§ 4. Системы координат

1. Основные определения

1. Системы координат, применяемые в теории и практике обработки измерений в геодезических сетях, можно разделить на две группы: прямолинейная прямоугольная система координат * (двухмерная — на плоскости, трехмерная — в пространстве), полярная система координат (двухмерная — на поверхности сферы или эллипсоида, трехмерная — в пространстве).

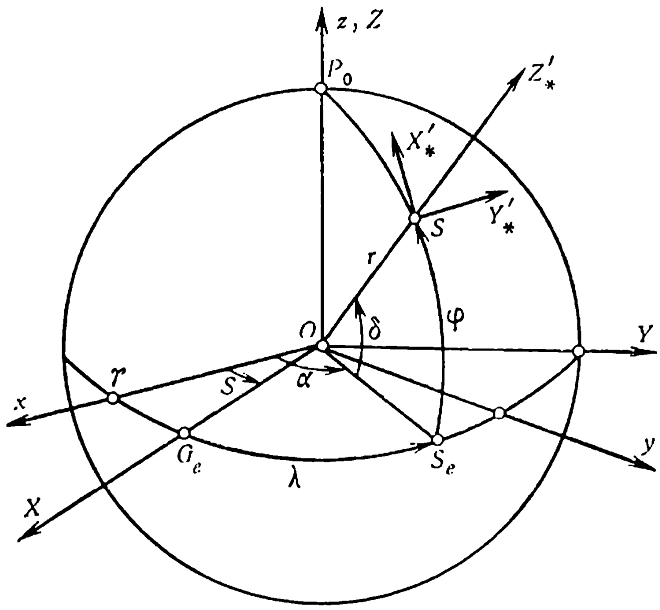


Рис. 1.
Геоцентрические экваториальные и объектоцентрические горизонтные координаты

r — радиус, α — прямое восхождение, δ — склонение, λ — долгота, φ — широта объекта S в звездной и земной системах координат

Систему координат, начало которой совпадает (почти совпадает) с центром масс Земли, называют геоцентрической (квазигеоцентрической) системой. По этой классификации координаты, связанные с общим земным эллипсоидом, будут геоцентрическими, а координаты, связанные с референц-эллипсоидом — квазигеоцентрическими.

Систему координат, начало которой совмещено с точкой земной поверхности или околоземного пространства, называют топоцентрической системой. В частном случае, систему координат, начало которой совмещено с центром небесного объекта, называют объектоцентрической системой. При этом отличают гелиоцентрическую (начало в центре масс Солнца), планетоцентрическую (начало в центре масс планеты) и селеноцентрическую (начало в центре масс Луны) системы координат.

В зависимости от выбора основной координатной плоскости различают экваториальную (экватор или плоскость, параллельная экватору), горизонтальную (плоскость местного горизонта) и орбитальную (плоскость орбиты небесного объекта) системы координат.

2. В геоцентрической экваториальной системе оси координат задаются по отношению характерных точек земной поверхности или небесной сферы. На рис. 1 ось Z (z) направлена на северный полюс Земли. Если при этом ось X направлена в точку Гринвича G_e (в точку пересечения гринвичского меридиана с экватором), то получим систему координат XYZ, которая, участвуя в суточном вращении Земли, остается неподвижной относительно точек земной поверхности. Эта система координат удобна для определения положения точек земной поверхности и изучения фигуры Земли. Назовем ее земной системой координат.

Направляя ось x (см. рис. 1) в точку весеннего равноденствия ♈, получим систему координат xyz, не связанную с суточным вращением Земли, удобную для изучения движения небесных

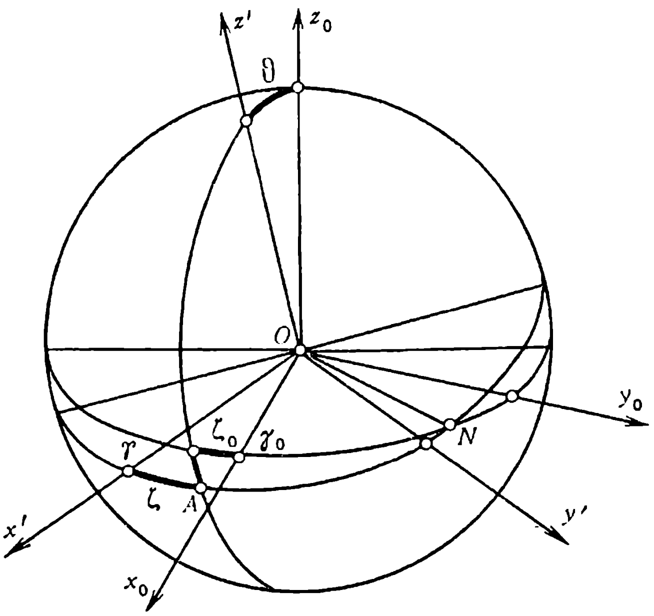


Рис. 2.
Прецессионные углы ζ_0, ζ, θ

объектов. Хотя ее начало перемещается в мировом пространстве с некоторым ускорением, участвуя в годовом движении Земли вокруг Солнца и в движении Солнца в Галактике, это движение относительно далеких звезд можно считать инерциальным, т. е. равномерным и прямолинейным. Поэтому движение околоземного небесного объекта в системе координат xyz можно изучать, пользуясь законами механики, выводимыми для инерциальной системы по отношению далеких звезд. Систему координат xyz назовем звездной системой координат.

3. Из-за прецессии и нутации оси вращения Земли и колебания Земли вокруг своей оси (движения полюсов) основные плоскости и оси координат с течением времени изменяют свои направления в пространстве. Поэтому для экваториальных геоцентрических координат указывают момент времени, на который установлена данная система координат, и параметры преобразования координат в функции времени.

Система координат и координаты звезд в фундаментальных каталогах задаются на начало выбранного года, т. е. на определенную среднюю эпоху. Систему координат и координаты на момент наблюдения называют соответственно мгновенной (истинной) системой координат и мгновенными (истинными) координатами.

Переход от звездных геоцентрических экваториальных координат x_0, y_0, z_0 средней эпохи T_0 к соответствующим координатам x, y, z на момент наблюдения T осуществляется преобразованием координат за прецессию и нутацию.

Углы прецессии ζ_0, ζ, ϑ, указанные на рис. 2, определяются по формулам Ньюкома—Андуайе:

$$\zeta_0 = (2304{,}253'' + 1{,}3973''T_0 + 0{,}00006''T_0^2)\,\tau +$$

$$+ (0{,}3023'' - 0{,}0027''T_0)\,\tau^2 + 0{,}0180''\tau^3;$$

$$\zeta = (2304{,}253'' + 1{,}3973''T_0 + 0{,}00006''T_0^2)\,\tau +$$

$$+ (1{,}0950'' + 0{,}0039''T_0)\,\tau^2 + 0{,}01832''\tau^3;$$
$$\vartheta = (2004{,}685'' - 0{,}8533''T_0 - 0{,}00037''T_0^2)\,\tau -$$
$$- (0{,}4267'' + 0{,}0037''T_0)\,\tau^2 - 0{,}04180''\tau^3; \qquad (4.1)$$
$$\tau = T - T_0.$$

В этих формулах эпохи T_0 и T выражены в тропических столетиях, отсчитываемых от начальной эпохи 1900,0.

Координаты x', y', z' (см. рис. 2) получим тремя последовательными вращениями — на ζ_0 в плоскости Ox_0y_0, на угол ϑ в плоскости OAz_0 и на угол ζ в плоскости $Ox'N$. В результате для координат x', y', z' на эпоху T получим формулу

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \qquad (4.2)$$

где матрица прецессии

$$P = \begin{bmatrix} \cos\zeta & -\sin\zeta & 0 \\ \sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\zeta_0 & -\sin\zeta_0 & 0 \\ \sin\zeta_0 & \cos\zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

имеет элементы:

$$p_{11} = \cos\zeta_0\cos\zeta\cos\vartheta - \sin\zeta_0\sin\zeta;$$
$$p_{12} = -\sin\zeta_0\cos\zeta\cos\vartheta - \cos\zeta_0\sin\zeta;$$
$$p_{13} = -\cos\zeta\sin\vartheta;$$
$$p_{21} = \cos\zeta_0\sin\zeta\cos\vartheta + \cos\zeta\sin\zeta_0;$$
$$p_{22} = -\sin\zeta_0\sin\zeta\cos\vartheta + \cos\zeta_0\cos\zeta; \qquad (4.4)$$
$$p_{23} = -\sin\zeta_0\sin\vartheta;$$
$$p_{31} = \cos\zeta_0\sin\vartheta;$$
$$p_{32} = -\sin\zeta_0\sin\vartheta;$$
$$p_{33} = \cos\vartheta.$$

Преобразованные координаты x', y', z' называют средними координатами на эпоху T.

Для перехода от средних координат x', y', z' к истинным координатам x, y, z необходимо учесть влияние составляющих нутаций по долготе $\delta\psi$ и по наклонению $\delta\varepsilon_0$. Представив $\delta\psi$ двумя составляющими — по прямому восхождению через $\delta\psi\cos\varepsilon$ и по склонению через $\delta\psi\sin\varepsilon$ и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \qquad (4.5)$$

где матрица нутации N имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned}
&n_{11} = 1; && n_{12} = -\delta\psi\cos\varepsilon; && n_{13} = -\delta\psi\sin\varepsilon;\\
&n_{21} = \delta\psi\cos\varepsilon; && n_{22} = 1; && n_{23} = -\delta\varepsilon;\\
&n_{31} = \delta\psi\sin\varepsilon; && n_{32} = \delta\varepsilon; && n_{33} = 1.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

С учетом выражений (4.2) и (4.5) имеем

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = NP \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Ввиду ортогональности преобразования для обратного перехода имеем

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = P'N' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

где P' и N' — транспонированные матрицы от исходных P и N.

2. Сферические и эллипсоидные координаты и связь их с декартовыми координатами

1. Геоцентрические декартовые координаты (см. рис. 1) связаны с соответствующими геоцентрическими сферическими координатами следующим образом:

$$\begin{aligned}
X &= r\cos\varphi\cos\lambda,\\
Y &= r\cos\varphi\sin\lambda,\\
Z &= r\sin\varphi.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\delta\cos\alpha,\\
y &= r\cos\delta\sin\alpha,\\
z &= r\sin\delta.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

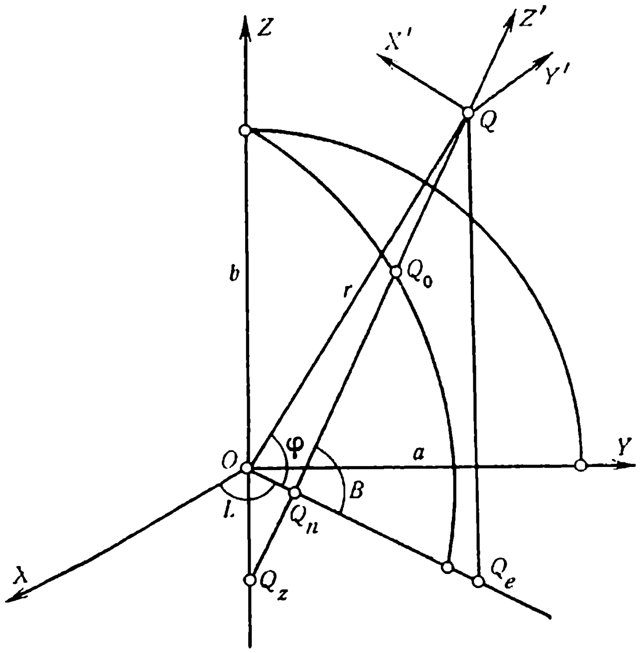
$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\lambda = \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\\
&\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\delta = \frac{Z}{D} = \frac{z}{D},\\
&D = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{x^2 + y^2},\\
&r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Подставляя в выражения (4.9) значения $\lambda = \alpha - S$ и учитывая уравнения (4.10), находим

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

Рис. 3.
Эллипсоидальные координаты B, L, H относительно земного эллипсоида с полуосями a и b

B, L, $H = Q_0 Q$ соответственно геодезические широта, долгота и высота объекта; $Q_zQ_0 = N$ — радиус кривизны первого вертикала; $Q_zQ_n = N(a^2 - b^2)/a^2 = e^2N$



где матрица поворота, элементы которой есть функция звездного времени S на Гринвиче

$$S = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Ввиду ортогональности преобразования для обратного перехода имеем

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = S' \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

2. Из рис. 3 следует:

$$\begin{aligned} X &= (N + H)\cos B \cos L, \\ Y &= (N + H)\cos B \sin L, \\ Z &= (N + H - e^2N)\sin B. \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{D - e^2N\cos B}{Z}, \quad \operatorname{tg} L = \frac{Y}{X}. \tag{4.15}$$

$$H = D\sec B - N = Z\operatorname{cosec} B - (1 - e^2)N, \quad D = \sqrt{X^2 + Y^2}. \tag{4.16}$$

Широта B вычисляется по итерационной формуле. Пользуясь известными соотношениями

$$N = a(1 - e^2\sin^2 B)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sin^2 B = \operatorname{tg}^2 B(1 + \operatorname{tg}^2 B)^{-1}$$

и исключая из формулы (4.15) значение $N \cos B$, получаем итерационную формулу, удобную для ЭВМ:

$$\operatorname{tg} B_{(k)} = \frac{Z}{D - e^2 a\left[1 - (1 - e^2)\operatorname{tg}^2 B_{(k-1)}\right]^{-\frac{1}{2}}}, \quad \text{если } D > Z,$$

$$\operatorname{ctg} B_{(k)} = \frac{D - e^2 a \operatorname{ctg} B_{k-1}\left(1 - e^2 + \operatorname{ctg}^2 B_{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{Z}, \quad \text{если } D \leqslant Z, \tag{4.17}$$

k — номер итерации.

Из уравнения (4.15) имеем

$$\operatorname{ctg} B = \frac{D}{Z}(1 - e^2) + \frac{e^2 H \cos B}{Z}.$$

Следовательно, широту точки Q_0 ($H = 0$), лежащей на поверхности эллипсоида, можно вычислять по формуле

$$\operatorname{ctg} B = \frac{D}{Z}(1 - e^2), \tag{4.18}$$

не прибегая к итерациям.

Конечно, формула (4.18) будет весьма приближенной для объекта, достаточно удаленного от поверхности эллипсоида. На это обстоятельство не обратили внимания авторы монографии [52, с. 85], предлагая неитерационные формулы, эквивалентные формулам (4.18) по точности.

3. Связь плоских декартовых координат x, y в проекции Гаусса и эллипсоидальных координат B, L рассмотрена подробно в учебниках и руководствах. Приведем необходимые формулы в конечном виде:

$$x = X + \frac{l^2}{2} r \sin B\left[1 - \frac{l^2}{12}\left(1 - 6\cos^2 B - 9e'^2\cos^4 B -\right.\right.$$

$$\left. - 4e'^2\cos^6 B\right) + \frac{1}{360} l^4\left(1 - 60\cos^2 B + 120\cos^4 B -\right.$$

$$\left.\left. - 330e'^2\cos^4 B + 600e'^2\cos^6 B\right) + \cdots\right];$$

$$y = rl\left[1 - \frac{l^2}{6}\left(1 - 2\cos^2 B - e'^2\cos^4 B\right) +\right.$$

$$+ \frac{l^4}{120}\left(1 - 20\cos^2 B + 24\cos^4 B - 58e'^2\cos^4 B +\right.$$

$$\left.\left. + 72e'^2\cos^6 B - 64e'^4\cos^4 B + 128e'^4\cos^6 B\right) + \cdots\right],$$

$$X = c\left[A_0 B + (A_2 + A_4\cos^2 B + A_6\cos^4 B +\right.$$

$$\left. + A_8\cos^6 B + \cdots)\cos B\sin B\right];$$

$$A_0 = 1 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{45}{64}e'^4 - \frac{175}{256}e'^6 + \frac{11025}{16384}e'^8 + \cdots,$$

$$A_2 = A_0 - 1;$$

$$A_4 = \frac{15}{32} e'^4 - \frac{175}{384} e'^6 + \frac{3675}{8192} e'^8 + \cdots;$$

$$A_6 = -\frac{35}{96} e'^6 + \frac{735}{2048} e'^8 + \cdots;$$

$$A_8 = \frac{315}{1024} e'^8 + \cdots. \qquad (4.19)$$

$$B = B_0 - (1 + e'^2 \cos^2 B_0) \sin B_0 \times$$

$$\times \cos B_0 \lambda^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos^2 B_0 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 B_0 + \frac{5}{3} e'^2 \cos^4 B_0 \right) + \lambda^4 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{45} \cos^4 B_0 \right) + \cdots \right];$$

$$l = \lambda \left[1 - \frac{\lambda^2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 B_0 + \frac{1}{2} e'^2 \cos^4 B_0 \right) + \right.$$

$$+ \frac{\lambda^4}{5} \left(1 - \frac{5}{6} \cos^2 B_0 + \frac{1}{24} \cos^4 B_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} e'^2 \cos^4 B_0 - \frac{1}{12} e'^2 \cos^6 B_0 + \cdots \right];$$

$$\lambda = \frac{y}{r_0};$$

$$r_0 = a \cos B_0 (1 - e^2 \sin^2 B_0)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4.20)$$

Широта B_0 вычисляется по итерационной формуле

$$B_0 = \frac{1}{A_0} \left[\frac{x}{c} - (A_2 + A_4 \cos^2 B_0 + \right.$$

$$\left. + A_6 \cos^4 B_0 + A_8 \cos^6 B_0) \cos B_0 \sin B_0 \right].$$

Исследования формул (4.19) и (4.20) на ЭВМ показали, что они обеспечивают преобразование координат в пределах зоны $l \leqslant 3° 30'$ с точностью 0,001 м.

3. Объектоцентрические и топоцентрические горизонтные координаты

1. На рис. 1 начало объектоцентрической горизонтной системы координат S совмещено с центром объекта, ось Z'_* продолжает геоцентрический радиус r, ось X'_* лежит в плоскости меридиана объекта S и направлена на север, ось Y'_* дополняет левую декартову систему координат.

Переход от объектоцентрической горизонтной к звездной геоцентрической экваториальной системе координат осуществляется двумя поворотами на угол $(90 - \delta)$ вокруг оси Y'_* и на угол α вокруг оси z, т. е.

$$\begin{bmatrix} x - x_S \\ y - y_S \\ z - z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\delta & 0 & \cos\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\delta & 0 & \sin\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_* \\ Y'_* \\ Z'_* \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} x - x_S \\ y - y_S \\ z - z_S \end{bmatrix} = A_{\alpha\delta} \begin{bmatrix} X'_* \\ Y'_* \\ Z'_* \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Матрица поворота $A_{\alpha\delta}$ имеет элементы:

$$\begin{aligned} &a_{11} = -\sin\delta\cos\alpha; \quad && a_{12} = -\sin\alpha; \quad && a_{13} = \cos\delta\cos\alpha; \\ &a_{21} = -\sin\delta\sin\alpha; && a_{22} = \cos\alpha; && a_{23} = \cos\delta\sin\alpha; \\ &a_{31} = \cos\delta; && a_{32} = 0; && a_{33} = \sin\delta. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Обратный переход

$$\begin{bmatrix} X'_* \\ Y'_* \\ Z'_* \end{bmatrix} = A'_{\alpha\delta} \begin{bmatrix} x - x_S \\ y - y_S \\ z - z_S \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

где $A'_{\alpha\delta}$ — транспонированная матрица.

По аналогии для земной геоцентрической экваториальной системы координат имеем:

$$\begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix} = A_{\lambda\varphi} \begin{bmatrix} X'_* \\ Y'_* \\ Z'_* \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

$$\begin{bmatrix} X'_* \\ Y'_* \\ Z'_* \end{bmatrix} = A'_{\lambda\varphi} \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

где $A'_{\lambda\varphi}$ — транспонированная матрица.

Матрица поворота $A_{\lambda\varphi}$ имеет элементы:

$$\begin{aligned} &a_{11} = -\sin\varphi\cos\lambda; \quad && a_{12} = -\sin\lambda; \quad && a_{13} = \cos\varphi\cos\lambda; \\ &a_{21} = -\sin\varphi\sin\lambda; && a_{22} = \cos\lambda; && a_{23} = \cos\varphi\sin\lambda; \\ &a_{31} = \cos\varphi; && a_{32} = 0; && a_{33} = \sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.26}$$

2. На рис. 3 начало топоцентрической горизонтной системы координат совмещено с объектом Q; ось Z' направлена по нормали к эллипсоиду в сторону увеличения высот; ось X' лежит в плоскости меридиана объекта Q и направлена на север; ось Y' дополняет левую декартовую систему координат.

Все необходимые формулы запишем по аналогии, пользуясь формулами (4.24)—(4.26),

$$\begin{bmatrix} X - X_Q \\ Y - Y_Q \\ Z - Z_Q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} X - X_Q \\ Y - Y_Q \\ Z - Z_Q \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

где A' — транспонированная матрица.

Матрица поворота A имеет элементы:

$$\begin{aligned} &a_{11} = -\sin B \cos L; \quad a_{12} = -\sin L; \quad a_{13} = \cos B \cos L; \\ &a_{21} = -\sin B \sin L; \quad a_{22} = \cos L; \quad a_{23} = \cos B \sin L; \\ &a_{31} = \cos B; \quad a_{32} = 0; \quad a_{33} = \sin B. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Из формул (4.14) и (4.28) следует, что для некоторой точки Q горизонтные координаты в системе координат точки Q_1 будут вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} X' &= (N + H)[\cos B_1 \sin B - \sin B_1 \cos B \cos(L - L_1)] - \\ &- e^2 (N \sin B - N_1 \sin B_1) \cos B_1; \\ Y' &= (N + H) \cos B \sin(L - L_1); \\ Z' &= (N + H)[\sin B_1 \sin B + \cos B_1 \cos B \cos(L - L_1)] - \\ &- (N_1 + H_1) - e^2 (N \sin B - N_1 \sin B_1) \sin B_1. \end{aligned} \tag{4.30}$$

4. Элементы эллиптической орбиты. Орбитальные координаты

1. Элементы орбиты представляют параметры, характеризующие положение орбиты в пространстве, ее форму и размеры, а также положение небесного объекта на орбите.

Элементы орбиты удобно задать относительно координатной плоскости Oxy, проходящей через центр масс Земли и точки весеннего равноденствия ♈. На рис. 4 прямая ☊O☊$'$, по которой пересекаются координатная плоскость Oxy и плоскость орбиты, называется линией узлов. Когда движение объекта происходит против часовой стрелки, если смотреть из полюса орбиты P_i, точка ☊ называется восходящим узлом, а точка ☊$'$ — нисходящим узлом. Дуга большого круга ♈☊, обозначаемая через ☊, называется долготой восходящего узла или просто долготой узла. Дуга большого круга $P'P$ или угол, под которым плоскость орбиты пересекает координатную плоскость Oxy, называется наклоном орбиты и обозначается через i. Дуга большого круга ☊П, обозначаемая через ω, называется угловым расстоянием перигея П от

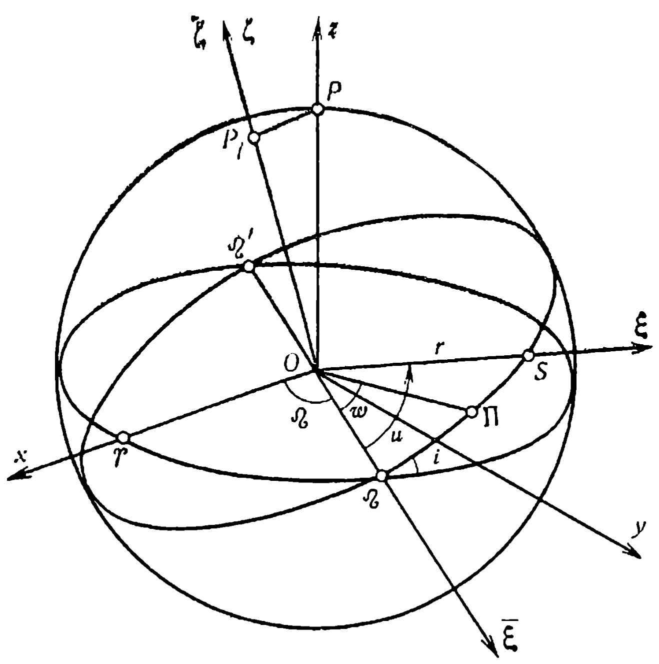


Рис. 4.
Элементы эллиптической орбиты и орбитальные координаты

узла (аргументом перигея). Форма и размеры орбиты задаются эксцентриситетом e и большой полуосью a. Углы Ω, i определяют положение плоскости орбиты относительно основной координатной плоскости, а угол w— ориентацию орбиты в этой плоскости. Для определения положения небесного объекта S на орбите вводится шестой элемент τ — момент прохождения небесного объекта через точку перигея П.

Заметим, что положение небесного объекта в плоскости орбиты (см. рис. 4) можно задать полярными координатами относительно линии узлов: углом u, называемым аргументом широты, и геоцентрическим радиусом r небесного объекта.

Элементы a, e, i, Ω, w, τ называются кеплеровскими элементами. Для планет за основную плоскость обычно принимают плоскость эклиптики, для околоземных небесных объектов — плоскость экватора. В первом случае кеплеровские элементы орбиты называются эклиптическими, во втором — экваториальными.

2. Рассмотрим орбитальные координаты, приняв плоскость экватора за основную плоскость Oxy. Оси неподвижных геоцентрических орбитальных координат определим следующим образом: ось $\bar{\zeta}$ направлена на полюс орбиты P_i; ось $\bar{\xi}$ направлена в точку восходящего узла Ω; ось $\bar{\eta}$ дополняет правую декартовую систему координат.

Геоцентрические орбитальные координаты преобразуем в геоцентрические экваториальные координаты по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_{\Omega i} \begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\zeta} \end{bmatrix}, \tag{4.31}$$

где матрица преобразования

$$A_{\Omega i}=\begin{bmatrix}\cos\Omega & -\sin\Omega & 0\\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & -\sin i\\ 0 & \sin i & \cos i\end{bmatrix}$$

имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned}&a'_{11}=\cos\Omega; && a'_{12}=-\sin\Omega\cos i; && a'_{13}=\sin\Omega\sin i;\\ &a'_{21}=\sin\Omega; && a'_{22}=\cos\Omega\cos i; && a'_{23}=-\cos\Omega\sin i;\\ &a'_{31}=0; && a'_{32}=\sin i; && a'_{33}=\cos i.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Обратный переход осуществляется с помощью транспонированной матрицы $A_{\Omega i}$ по формуле

$$\begin{bmatrix}\bar\xi\\ \bar\eta\\ \bar\zeta\end{bmatrix}=A'_{\Omega i}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.\tag{4.33}$$

3. Подвижную геоцентрическую орбитальную систему координат определяем следующим образом: ось ζ направлена на полюс орбиты P_i; ось ξ направлена по геоцентрическому радиусу; ось η лежит в плоскости орбиты, дополняя правую декартовую систему координат.

Неподвижные орбитальные координаты $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$ (см. рис. 4) связаны с подвижными орбитальными координатами ξ, η, ζ следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\bar\xi\\ \bar\eta\\ \bar\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos u & -\sin u & 0\\ \sin u & \cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}=A_u\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}.\tag{4.34}$$

Пользуясь формулами (4.31) и (4.34), получаем формулы перехода от подвижных орбитальных координат к экваториальным координатам

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}.\tag{4.35}$$

Матрица $A=A_{\Omega iu}$ имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned}&a_{11}=\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i;\\ &a_{12}=-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i;\\ &a_{13}=\sin\Omega\sin i;\\ &a_{21}=\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i;\\ &a_{22}=-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i;\end{aligned}\tag{4.36}$$

$$a_{23} = -\cos \Omega \sin i;$$

$$a_{31} = \sin u \sin i;$$

$$a_{32} = \cos u \sin i;$$

$$a_{33} = \cos i.$$

Обратный переход осуществляется с помощью транспонированной матрицы A' по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Подвижные орбитальные координаты небесного объекта $\xi = r$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Следовательно, экваториальные координаты небесного объекта, согласно формулам (4.35) и (4.36),

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \tag{4.38}$$

§ 5. Основные дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные формулы, связывающие эллипсоидальные, экваториальные и топоцентрические горизонтные декартовые координаты

1. Пользуясь уравнением (4.14), находим полные дифференциалы:

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial B} dB + \frac{\partial X}{\partial L} dL + \frac{\partial X}{\partial H} dH; \\ dY &= \frac{\partial Y}{\partial B} dB + \frac{\partial Y}{\partial L} dL + \frac{\partial Y}{\partial H} dH; \\ dZ &= \frac{\partial Z}{\partial B} dB + \frac{\partial Z}{\partial L} dL + \frac{\partial Z}{\partial H} dH. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Предварительно найдем производные двух функций

$$\frac{d}{dB}(N \cos B) = \frac{dN}{dB} \cos B - N \sin B,$$

$$\frac{d}{dB}(N \sin B) = \frac{dN}{dB} \sin B + N \cos B.$$

Поскольку

$$\frac{dN}{dB} = \frac{d}{dB}\left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}\right) = \frac{e^2 N \cos B \sin B}{1 - e^2 \sin^2 B}$$

и радиус кривизны меридианного эллипса M связан с радиусом кривизны сечения первого вертикала формулой

$$M = \frac{(1 - e^2) N}{1 - e^2 \sin^2 B},$$

то соответственно

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dB}(N \cos B) = -\frac{(1 - e^2) N \sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} = -M \sin B, \\ &\frac{d}{dB}(N \sin B) = \frac{N \cos B}{1 - e^2 \sin^2 B} = \frac{M \cos B}{1 - e^2}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

После этого нетрудно записать искомые частные производные

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial B} = -(M + H) \sin B \cos L, && \frac{\partial Y}{\partial B} = -(M + H) \sin B \sin L, \\ &\frac{\partial X}{\partial L} = -(N + H) \cos B \sin L, && \frac{\partial Y}{\partial L} = (N + H) \cos B \cos L, \\ &\frac{\partial X}{\partial H} = \cos B \cos L, && \frac{\partial Y}{\partial H} = \cos B \sin L, \\ &\frac{\partial Z}{\partial B} = (M + H) \cos B, && \frac{\partial Z}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial H} = \sin B. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Пользуясь формулами (5.1) и (5.3), дифференциальные формулы, связывающие эллипсоидальные и экваториальные декартовые координаты, записываем в виде

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} (M + H)\, dB \\ (N + H) \cos B\, dL \\ dH \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Матрица преобразования координат A имеет элементы

$$\begin{aligned} &a_{11} = -\sin B \cos L; && a_{12} = -\sin L; && a_{13} = \cos B \cos L; \\ &a_{21} = -\sin B \sin L; && a_{22} = \cos L; && a_{23} = \cos B \sin L; \\ &a_{31} = \cos B; && a_{32} = 0; && a_{33} = \sin B. \end{aligned} \tag{5.5}$$

2. Элементы матрицы A (5.5) точно соответствуют элементам (4.29). Действительно, по определению топоцентрических горизонтных координат их малые приращения связаны с малыми приращениями эллипсоидальных координат в окрестности точки Q следующим образом:

$$\begin{bmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M + H)\, dB \\ (N + H) \cos B\, dL \\ dH \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Из выражения (4.27) следует, что

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Обратное преобразование

$$\begin{bmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

2. Дифференциальные изменения координат произвольной точки Q_i в системе координат начальной точки

Пусть δR_i представляет малые изменения экваториальных координат точки Q_i. Тогда, согласно формуле (5.8), эти изменения в системе топоцентрических горизонтных координат начальной точки будут представлены формулой

$$(\delta R_i')_1 = A_1'\delta R_i.$$

Исключив δR_i с помощью выражения (5.6), получим дифференциальную формулу

$$(\delta R_i')_1 = A_1' A_i \delta R_i' \tag{5.9}$$

для преобразования малых изменений топоцентрических горизонтных координат $\delta R_i'$ точки Q_i в топоцентрическую горизонтную систему начальной точки Q_1.

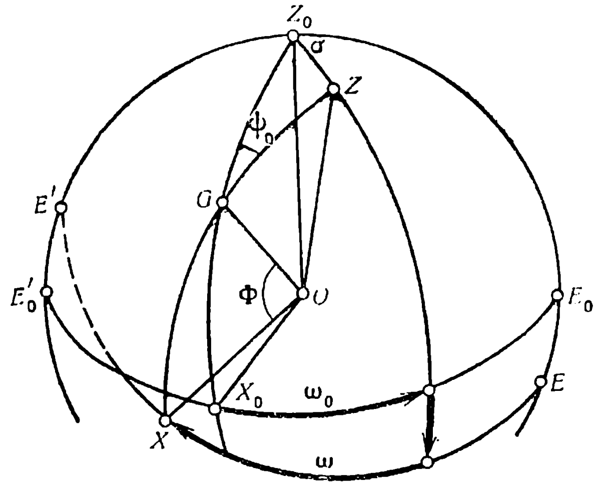
При этом, умножая матрицы A_1' и A_i с известными элементами (5.4), находим матрицу преобразования $B_i = A_1' A_i$, элементы которой соответственно равны:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \cos B_1 \cos B_i + \sin B_1 \sin B_i \cos (L_i - L_1);\\
b_{12} &= \sin B_1 \sin (L_i - L_1);\\
b_{13} &= \cos B_1 \sin B_i - \sin B_1 \cos B_i \cos (L_i - L_1);\\
b_{21} &= - \sin B_i \sin (L_i - L_1);\\
b_{22} &= \cos (L_i - L_1);\\
b_{23} &= \cos B_i \sin (L_i - L_1);\\
b_{31} &= \sin B_1 \cos B_i - \cos B_1 \sin B_i \cos (L_i - L_1);\\
b_{32} &= - \cos B_1 \sin (L_i - L_1);\\
b_{33} &= \sin B_1 \sin B_i + \cos B_1 \cos B_i \cos (L_i - L_1).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

3. Линейный сдвиг и вращение

1. Пусть референцная система X, Y, Z определена в другой референцной системе X_0, Y_0, Z_0 положением начала координат dx_0, dy_0, dz_0 и эйлеровыми углами ω_0, σ, ω, показанными на рис. 5.

Рис. 5.
Эйлеровые углы двух систем координат



В такой постановке координаты из одной системы в другую будут преобразованы по формулам:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X_0 - dx_0 \\ Y_0 - dy_0 \\ Z_0 - dz_0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} + P' \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Элементы матрицы P можно вычислить по формулам (4.4), приняв $\omega_0 = -\zeta_0$, $\sigma = \theta$, $\omega = \zeta$.

В референцных системах углы σ и $\omega - \omega_0$ малы. Поэтому в формулах (4.4), учитывая только члены первого порядка малости и введя малые углы ξ_0, η_0, ν_0, связанные с эйлеровыми углами соотношениями

$$\begin{aligned} &\xi_0 = \sigma \cos \omega_0; \quad \eta_0 = \sigma \sin \omega_0; \quad \omega_0 = \operatorname{arctg} \frac{\eta_0}{\xi_0}; \\ &\sigma = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}; \quad \nu_0 = \omega - \omega_0, \end{aligned} \tag{5.12}$$

получим матрицу P через новые малые параметры

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_0 & -\xi_0 \\ \nu_0 & 1 & -\eta_0 \\ \xi_0 & \eta_0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Пользуясь рис. 5, получаем

$$\sin \psi_0 = \frac{\sin \sigma \sin \omega_0}{\cos \Phi} = \frac{\sin (\omega - \omega_0)}{\sin \Phi}.$$

Отсюда

$$\nu_0 = \eta_0 \operatorname{tg} \Phi.$$

Наличие долготного разворота $\nu_0 = \omega - \omega_0$ показывает, что в двух референцных системах нульпункты счета долгот на экваторе лежат в разных точках. К примеру, если начальные меридианы проходят через Гринвич, то $\nu_0 = 1{,}25\eta_0$. Если же нульпункты счета долгот совмещены на экваторе, то $\Phi = 0$ и долготный параметр ν_0 будет отсутствовать.

2. Представив выражение (5.11) в обычной записи

$$\begin{aligned} dX &= X - X_0 = -dx_0 - \nu_0 Y_0 - \xi_0 Z_0, \\ dY &= Y - Y_0 = -dy_0 + \nu_0 X_0 - \eta_0 Z_0, \\ dZ &= Z - Z_0 = -dz_0 + \xi_0 X_0 + \eta_0 Y_0, \end{aligned} \tag{5.14}$$

рассмотрим решение обратной задачи.

Каждый пункт Q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), координаты которого известны в двух референцных системах, доставит систему (5.14) из трех уравнений. При $n > 2$ система уравнений (5.14) будет переопределенной и несовместной из-за влияния погрешностей положения пунктов в каждой референцной системе. Искомые параметры связи двух референцных систем можно вычислить с полной их оценкой, применив принцип наименьших квадратов.

В частном случае одна из систем может быть и общей земной системой координат, установленной на определенную эпоху.

Можно оценить разномасштабность двух систем. Для этого, умножив правые части выражения (5.11) соответственно на $(1 + \delta m)$ и $(1 - \delta m)$ и выполнив необходимые преобразования, достаточно ввести масштабный коэффициент.

4. Дифференциальные изменения эллипсоидальных координат

1. Малые приращения эллипсоидальных координат B, L, H, из-за переноса центра эллипсоида и ориентирования его по новым осям X, Y, Z можно вычислить, пользуясь ранее выведенными уравнениями (5.8) и (5.14):

$$\begin{bmatrix} (M+H)\,dB \\ (N+H)\cos B\,dL \\ dH \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} -dx_0 - \nu_0 Y_0 - \xi_0 Z_0 \\ -dy_0 + \nu_0 X_0 - \eta_0 Z_0 \\ -dz_0 + \xi_0 X_0 + \eta_0 Y_0 \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

2. Вариации большой полуоси a и сжатия α эллипсоида хотя и не повлияют на пространственные координаты X, Y, Z точки и поэтому не изменят ее геодезическую долготу $L = \operatorname{arctg}(Y : X)$, однако вызовут изменения ее широты и высоты.

Малые приращения широты B и высоты H находим, пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} D &= (N+H)\cos B, \\ Z &= (N+H)\sin B - e^2 N \sin B, \end{aligned} \tag{5.16}$$

вытекающими из (4.14).

Дифференцируя уравнения (5.16) по аргументам B, H, a, α, пользуясь равенством $de^2 \approx 2d\alpha$ и (5.2), находим

$$(M+H)\sin B\,dB - \cos B\,dH = \frac{N}{a}\cos B\,da + \frac{M\sin^2 B}{1-e^2}\cos B\,d\alpha,$$

$$-(M+H)\cos B\,dB - \sin B\,dH = \frac{N}{a}(1-e^2)\sin B\,da +$$

$$+ (M\sin^2 B - 2N)\sin B\,d\alpha.$$

Помножив первую строку на $\sin B$ ($\cos B$), а вторую строку — на $\cos B$ ($\sin B$), исключив член с дифференциалом высоты (широты) и решив относительно dB (dH), найдем:

$$(M+H)\,dB = e^2 \frac{N}{a} \sin B \cos B\, da + \left(N + \frac{M}{1-e^2}\right) \sin B \cos B\, d\alpha,$$

$$dH = -\frac{a}{N}\, da + N \sin^2 B\, d\alpha. \tag{5.17}$$

3. Полные приращения эллипсоидальных координат B, L, H из-за переноса центра, ориентирования по новым осям координат и изменения размеров референц-эллипсоида вычисляем, складывая почленно левые и правые части уравнений (5.15) и (5.17). Умножая при этом на A' уравнение (5.5), находим

$$\begin{aligned}
(M+H)\,dB &= (dx_0 + \nu_0 Y_0 + \xi_0 Z_0) \sin B \cos L + \\
&+ (dy_0 - \nu_0 X_0 + \eta_0 Z_0) \sin B \sin L - \\
&- (dz_0 - \xi_0 X_0 - \eta_0 Y_0) \cos B + e^2 \frac{N}{a} \sin B \cos B\, da + \\
&+ \left(N + \frac{M}{1-e^2}\right) \sin B \cos B\, d\alpha; \\
(N+H) \cos B\, dL &= (dx_0 + \nu_0 Y_0 + \xi_0 Z_0) \sin L - \\
&- (dy_0 - \nu_0 X_0 + \eta_0 Z_0) \cos L; \\
dH &= -(dx_0 + \nu_0 Y_0 + \xi_0 Z_0) \cos B \cos L - \\
&- (dy_0 - \nu_0 X_0 + \eta_0 Z_0) \cos B \sin L - \\
&- (dz_0 - \xi_0 X_0 - \eta_0 Y_0) \sin B - \frac{a}{N}\, da + N \sin^2 B\, d\alpha.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Пользуясь формулами (5.15), (5.17) и 5.5), получим дифференциальные формулы обратной задачи:

$$\begin{aligned}
dx_0 + \nu_0 Y_0 + \xi_0 Z_0 &= (M+H) \sin B \cos L\, dB + (N+H) \times \\
&\times \cos B \sin L\, dL - \left(dH + \frac{N}{a}\, da + \frac{M \sin^2 B}{1-e^2}\, d\alpha\right) \cos B \cos L; \\
dy_0 - \nu_0 X_0 + \eta_0 Z_0 &= (M+H) \sin B \sin L\, dB - \\
&- (N+H) \cos B \cos L\, dL - \left(dH + \frac{N}{a}\, da + \right. \\
&\left. + \frac{M \sin^2 B}{1-e^2}\, d\alpha\right) \cos B \sin L; \\
dz_0 - \xi_0 X_0 - \eta_0 Y_0 &= -(M+H) \cos B\, dB - \\
&- \left[dH + \frac{N}{a}(1-e^2)\, da + (M \sin^2 B - 2N)\, d\alpha\right] \sin B.
\end{aligned} \tag{5.19}$$