \tag{3.120}$$

Возможен косвенный способ вычисления $[pv^2]$. В самом деле,

$$V'PV = (B\delta X + l)' P (B\delta X + l) = \delta X' (B'PB) \delta X +$$
$$+ l'PB\delta X + \delta X'B'Pl + l'Pl.$$

Пользуясь уравнениями (3.12) и (3.120), получаем следующие формулы:

$$V'PV = l'Pl + l'PB\delta X, \tag{3.121}$$

$$V'PV = l'PV. \tag{3.122}$$

В обычной записи

$$[pv^2] = [pb_1l]\,\delta x_1 + [pb_2l]\,\delta x_2 + [pb_kl]\,\delta x_k + [pll],$$

$$[pv^2] = [plv]. \tag{3.123}$$

Присоединяя уравнение (3.121) к нормальным уравнениям и представляя полученную систему в блочной форме, имеем

$$\begin{bmatrix} B'PB & B'Pl \\ l'PB & l'Pl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V'PV \end{bmatrix}. \tag{3.124}$$

Расширенная система нормальных уравнений (3.124) имеет порядок $(k+1)$.

Исключая k неизвестных δX, получаем

$$[l'Pl \cdot k] = V'PV. \tag{3.125}$$

Таким образом, искомое значение $V'PV = \min$ численно равно диагональному элементу $(k+1)$-й строки, полученному после исключения всех параметров δX_k по алгоритму Гаусса.

Формула (3.122) контролирует вычисления V и $V'PV$.

3. Продолжим исследования вектора поправок $\boldsymbol{V}$.

Теорема. Нормальный случайный вектор поправок $\boldsymbol{V}$ является $(n-k)$-мерным вектором.

Вектор поправок в способе коррелат (3.90)

$$\boldsymbol{V} = U_A \overset{0}{\boldsymbol{V}}, \tag{3.126}$$

где $\overset{0}{\boldsymbol{V}} = (\overset{0}{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L})$ — вектор истинных поправок, имеющий размерность n;

$$U_A = QA'(AQA')^{-1}A. \tag{3.127}$$

Очевидно, число независимых компонент вектора поправок $\boldsymbol{V}$ (3.126) равно рангу матрицы U_A. Определим ранг матрицы U_A. Матрица нормальных уравнений коррелат AQA' — неособенная, так что ранг обратной от нее матрицы $(AQA')^{-1}$ равен r. Ранг (A) = ранг $(A') = r$. Ранг $(Q) = n$. Как известно, ранг произведения матриц не превосходит ранга любой матрицы из сомножителей. Следовательно, ранг $(U_A) \leqslant r$. Кроме того, $AU_A = A$, так что ранг $(A) = r \leqslant$ ранг (U_A). Таким образом, $r \leqslant$ ранг $(U_A) \leqslant r$. Отсюда ранг $(U_A) = r$.

Ранг матрицы условных уравнений поправок равен числу избыточных измерений, т. е. $(n-k)$.

Таким образом, доказано, что вектор поправок в способе коррелат является $(n-k)$-мерным вектором.

Вектор поправок $\boldsymbol{V}$ (3.110) в параметрическом способе

$$\boldsymbol{V} = (E - U_B)\boldsymbol{V}_0, \tag{3.128}$$

где $\boldsymbol{V}_0 = (\boldsymbol{L}^0 - \boldsymbol{L}')$ — вектор счислимых поправок, имеющий размерность n;

$$U_B = B(B'PB)^{-1}B'P. \tag{3.129}$$

Очевидно, число независимых компонент вектора поправок $\boldsymbol{V}$ (3.128) равно рангу матрицы $(E - U_B)$. Определим ранг матрицы U_B. С этой целью установим ранги ее сомножителей. Ранг $(P) = n$, ранг (B) = ранг $(B') = k$ — числу необходимых параметров. Матрица нормальных уравнений $(B'PB)$ имеет ранг k и является неособенной. Следовательно, обратная ей $(B'PB)^{-1}$ тоже имеет ранг k. Отсюда ранг $(U_B) \leqslant k$. С другой стороны, $U_B B = B$. Поэтому ранг $(U_B) \geqslant k$. Таким образом, $k \leqslant$ ранг $(U_B) \leqslant k$. Отсюда ранг $(U_B) = k$.

Продолжим исследование матрицы U_B. Матрица U_B является квадратной порядка n. Обладает свойством $U_B = U_B^2$. Умножая U_B

слева и справа на ортогональные матрицы $P^{1/2}$ и $P^{-1/2}$, получаем подобную ей матрицу

$$\tilde{U}_B = P^{\frac{1}{2}} B (B'PB)^{-1} B' P^{\frac{1}{2}}, \tag{3.130}$$

обладающую свойствами симметрии и $\tilde{U}_B = \tilde{U}_B^2$.

Для симметрической матрицы найдется ортогональная матрица, приводящая ее к диагональной в форме

$$F'\tilde{U}_B F = \Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}.$$

Как известно, при подобных преобразованиях ранг и след матрицы не изменяются, так что

$$\text{ранг } (U_B) = \text{ранг } (\tilde{U}_B) = \text{ранг } (\Delta) = k,$$

$$\text{Sp}\,(U_B) = \text{Sp}\,(\tilde{U}_B) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

С другой стороны, $\Delta^2 = (F'\tilde{U}_B F)^2 = F'\tilde{U}F = \Delta$, так что $\delta_i = 0;\ 1$. Очевидно, число $\delta_i = 1$ равно рангу матрицы $\tilde{U}_B$, т. е. равно числу k.

Приведем к диагональному виду матрицу $E—U_B$ теми же приемами, что и матрицу $\tilde{U}_B$.

Заметим, что $\tilde{\delta} = 0;\ 1$. Число $\tilde{\delta}_i = 1$ равно $n—k$. Следовательно, ранг $(E - U_B) = n - k$.

Справедливость теоремы доказана и для параметрического способа уравнивания.

4. Оценим среднюю квадратическую погрешность единицы веса. Для случайного нормального вектора поправок V справедливо [40]

$$\frac{1}{\sigma^2} V'PV = \chi^2,$$

где χ^2 — распределение, математическое ожидание которого

$$M(\chi^2) = M\left\{\frac{1}{\sigma^2} V'PV\right\}$$

равно числу $n - k$ независимых компонент вектора поправок.

Переходя к средним значениям, получаем формулу

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} \tag{3.131}$$

средней квадратической погрешности единицы веса.

При достаточно большом числе избыточных измерений

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}}, \tag{3.132}$$

а сама оценка μ является несмещенной.

5. Сформулируем основные свойства матрицы $P_B = E - U_B$.

Свойство 1. Матрица P_B является квадратной порядка n.

Свойство 2. Ранг матрицы $P_B = E - U_B$ равен ее следу и количеству избыточных измерений $n - k$.

Свойство 3. Многократное умножение матрицы P_B саму на себя не изменяет ее значение, т. е.

$$P_B = \prod_{i=2}^{\infty} P_B^i. \tag{3.133}$$

Свойство 4. Умножение P_B справа на исходную матрицу B дает нулевую матрицу. Действительно,

$$P_B B = 0. \tag{3.134}$$

Свойство 5. Вектор свободных членов переводится в вектор поправок

$$V = P_B l. \tag{3.135}$$

Свойство 6. Матрица P_B преобразует разность векторов поправок V и свободных членов $V_0 = l$ в нулевой вектор

$$P_B (V - V_0) = 0. \tag{3.136}$$

6. Исследуем матрицу $Q_A = E - U_A$. Матрица Q_A является квадратной порядка n. Обладает свойством $Q_A = Q_A^2$. Ранг $(U_A) = r$. Умножая U_A слева и справа на ортогональные матрицы $Q^{-\frac{1}{2}}$ и $Q^{\frac{1}{2}}$, получаем подобную ей матрицу

$$\tilde{U}_A = Q^{\frac{1}{2}} A' (AQA')^{-1} A Q^{\frac{1}{2}},$$

обладающую свойствами симметрии и $\tilde{U}_A = \tilde{U}_A^2$.

Для симметрической матрицы найдется ортогональная матрица, приводящая ее к диагональной матрице в форме

$$F' \tilde{U}_A F = \Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}.$$

Как уже отмечалось, при подобных преобразованиях ранг и след матрицы не изменяются, так что ранг $(U_A) =$ ранг $(\tilde{U}_A) =$ ранг $(\Delta) = r$,

$$\mathrm{Sp}\,(U_A) = \mathrm{Sp}\,(\tilde{U}_A) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Пользуясь свойством $\Delta^2 = (F'\tilde{U}_A F)^2 = F'\tilde{U}_A F = \Delta$, устанавливаем, что $\delta_i = 0$; 1. Конечно, число $\delta_i = 1$ равно рангу матрицы U_A, т. е. равно числу r.

Приведем матрицу Q_A к диагональному виду теми же приемами, что и матрицу $\tilde{U}_A$

$$F' Q^{-\frac{1}{2}} (E - U_A)\, Q^{\frac{1}{2}} F = E - F' \tilde{U}_A F = E - \Delta =$$

$$= \{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \ldots \tilde{\delta}_n\}.$$

Заметим, что $\tilde{\delta}_i = 0;\ 1$. При этом число $\tilde{\delta}_i = 1$ равно $k = n - r$. Следовательно, ранг $(Q_A) = k$.

Сформулируем основные свойства матрицы $Q_A = E - U_A$.

Свойство 1. Матрица Q_A является квадратной порядка n.

Свойство 2. Ранг матрицы Q_A равен ее следу и числу необходимых измерений.

Свойство 3. Многократное умножение Q_A саму на себя не изменяет ее значение, т. е.

$$Q_A = \prod_{i=2}^{\infty} Q_A^i. \tag{3.137}$$

Свойство 4. Умножение Q_A слева на исходную матрицу A дает нулевую матрицу. Действительно,

$$AQ_A = 0. \tag{3.138}$$

Свойство 5. Вектор поправок преобразуется в нулевой вектор. Действительно, умножая (3.90), получаем

$$Q_A V = \mathbf{0}. \tag{3.139}$$

Свойство 6. Корреляционная матрица уравненного вектора при умножении ее слева на матрицу Q_A остается без изменения. Действительно,

$$Q_A Q_L = Q_A Q_A Q = Q_A Q = Q_L. \tag{3.140}$$

Теорема. Произведение матриц A и B уравнений поправок в коррелатном и параметрическом способах равно нулевой матрице.

Для доказательства, умножив уравнение (3.113) на Q_A, воспользуемся свойством 6. Так что

$$Q_A Q_L = (E - QA'(AQA')^{-1}A)B(B'PB)^{-1}B' =$$
$$= B(B'PB)^{-1}B' - QA'(AQA')^{-1}AB(B'PB)^{-1}B'.$$

Учитывая равенства (3.113) и (3.140), находим

$$QA'(AQA')^{-1}AB(B'PB)^{-1}B' = 0.$$

Это равносильно условию

$$AB = 0. \tag{3.141}$$

7. Перечислим свойства матрицы $U_A = QA'(AQA')^{-1}A$.

Свойство 1. Матрица U_A является квадратной порядка n.

Свойство 2. Ранг матрицы U_A равен ее следу и равен r — числу избыточных измерений.

Свойство 3. Многократное умножение U_A саму на себя не изменяет ее изменение, т. е.

$$U_A = \prod_{i=2}^{\infty} U_A^i. \tag{3.142}$$

Свойство 4. Умножение исходной матрицы A справа на матрицу U_A не изменяет значение исходной, т. е.

$$AU_A = A. \tag{3.143}$$

Свойство 5. Матрица U_A преобразует вектор истинных ошибок уравненного вектора в нулевой вектор. Действительно, умножая левую и правую части уравнения (3.91), получаем

$$U_A(\mathbf{L} - \overset{0}{\mathbf{L}}) = \mathbf{0}. \tag{3.144}$$

8. Матрица $U_B = B\,(B'PB)^{-1}BP$ обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Матрица U_B является квадратной порядка n.

Свойство 2. Ранг матрицы U_B равен ее следу и равен k — числу необходимых измерений (параметров).

Свойство 3. Многократное умножение матрицы U_B саму на себя не изменяет ее значение, т. е.

$$U_B = \prod_{i=2}^{\infty} U_B^i. \tag{3.145}$$

Свойство 4. Умножение исходной матрицы B слева на матрицу U_B не изменяет значение исходной, т. е.

$$U_B B = B. \tag{3.146}$$

Свойство 5. Матрица U_B преобразует вектор поправок $\mathbf{V}$ в нулевой вектор, т. е.

$$U_B \mathbf{V} = \mathbf{0}. \tag{3.147}$$

Методу исследований матриц U_A, U_B, Q_A, P_B, рассмотренную нами ранее, можно применить и к матрицам (3.53), (3.56), (3.66), (3.73) и (3.76). С подобными матрицами мы встретимся и в других главах книги.

Матрицы U_A, U_B, Q_A, P_B называются операторами проектирования.

9. В заключение изучим особенности оценок в способе условий с дополнительными параметрами.

Известные соотношения

$$\begin{gathered} AV + B\delta X + W = 0, \\ B'K = 0,\ V = QA'K, \\ AQA'K + W = 0 \end{gathered} \tag{3.148}$$

приводят к формулам $V'PV = V'A'K = -(\delta X'B' + W')\,K$. Откуда

$$V'PV = -W'K. \tag{3.149}$$

Запишем формулы (3.148) и (3.149) в блочной форме

$$\begin{bmatrix} AQA' & B & W \\ B' & 0 & 0 \\ W' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ \delta X \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -V'PV \end{bmatrix}. \tag{3.150}$$

Из уравнения (3.150) следует, что в способе условий с дополнительными параметрами функции минимума $V'PV$, как и в способе коррелат, можно вычислить в столбце свободных членов в схеме решения нормальных уравнений.

Рассмотрим оценку функции Φ уравниваемых величин L, заданной в форме

$$\Phi = FL + F_0.$$

Исключая $L = L' + V$, получаем

$$\Phi = FL' + FV + F_0,$$

$$V = -QA'(AQA')^{-1}(B\delta X + W),$$

$$\Phi = FL' - FQA'(AQA')^{-1}(B\delta X + W) + F_0. \qquad (3.151)$$

Представив свободный член через истинные поправки

$$W = -A(\overset{0}{L} - L') - B\delta X,$$

уравнение (3.151) запишем в виде

$$\Phi = F(E - QA'(AQA')^{-1}A)L + FQA'(AQA')^{-1}A\overset{0}{L} + F_0. \qquad (3.152)$$

Обратный вес функции

$$Q_\Phi = F'(E - QA'(AQA')^{-1}A)F. \qquad (3.153)$$

Таким образом, обратный вес функции Q_Φ вычисляют по тем же правилам, по которым вычисляли обратный вес функции в способе коррелат.

Ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r_0 - k_0}}, \qquad (3.154)$$

где $(r_0 - k_0)$ — число независимых условий; r_0, k_0 — число условных уравнений и дополнительных параметров. Действительно, чтобы решить задачу однозначно, каждому новому параметру выделяем одно дополнительное условное уравнение. Следовательно, число независимых условий равно числу всех условных уравнений минус число k_0 дополнительных параметров.