# ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ

## § 14. Условные уравнения в сетях триангуляции

В триангуляции, состоящей из $p_1$ определяемых и $p_0$ исходных пунктов, достаточно измерить $p_0 + p_1$ направлений для ориентировки измеренных направлений на каждом пункте и $2p_1$ направлений для засечки каждого определяемого пункта, т. е. достаточно измерить $k = p_0 + 3p_1$ направлений. На практике, как правило, при любом построении геодезической сети измеряют значительно больше направлений. Поэтому в геодезической сети, в которой измерены $n$ направлений, возникают $r = n - k$ условий

$$\Phi_j(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

связывающих все измеренные величины. При этом

$$\beta_i = \beta_i' + v_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$\beta_i'$ — результаты измерений, $v_i$ — поправки к ним.

Система $r$ условных уравнений $\Phi_j$ в общем случае является нелинейной и всегда недоопределенной. Ее решают по методу наименьших квадратов, приведя к линейному виду

$$\Phi_j = \Phi_j^0(\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n') + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial \beta_i}\right)_0 v_i = 0.$$

Предварительные значения функций $\Phi_j^0$, вычисленные по результатам измерений, называют свободными членами (невязками) условных уравнений и обозначают через $W_j$.

Частные производные функций, вычисленные по предварительным значениям аргументов, называют коэффициентами условных уравнений и соответственно обозначают через $a_{ji}$.

Систему условных уравнений поправок запишем в матричной форме

$$AV + W = 0, \tag{14.1}$$

где

$$A(r \times n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_r \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим геометрические условия, которым должны удовлетворять значения измеренных величин в триангуляции.

### 1. Условие фигуры

В замкнутой фигуре, имеющей $n$ внутренних углов, сумма этих углов $\beta_i$ должна равняться $180°(n-2)$, т. е

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i - 180°(n-2) = 0.$$

Условное уравнение поправок

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + W = 0, \tag{14.2}$$

где свободный член

$$W = \sum_{i=1}^{n} \beta'_i - 180°(n-2).$$

Для треугольника

$$v_1 + v_2 + v_3 + W = 0,$$

$$W = \beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 - 180°.$$

Если измерены направления, то

$$(v_{1\cdot 3} - v_{1\cdot 2}) + (v_{2\cdot 1} - v_{2\cdot 3}) + (v_{3\cdot 2} - v_{3\cdot 1}) + W = 0.$$

### 2. Условие горизонта

Сумма измеренных углов на пункте по всему горизонту должна равняться $360°$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i - 360° = 0.$$

Условное уравнение поправок

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + W = 0,$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} \beta'_i - 360°.$$

Такое условие для измеренных направлений не возникает, ибо при любых значениях направлений сумма углов по горизонту, найденных как разности этих направлений, будет равна $360°$. В этом легко убедиться, заменяя поправку каждого угла соответствующими поправками в направления.

Если в сети измерялись направления, а уравниваются углы, то сумма углов по горизонту, вычисленных как разности измеренных направлений, будет равна $360°$. Однако поправками в углы это условие может быть нарушено. Поэтому, если в сети измерялись

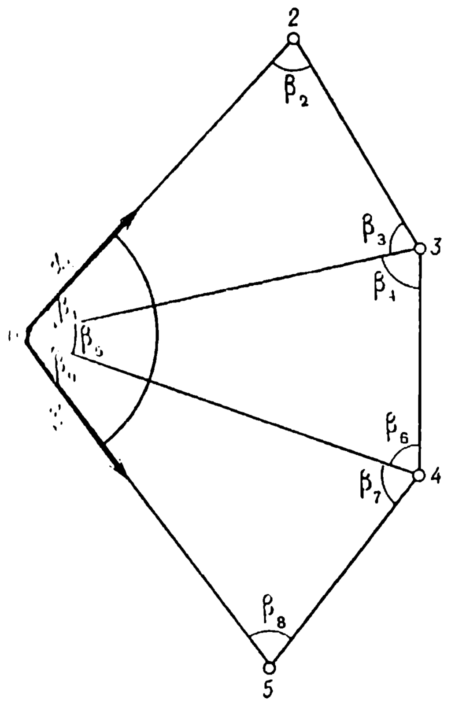
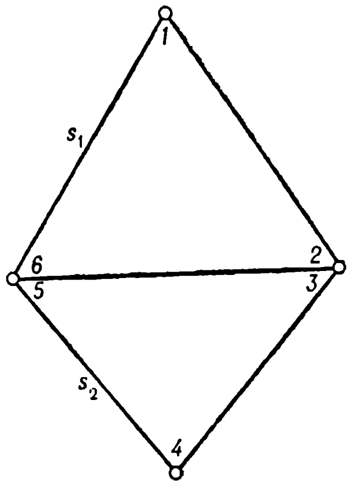



**Рис. 20.**
К выводу угловых условий

**Рис. 21.**
Условие сторон




направления, а уравниваются углы, то условное уравнение горизонта со свободным членом, равным нулю, должно быть включено в уравнивание.

### 3. Условие дирекционных углов

Для вычисления сети достаточно знать исходный дирекционный угол какой-либо одной ее стороны. Если же в сети измерены дирекционные углы других сторон, то каждый измеренный дирекционный угол доставит одно условие.

В фигуре, изображенной на рис. 20, дирекционные углы двух сторон связаны линейным уравнением

$$\alpha_1 + \beta_1 + \beta_5 + \beta_9 = \alpha_2.$$

Отсюда условное уравнение поправок

$$v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2} + v_1 + v_5 + v_9 + W = 0, \qquad (14.3)$$

$$W = \alpha_1' - \alpha_2' + \beta_1' + \beta_5' + \beta_9'.$$

Если один из этих дирекционных углов является исходным, то поправка к такому дирекционному углу будет отсутствовать.

### 4. Условие суммы углов

Для измеренных углов $\beta_1$, $\beta_5$, $\beta_9$, $\beta_{10}$ (см. рис. 20) должно соблюдаться условие

$$\beta_1 + \beta_5 + \beta_9 = \beta_{10}.$$

Отсюда условное уравнение поправок

$$v_1 + v_5 + v_9 - v_{10} + W = 0,$$

$$W = \beta_1' + \beta_5' + \beta_9' - \beta_{10}'. \qquad (14.4)$$

### 5. Условие стороны

Пусть в фигуре, изображенной на рис. 21, измерены стороны $s_1$ и $s_2$. Между этими сторонами существует соотношение

$$s_2 = s_1 \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_3}{\sin \beta_2 \sin \beta_4}.$$

Представим это соотношение как нелинейную функцию

$$\Phi = s_1 \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_3}{\sin \beta_2 \sin \beta_4} - s_2 = 0.$$

В линейной форме через поправки в измеренные величины

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_1}\right)_0 v_{s_1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_2}\right)_0 v_{s_2} + \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i}\right)_0 v_i + W' = 0,$$

$$W' = s_2^0 - s_2', \quad s_2^0 = s_1' \frac{\sin \beta_1' \sin \beta_3'}{\sin \beta_2' \sin \beta_4'}. \tag{14.5}$$

Частные производные функции:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_1}\right)_0 = \frac{s_2^0}{s_1'}; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_2}\right)_0 = -1;$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1}\right)_0 = s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_1'; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_3}\right)_0 = s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_3';$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2}\right)_0 = -s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_2'; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_4}\right)_0 = -s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_4'.$$

Поделив (14.5) на $s_2^0$, получим

$$\frac{v_{s_1}}{s_1'} - \frac{v_{s_2}}{s_2^0} + \frac{\operatorname{ctg} \beta_1'}{\rho} v_1 + \frac{\operatorname{ctg} \beta_3'}{\rho} v_3 - \frac{\operatorname{ctg} \beta_2'}{\rho} v_2 -$$

$$- \frac{\operatorname{ctg} \beta_4'}{\rho} v_4 + W^0 = 0,$$

$$W^0 = \frac{s_2^0 - s_2'}{s_2^0}. \tag{14.6}$$

Свободный член $W^0$ соответствует относительной ошибке стороны $s_2$.

Уравнение (14.6) удобно для вычислительных машин. Для приведения уравнения (14.6) в логарифмическую форму свободный член запишем так:

$$W^0 = \frac{s_2^0 - s_2'}{s_2^0} = \ln s_2^0 - \ln s_2'$$

или

$$W^0 = \ln s_1' - \ln s_2' + \ln \sin \beta_1' + \ln \sin \beta_3' - \ln \sin \beta_2' - \ln \sin \beta_4'.$$

Уравнение (14.6) после умножения на модуль десятичных логарифмов примет окончательный вид:

$$\delta_1' v_{s_1} - \delta_2' v_{s_2} + \delta_1 v_1 + \delta_3 v_3 - \delta_2 v_4 - \delta_4 v_4 + W = 0, \qquad (14.7)$$

где

$$\delta' = \frac{M}{s}, \quad \delta = \frac{M \operatorname{ctg} \beta}{\rho},$$

$$W = \lg s_1' - \lg s_2' + \lg \sin \beta_1' + \lg \sin \beta_3' - \lg \sin \beta_2' - \lg \sin \beta_4'. \qquad (14.8)$$

Условное уравнение сторон для направлений получим, заменив поправки углов соответствующими поправками образующих их направлений. Так, например, уравнение (14.7) через поправки в направления имеет вид:

$$\delta_1' v_{s_1} - \delta_2' v_{s_2} + \delta_1 v_{2\cdot 1} + \delta_4 v_{3\cdot 1} + (\delta_2 + \delta_3) v_{4\cdot 1} -$$

$$- \delta_1 v_{2\cdot 4} - \delta_2 v_{4\cdot 2} - \delta_3 v_{4\cdot 3} - \delta_4 v_{3\cdot 4} + W = 0.$$

Коэффициенты перед искомыми поправками в стороны — это перемена логарифма соответствующей стороны при изменении ее на единицу той меры, в которой выражена поправка стороны. Обычно в триангуляции поправку стороны вычисляют в дециметрах, поэтому коэффициент перед ней — перемена логарифма стороны при изменении ее на 1 дм.

Коэффициенты перед искомыми поправками углов — это перемена логарифма синуса соответствующего угла при изменении его на единицу той меры, в которой выражена поправка угла. Если поправка $v_i$ угла выражена в секундах, то $\delta_i$ — перемена логарифма синуса угла $\beta_i$ при изменении его на 1″.

Если одна из сторон является исходной (базисной) стороной, то в условном уравнении соответствующая поправка будет отсутствовать.

### 6. Условие полюса

Это условие возникает в фигуре, одна сторона которой может быть вычислена дважды. Для этого достаточно иметь точку, связанную со всеми точками замкнутого контура. Этой точкой, называемой полюсом фигуры, может служить какой-либо пункт или точка пересечения сторон фигуры. Типичной фигурой, имеющей полюс, является та, в которой один пункт является общей вершиной треугольников, основания которых образуют замкнутый контур. Такая фигура называется центральной системой. Фигура, у которой любая точка, включая и точку пересечения сторон, может служить полюсом, называется геодезическим четырехугольником.

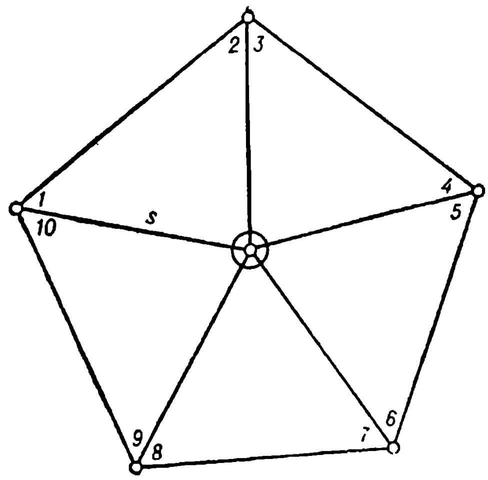



**Рис. 22.**
Центральная система

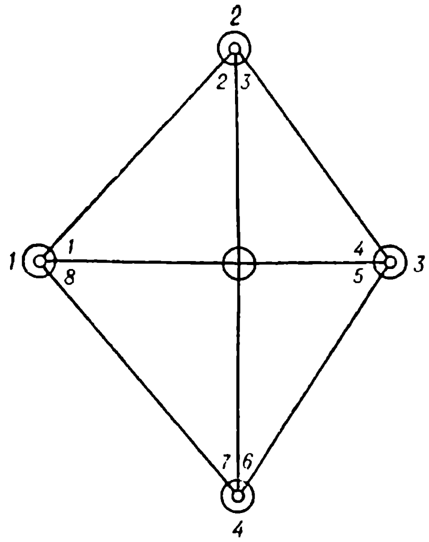



**Рис. 23.**
Геодезический четырехугольник

На рис. 22, 23 и 24 изображены типичные фигуры триангуляции, в которых возникают полюсные условия. В этих фигурах точки, которые можно принять за полюса, показаны большими кружками.

Для примера рассмотрим центральную систему (см. рис. 22), приняв сторону $s$ в качестве исходной. Вычислим сторону $s$, решив последовательно цепочку треугольников

$$s\,\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5 \sin\beta_7 \sin\beta_9}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6 \sin\beta_8 \sin\beta_{10}} = s.$$

Уравнение полюса в нелинейном виде запишем так:

$$\Phi = s\left(\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5 \sin\beta_7 \sin\beta_9}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6 \sin\beta_8 \sin\beta_{10}} - 1\right) = 0. \tag{14.9}$$

В линейной форме

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_i}\right)_0 v_i + W' = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_i}\right)_0 = (-1)^{i+1} s \operatorname{ctg}\beta_i', \tag{14.10}$$

$$W' = s\left(\frac{\sin\beta_1' \sin\beta_3' \sin\beta_5' \sin\beta_7' \sin\beta_9'}{\sin\beta_2' \sin\beta_4' \sin\beta_6' \sin\beta_8' \sin\beta_{10}'} - 1\right).$$

Подставив значения частных производных и сократив на $s$, запишем

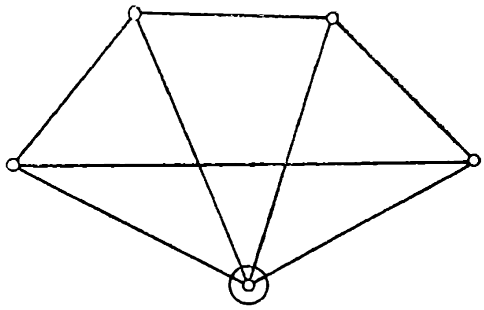
$$\sum_{i=1}^{10}(-1)^{i+1}\delta_i^0 v_i + W = 0, \tag{14.11}$$

где

$$\delta_i^0 = \frac{\operatorname{ctg}\beta_i'}{\rho}; \quad W^0 = \frac{s^0 - s}{s} =$$

$$= \frac{\sin\beta_1' \sin\beta_3' \sin\beta_5' \sin\beta_7' \sin\beta_9'}{\sin\beta_2' \sin\beta_4' \sin\beta_6' \sin\beta_8' \sin\beta_{10}'} - 1.$$

Рис. 24.
Пеер



Уравнение (14.11) удобно для вычислительных машин, особенно для ЭВМ.

Свободный член $W^0$, имеющий отвлеченное значение, соответствует относительной ошибке определения боковых сторон фигуры.

Уравнение полюса можно записать в логарифмической форме, разложив в ряд функции

$$\ln s^0 = \ln s + \left(\frac{\partial \ln s^0}{\partial s^0}\right)(s^0 - s). \qquad (14.12)$$

Свободный член

$$W^0 = \ln s^0 - \ln s = \sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} \ln \sin \beta_i'.$$

Подставим значение $W^0$ и перейдем к десятичным логарифмам, тогда получим

$$\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} \delta_i v_i + W = 0, \qquad (14.13)$$

$$W = \sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} \lg \sin \beta_i',$$

$\delta_i = M \frac{\operatorname{ctg} \beta_i'}{\rho}$ — перемена десятичного логарифма синуса угла $\beta_i'$ при изменении его на единицу той меры, в которой выражена поправка угла $v_i$. Обычно поправка $v_i$ выражается в секундах, следовательно, $\delta_i$ является переменой десятичного логарифма синуса угла $\beta_i'$ при изменении его на $1''$.

Перемены логарифмов синусов и свободный член выражают в единицах последнего знака логарифмов, с которыми производят вычисления. При вычислении условных уравнений с использованием таблиц логарифмов следует помнить, что для угла $\beta_i > 90°$ котангенс отрицателен и поэтому перемена логарифма синуса для такого угла имеет отрицательный знак.

Если уравнивают направления, то поправка каждого угла заменяется разностью поправок двух направлений, образующих соответствующий угол.

Например, для геодезического четырехугольника (см. рис. 23), если принять за полюс пересечение диагоналей, полюсное уравнение через поправки в измеренные направления будет записано так:

$$\delta_1 (v_{1\cdot 3} - v_{1\cdot 2}) + \delta_3 (v_{2\cdot 4} - v_{2\cdot 3}) + \delta_5 (v_{3\cdot 1} - v_{3\cdot 4}) +$$
$$+ \delta_7 (v_{4\cdot 2} - v_{4\cdot 1}) - \delta_2 (v_{2\cdot 1} - v_{2\cdot 4}) - \delta_4 (v_{3\cdot 2} - v_{3\cdot 1}) -$$
$$- \delta_6 (v_{4\cdot 3} - v_{4\cdot 2}) - \delta_8 (v_{1\cdot 4} - v_{1\cdot 3}) + W = 0.$$

После приведения подобных членов имеем

$$(\delta_1 + \delta_8) v_{1\cdot 3} + (\delta_4 + \delta_5) v_{3\cdot 1} + (\delta_2 + \delta_3) v_{2\cdot 4} +$$
$$+ (\delta_6 + \delta_7) v_{4\cdot 2} - \delta_1 v_{1\cdot 2} - \delta_2 v_{2\cdot 1} - \delta_3 v_{2\cdot 3} - \delta_4 v_{3\cdot 2} -$$
$$- \delta_5 v_{3\cdot 4} - \delta_6 v_{4\cdot 3} - \delta_7 v_{4\cdot 1} - \delta_8 v_{1\cdot 4} + W = 0. \qquad (14.14)$$

В уравнении (14.14) коэффициентами поправок для направлений, не проходящих через полюс, служат коэффициенты соответствующих углов, взятых с обратным знаком. Коэффициент поправки направления, проходящего через полюс, определяют как сумму коэффициентов двух смежных углов.

Справедливость этого правила можно проверить и для центральной фигуры (см. рис. 22). С некоторыми дополнениями это правило можно применить и для других фигур.

Для геодезического четырехугольника (см. рис. 23) составим условное уравнение (14.13) с числовыми данными в табл. 2.

**Таблица 2**

Условие полюса

| Номер угла | Измеренное значение угла $\beta'_i$ | $\sin \beta'_i$ | $\lg \sin \beta'_i$ | $\delta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 12° 55′ 51,7″ | 0,223778 | 9,349817 | +9,2 |
| 3 | 61 43 58,1 | 0,880749 | 9,944852 | +1,1 |
| 5 | 44 50 32,7 | 0,705159 | 9,848287 | +2,1 |
| 7 | 41 03 00,9 | 0,656720 | 9,817381 | +2,4 |
| | | $9{,}127184775 \cdot 10^{-2}$ | 9,960337 | |
| 2 | 94° 03′ 38,9″ | 0,997490 | 9,998908 | —0,1 |
| 4 | 11 16 30,7 | 0,195521 | 9,291195 | +10,7 |
| 6 | 62 08 58,8 | 0,884171 | 9,946536 | +1,1 |
| 8 | 31 57 26,6 | 0,529288 | 9,723692 | +3,4 |
| | | $9{,}127046736 \cdot 10^{-2}$ | 9,960331 | |
| $W$ | | 0,000015129 | | |

Условное уравнение поправок измеренных направлений

$$(9{,}2+3{,}4)v_{1\cdot 3}+(10{,}7+2{,}1)v_{3\cdot 1}+(1{,}1-0{,}1)v_{2\cdot 4}+$$
$$+(1{,}1+2{,}4)v_{4\cdot 2}-9{,}2v_{1\cdot 2}+0{,}1v_{2\cdot 1}-1{,}1v_{2\cdot 3}-10{,}7v_{3\cdot 2}-$$
$$-2{,}1v_{3\cdot 4}-1{,}1v_{4\cdot 3}-2{,}4v_{4\cdot 1}-3{,}4v_{1\cdot 4}+6=0.$$

Условное уравнение поправок измеренных углов

$$9{,}2v_1+1{,}1v_3+2{,}1v_5+2{,}4v_7+0{,}1v_2-$$
$$-10{,}7v_4-1{,}1v_6-3{,}4v_8+6=0.$$

Если примем $s=1$, то свободный член в нелогарифмической форме:

$$W^0=s\left(\frac{\sin\beta_1'\sin\beta_3'\sin\beta_5'\sin\beta_7'}{\sin\beta_2'\sin\beta_4'\sin\beta_6'\sin\beta_8'}-1\right)=0{,}0000151.$$

В логарифмической форме: $W=0{,}43429\cdot W^0\cdot 10^6=6{,}5$ единицы шестого знака десятичного логарифма. Как видно, сходимость двух способов вычисления свободных членов хорошая.

Заметим, что относительная ошибка стороны

$$W^0=\frac{s^0-s}{s}=1:66\,000.$$

### 7. Условие исходных дирекционных углов

Если в сети имеются две или несколько сторон с исходными дирекционными углами, то вычисленные по уравненным значениям углов дирекционные углы этих сторон должны быть равны исходным их значениям. Поэтому каждый избыточно заданный исходный дирекционный угол доставляет одно условие исходных дирекционных углов. Пусть в фигуре, изображенной на рис. 20, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — исходные дирекционные углы. Тогда условное уравнение (14.3) запишется без поправок к дирекционным углам, т. е.

$$v_1+v_5+v_9+W=0,$$
$$W=\alpha_1-\alpha_2+\beta_1'+\beta_5'+\beta_9'. \qquad (14.15)$$

Обычно уравнение исходных дирекционных углов составляют в случаях, когда дирекционные углы сторон определены с такой точностью, что ошибки их пренебрегаемо малы по сравнению с ошибками измерения углов или существенно малы по сравнению с ошибкой передачи азимута по ходовой линии.

Исходные дирекционные углы, как правило, определяют астрономически или триангуляцией более высокого класса по точности. Для специальных сетей исходные дирекционные углы могут определяться и гироскопическим способом.

### 8. Условие исходных сторон (базисов)

Если в сети имеются две или несколько исходных сторон (базисов), то вычисленные по уравненным углам длины этих сторон должны быть равны их исходным значениям. Поэтому каждая избыточно заданная исходная сторона дает одно условие исходных сторон (базисов).

Пусть в фигуре, изображенной на рис. 21, обе стороны $s_1$ и $s_2$ являются базисными сторонами. Тогда уравнение (14.7) не будет содержать поправок в стороны, т. е.

$$\delta_1 v_1 + \delta_3 v_3 - \delta_2 v_2 - \delta_4 v_4 + W = 0,$$

$$W = M \frac{s_2^0 - s_2}{s_2^0} = \lg s_1 - \lg s_2 + \lg \sin \beta_1' +$$

$$+ \lg \sin \beta_3' - \lg \sin \beta_2' - \lg \sin \beta_4'. \qquad (14.16)$$

Как правило, условные уравнения базисов возникают в случаях, когда длины сторон известны с такой точностью, что ошибки их существенно малы по сравнению с ошибкой передачи сторон по цепочке треугольников. Длины базисов обычно определяют из сетей триангуляции высших классов или измеряют мерными приборами (инварными проволоками и свето- и радиодальномерами).

### 9. Условия координат

**1.** Как уже известно, для ориентировки и масштабирования сети достаточно иметь два исходных пункта или один исходный пункт, один исходный азимут и базис. Если же в сети имеются исходные пункты, избыточно определяющие ее положение, то вычисленные значения координат избыточно данных исходных пунктов после уравнивания должны точно соответствовать их исходным значениям.

Выведем условное уравнение координат для ряда из $n$ треугольников, изображенного на рис. 25, с тремя исходными пунктами $C_0$, $C_0'$, $C_n$. Избыточно заданный исходный пункт $C_n$ доставляет координатные условия абсцисс и ординат.

Наметим ходовую линию $0 \to 1 \to 2 \to \ldots \to (n-1) \to n$ для передачи координат через вершины промежуточных углов треугольников.

Условия абсцисс и ординат в этом случае можно записать так:

$$\Phi_x = x_0 + s_{01} \cos \alpha_{01} + s_{12} \cos \alpha_{12} + \ldots +$$

$$+ s_{(n-1)\,n} \cos \alpha_{(n-1)\,n} - x_n = 0,$$

$$\Phi_y = y_0 + s_{01} \sin \alpha_{01} + s_{12} \sin \alpha_{12} + \ldots +$$

$$+ s_{(n-1)\,n} \sin \alpha_{(n-1)\,n} - y_n = 0. \qquad (14.17)$$

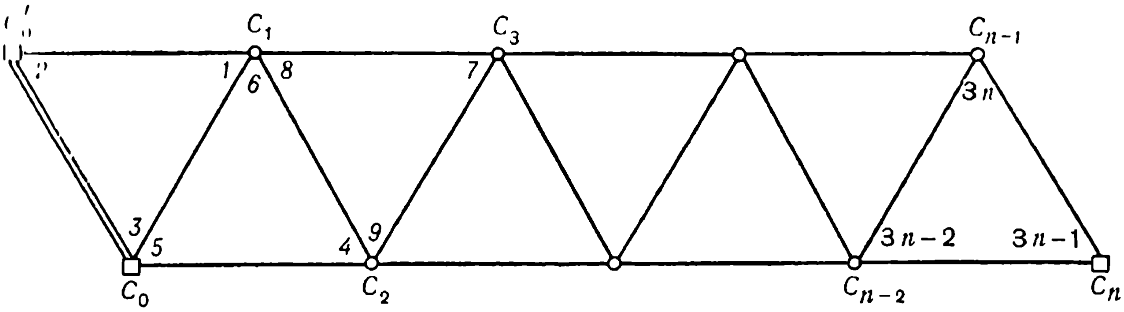



Рис. 25.
Схема триангуляции

В этих уравнениях стороны и дирекционные углы определяют от исходной стороны $s$ и исходного дирекционного угла $\alpha$ последовательно:

$$s_{01} = s\,\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2};\quad \alpha_{01} = \alpha + \beta_3;$$

$$s_{12} = s\,\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_4}{\sin\beta_2 \sin\beta_5};\quad \alpha_{12} = \alpha + \beta_3 - \beta_6;$$

$$s_{23} = s\,\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_4 \sin\beta_7}{\sin\beta_2 \sin\beta_5 \sin\beta_8};\quad \alpha_{23} = \alpha + \beta_3 - \beta_6 + \beta_9; \tag{14.18}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{(n-1)\,n} = s\,\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_4\ \ldots\ \sin\beta_{(3n-2)}}{\sin\beta_2 \sin\beta_5\ \ldots\ \sin\beta_{(3n-1)}};\quad \alpha_{(n-1)\,n} =$$

$$= \alpha + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\beta_{3i}.$$

Представим уравнения (14.17) через поправки $v_i$ в углы в линейной форме:

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_i}\right)_0 v_i + W_x = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{\partial\Phi_y}{\partial\beta_i}\right)_0 v_i + W_y = 0 \tag{14.19}$$

В этих уравнениях свободные члены $W_x$ и $W_y$ — приближенные значения искомых функций (14.17), вычисленные по измеренным значениям углов, т. е. невязки условных уравнений абсцисс и ординат.

Теперь из исходных уравнений (14.17) и (14.18) остается найти частные производные и подставить их в условные уравнения абсцисс и ординат.

Вычислим соответствующие частные производные по связующим углам:

$$\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_1} = s\operatorname{ctg}\beta_1'\left(\frac{\sin\beta_1'}{\sin\beta_2'}\cos\alpha_{01}^0 + \frac{\sin\beta_1'\sin\beta_4'}{\sin\beta_2'\sin\beta_5'}\cos\alpha_{12}^0 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\beta_1'\sin\beta_4'\ldots\sin\beta_{3n-2}'}{\sin\beta_2'\sin\beta_5'\ldots\sin\beta_{3n-1}'}\cos\alpha_{(n-1)\,n}^0\right)$$

или

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_1}\right)_0 = \operatorname{ctg}\beta_1'(\Delta x_{10}^0 + \Delta x_{21}^0 + \ldots + \Delta x_{n\,(n-1)}^0) =$$

$$= (x_n - x_0)\operatorname{ctg}\beta_1';$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_2}\right)_0 = -s\operatorname{ctg}\beta_2'\left(\frac{\sin\beta_1'}{\sin\beta_2'}\cos\alpha_{01}^0 + \right.$$

$$+ \frac{\sin\beta_1'\sin\beta_4'}{\sin\beta_2'\sin\beta_5'}\cos\alpha_{12}^0 + \ldots +$$

$$\left. + \frac{\sin\beta_1'\sin\beta_4'\ldots\sin\beta_{(3n-2)}'}{\sin\beta_2'\sin\beta_5'\ldots\sin\beta_{(3n-1)}'}\cos\alpha_{(n-1)\,n}^0\right)$$

или

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_2}\right)_0 = -(\Delta x_{10}^0 + \Delta x_{21}^0 + \ldots + \Delta x_{n\,(n-1)}^0)\operatorname{ctg}\beta_2' =$$

$$= -(x_n - x_0)\operatorname{ctg}\beta_2'.$$

По аналогии

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_4}\right)_0 = (x_n - x_1^0)\operatorname{ctg}\beta_4';$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_5}\right)_0 = -(x_n - x_1^0)\operatorname{ctg}\beta_5';$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_{3n-2}}\right)_0 = (x_n - x_{n-1}^0)\operatorname{ctg}\beta_{3n-2}';$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_{3n-1}}\right)_0 = -(x_n - x_{n-1}^0)\operatorname{ctg}\beta_{3n-1}'.$$

Частные производные функции $\Phi_x$ по промежуточным углам:

$$\left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial\beta_3}\right)_0 = -(s_{01}^0\sin\alpha_{01}^0 + s_{12}^0\sin\alpha_{12}^0 + \ldots +$$

$$+ s_{(n-1)\,n}^0\sin\alpha_{(n-1)\,n}^0) = -(\Delta y_{10}^0 + \Delta y_{21}^0 +$$

$$+ \ldots + \Delta y_{n\,(n-1)}^0) = -(y_n - y_0);$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta_6}\right)_0 = (s^0_{12} \sin \alpha^0_{12} + s^0_{23} \sin \alpha^0_{23} + \ldots +$$

$$+ s^0_{(n-1)\,n} \sin \alpha^0_{(n-1)\,n}) = \Delta y^0_{21} + \Delta y^0_{32} + \ldots +$$

$$+ \Delta y^0_{n\,(n-1)} = y_n - y^0_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta_{3n}}\right)_0 = (-1)^n s^0_{(n-1)\,n} \sin \alpha^0_{(n-1)\,n} =$$

$$= -(1)^n \Delta y^0_{n\,(n-1)} = (-1)^n (y_n - y^0_{n-1}).$$

Вычисление частных производных функции $\Phi_y$ будет аналогичным и запись их не представит трудности. Искомые частные производные $\Phi_y$ имеют вид:

$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_1}\right)_0 = (y_n - y_0) \operatorname{ctg} \beta'_1; \quad \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_3}\right)_0 = x_n - x_0;$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_2}\right)_0 = -(y_n - y_0) \operatorname{ctg} \beta'_2; \quad \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_6}\right)_0 = -(x_n - x^0_1);$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_4}\right)_0 = (y_n - y^0_1) \operatorname{ctg} \beta'_4; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_5}\right)_0 = -(y_n - y^0_1) \operatorname{ctg} \beta'_5; \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_{3n}}\right)_0 = (-1)^{n-1} (x_n - x^0_{n-1}).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_{3n-2}}\right)_0 = (y_n - y^0_{n-1}) \operatorname{ctg} \beta'_{3n-2};$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_{3n-1}}\right)_0 = -(y_n - y^0_{n-1}) \operatorname{ctg} \beta'_{3n-1}.$$

Подставив найденные значения частных производных в уравнение (14.19), получим

$$\sum_{i=1}^{n} [(x_n - x^0_{i-1}) (\operatorname{ctg} \beta'_{3i-2} v_{3i-2} - \operatorname{ctg} \beta'_{3i-1} v_{3i-1}) +$$

$$+ (-1)^i (y_n - y^0_{i-1}) v_{3i}] + W_x = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [(y_n - y^0_{i-1}) (\operatorname{ctg} \beta'_{3i-2} v_{3i-2} - \operatorname{ctg} \beta'_{3i-1} v_{3i-1}) +$$

$$+ (-1)^{i+1} (x_n - x^0_{i-1}) v_{3i}] + W_y = 0. \qquad (14.20)$$

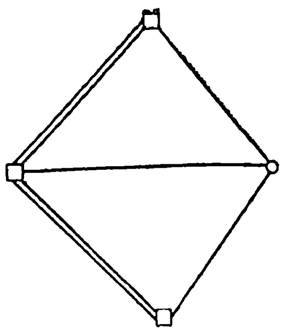


**Рис. 26.**
Вставка в угол

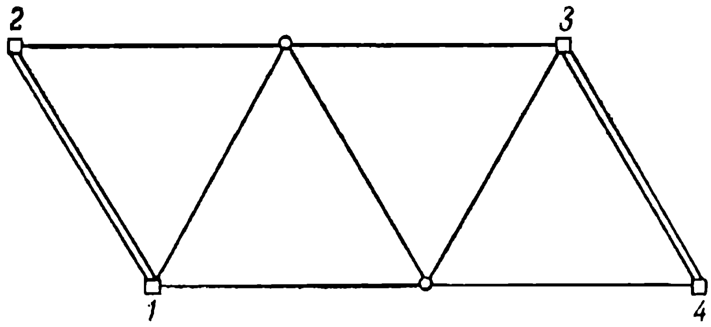



**Рис. 27.**
Звено триангуляции

Поправки углов выразим в секундах, свободные члены — в дециметрах, приращения координат — в километрах и условные уравнения абсцисс и ординат (14.20) запишем в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_n - x_{i-1})^{\text{км}}}{20,6265}(\operatorname{ctg}\beta'_{3i-2}v_{3i-2} - \operatorname{ctg}\beta'_{3i-1}v_{3i-1}) + \right.$$

$$\left. + (-1)^i\frac{(y_n - y_{n-1})^{\text{км}}}{20,6265}v_{3i}\right] + W_x^{\text{дм}} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(y_n - y_{n-1})^{\text{км}}}{20,6265}(\operatorname{ctg}\beta'_{3i-2}v_{3i-2} - \operatorname{ctg}\beta'_{3i-1}v_{3i-1}) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{i+1}\frac{(x_n - x_{i-1})^{\text{км}}}{20,6265}v_{3i}\right] + W_y^{\text{дм}} = 0. \qquad (14.21)$$

Изучая выведенные уравнения, замечаем, что все частные производные для углов $\beta_{3i-1}$, участвующих в знаменателях выражений для связующих сторон, имеют знак минус, все производные для углов $\beta_{3i-2}$, участвующих в числителях, — знак плюс.

Знаки при частных производных по промежуточным углам $\beta_{3n}$ зависят от того, находятся эти углы слева или справа по ходовой линии. В уравнении абсцисс в первом случае будет минус, во втором — плюс; в уравнении ординат — наоборот.

Для получения производных по всем углам треугольника $i$ пользуются разностью координат конечного пункта ряда $C_n$ и пункта $C_{i-1}$, расположенного в вершине этого треугольника.

2. Обсудим другие варианты размещения исходных пунктов.

П е р в ы й  с л у ч а й. Пусть исходные пункты непосредственно связаны наблюдениями. Этот случай встречается при вставке пунктов в сеть высшего класса по точности.

В фигуре, изображенной на рис. 26, координатное условие соблюдается, если уравненные значения углов удовлетворяют условиям исходных дирекционных углов и базисов. Иначе говоря, в этом случае условия абсцисс и ординат, доставляемые одним

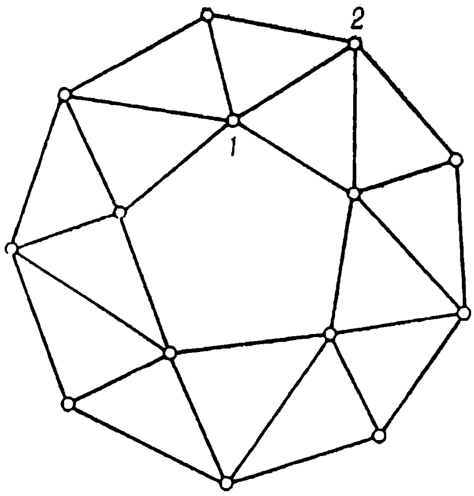



Рис. 28.
Полигон

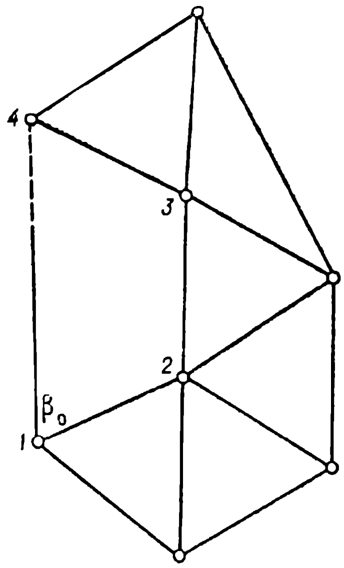



Рис. 29.
Звено с замыкающей

избыточно заданным исходным пунктом, эквивалентно заменяется условием исходных дирекционных углов и базисным условием.

Второй случай. Пусть в фигуре, изображенной на рис. 27, пункты *1*, *2*, *3* и *4* заданы как исходные. В этом случае избыточно заданный пункт *3* доставит условия абсцисс и ординат. Исходный пункт *4*, непосредственно связанный наблюдениями с исходным пунктом *3*, доставит условие исходных дирекционных углов и базисное условие. Эти четыре условия, возникшие благодаря двум избыточно заданным исходным пунктам, называются полигонными.

Полигонные условия образуются и в свободных сетях, имеющих только необходимые исходные данные, но представляющих замкнутый полигон. Действительно, в фигуре, изображенной на рис. 28, например, последовательно по ходу часовой стрелки вычислив координаты пунктов, можно определить координаты исходных пунктов *1* и *2*. Следовательно, нужно поставить условие, чтобы вычисленные значения координат пунктов *1* и *2* точно совпали с исходными координатами этих пунктов. Это означает, что необходимо составить полигонные условия абсцисс, ординат, исходного дирекционного угла и базисное условие.

Третий случай. В фигуре, имеющей замыкающую, как это показано на рис. 29, возникает координатное условие особого рода.

В нашей фигуре, приняв за исходную сторону $s_{12}$, а за исходный дирекционный угол $\alpha_{14} = 0$, вычислим дирекционные углы сторон контура *1—2—3—4* и приращения ординат. При этом сумма приращений ординат по этому контуру должна быть равна нулю. Таким образом, измеренный угол $\beta_0$, образуя замыкающую *1—4*, доставляет условное уравнение координат.

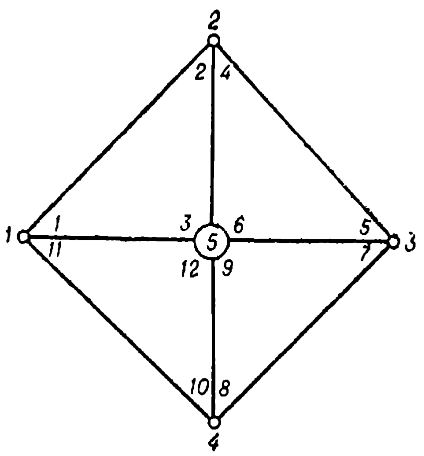



**Рис. 30.** Центральная система

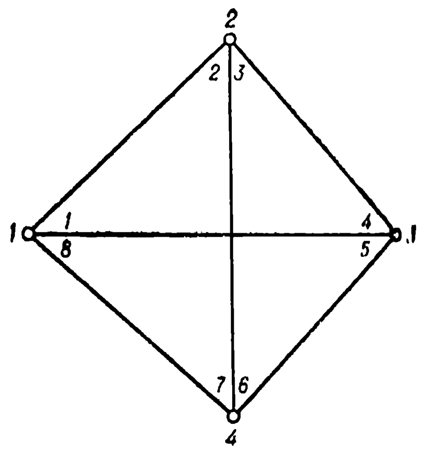



**Рис. 31.** Геодезический четырехугольник

## § 15. Условные уравнения в сетях трилатерации

### 1. Методические аспекты

1. В трилатерации, как правило, число избыточных измерений очень ограничено. Например, в центральной системе или в геодезическом четырехугольнике трилатерации (рис. 30 и 31) избыточно измерена только одна сторона. Как в центральной системе, так и в геодезическом четырехугольнике возникает одно условие, формулируемое следующим образом. Если каждый угол у основания полюса фигуры вычислить по уравненным значениям сторон и сложить, то сумма их должна равняться 180° ($n$ — 2); $n$ — число треугольников, образующих фигуру. По аналогии с триангуляцией такое условие можно назвать условием фигуры.

В звене трилатерации (рис. 32) с исходными пунктами *1*, *2*, *5* и *6* избыточно измерены три стороны, доставляющие условия исходного дирекционного угла, абсцисс и ординат.

2. Практически условные уравнения в трилатерации удобно записывать через углы, а затем поправки углов заменять поправками измеренных сторон. С этой целью рассмотрим дифференциальную зависимость изменения угла от изменения сторон треугольника.

Для треугольника, написав формулу косинуса угла

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 &= \frac{s_2^2 + s_3^2 - s_1^2}{2s_2s_3}, \\ \cos\beta_2 &= \frac{s_1^2 + s_3^2 - s_2^2}{2s_1s_3}, \\ \cos\beta_3 &= \frac{s_1^2 + s_2^2 - s_3^2}{2s_1s_2}, \end{aligned} \tag{15.1}$$

найдем дифференциал по первой формуле относительно $\beta_1$, $s_1$, $s_2$, $s_3$:

$$-\sin\beta_1 d\beta_1 = -\frac{s_1}{s_2s_3}ds_1 + \frac{s_1^2 + s_2^2 - s_3^2}{2s_2^2s_3}ds_2 + \frac{s_1^2 + s_3^2 - s_2^2}{2s_2s_3^2}ds_3.$$

Отсюда

$$d\beta_1 = \frac{s_1}{s_2s_3\sin\beta_1}\left(ds_1 - \frac{s_1^2 + s_2^2 - s_3^2}{2s_1s_2}ds_2 - \frac{s_1^2 + s_3^2 - s_2^2}{2s_1s_3}ds_3\right).$$

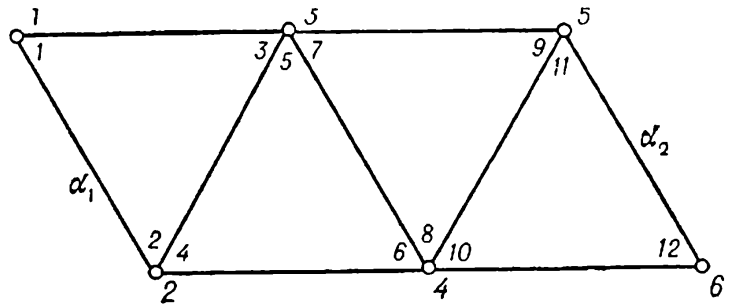



Рис. 32. Звено трилатерации

С учетом формулы косинуса для углов $\beta_1$ и $\beta_3$ окончательно запишем дифференциальную формулу

$$d\beta_1 = \frac{1}{h_1}(ds_1 - \cos\beta_3\, ds_2 - \cos\beta_2\, ds_3),$$

где $h_1 = \frac{s_2 s_3 \sin\beta_1}{s_1}$ — высота треугольника от основания $s_1$.

Переходя от дифференциалов к поправкам, получаем

$$v_1 = \frac{\rho}{h_1}(v_{s_1} - \cos\beta_3 v_{s_2} - \cos\beta_2 v_{s_3}). \tag{15.2}$$

Аналогично составим уравнение поправок двух других углов треугольника:

$$v_2 = \frac{\rho}{h_2}(v_{s_2} - \cos\beta_3 v_{s_1} - \cos\beta_1 v_{s_3}), \tag{15.3}$$

$$v_3 = \frac{\rho}{h_3}(v_{s_3} - \cos\beta_2 v_{s_1} - \cos\beta_1 v_{s_2}). \tag{15.4}$$

## 2. Условие горизонта

На практике в центральной системе условие фигуры выгодно заменить условием горизонта для углов у полюса, вычисленных по измеренным сторонам треугольников.

Составим условное уравнение горизонта для фигуры, изображенной на рис. 30.

Условие горизонта для углов у полюса

$$v_3 + v_6 + v_9 + v_{12} + W = 0,$$

$$W = (\beta_3^0 + \beta_6^0 + \beta_9^0 + \beta_{12}^0 - 360^\circ)\,\rho^{-1}, \tag{15.5}$$

где $\beta^0$ — значение угла, вычисленного по формуле косинуса угла по измеренным сторонам.

Пользуясь формулой (15.2), поправки в углы в радианах выразим через поправки $v_{ij}$ в измеренные стороны:

$$v_3 = h_3^{-1}(v_{1\cdot 2} - v_{1\cdot 5}\cos\beta_1^0 - v_{2\cdot 5}\cos\beta_2^0);$$

$$v_6 = h_6^{-1}(v_{2\cdot 3} - v_{2\cdot 5}\cos\beta_4^0 - v_{3\cdot 5}\cos\beta_5^0);$$

$$v_9 = h_9^{-1}(v_{3\cdot 4} - v_{3\cdot 5}\cos\beta_7^0 - v_{4\cdot 5}\cos\beta_8^0);$$

$$v_{12} = h_{12}^{-1}(v_{4\cdot 1} - v_{4\cdot 5}\cos\beta_{10}^0 - v_{1\cdot 5}\cos\beta_{11}^0).$$

Подставив найденные значения поправок углов в уравнение (15.5) и приведя подобные члены, получим

$$\left(h_3^{-1}v_{1\cdot 2}+h_6^{-1}v_{2\cdot 3}+h_9^{-1}v_{3\cdot 4}+h_{12}^{-1}v_{4\cdot 1}\right)-\left(h_3^{-1}\cos\beta_1^0+\right.$$
$$\left.+h_{12}^{-1}\cos\beta_{11}^0\right)v_{1\cdot 5}-\left(h_3^{-1}\cos\beta_2^0+h_6^{-1}\cos\beta_4^0\right)v_{2\cdot 5}-$$
$$-\left(h_6^{-1}\cos\beta_5^0+h_9^{-1}\cos\beta_7^0\right)v_{3\cdot 5}-\left(h_9^{-1}\cos\beta_8^0+\right.$$
$$\left.+h_{12}^{-1}\cos\beta_{10}^0\right)v_{4\cdot 5}+W=0. \qquad (15.6)$$

### 3. Условие фигуры

Для геодезического четырехугольника, изображенного на рис. 31, условие фигуры означает соблюдение равенства

$$\sum_{i=1}^{8} v_i+W=0,$$
$$W=\left(\sum_{i=1}^{8}\beta_i^0-360^\circ\right)\rho^{-1}, \qquad (15.7)$$

где $\beta^0$ — значение угла, вычисленное по формуле косинуса угла по измеренным сторонам.

В уравнении (15.7) поправки в углы в радианах заменим поправками сторон. Для этого сначала найдем поправки $(v_2+v_3)$ из треугольника $\Delta_{123}$, поправки $(v_4+v_5)$ из треугольника $\Delta_{234}$ и т. д. Пользуясь формулой (15.2), пишем:

$$v_2+v_3=h_2^{-1}\left(v_{1\cdot 3}-\cos\beta_1^0 v_{1\cdot 2}-\cos\beta_4^0 v_{2\cdot 3}\right);$$
$$v_4+v_5=h_3^{-1}\left(v_{2\cdot 4}-\cos\beta_3^0 v_{2\cdot 3}-\cos\beta_6^0 v_{3\cdot 4}\right);$$
$$v_6+v_7=h_4^{-1}\left(v_{1\cdot 3}-\cos\beta_5^0 v_{3\cdot 4}-\cos\beta_8^0 v_{4\cdot 1}\right);$$
$$v_8+v_1=h_1^{-1}\left(v_{2\cdot 4}-\cos\beta_7^0 v_{4\cdot 1}-\cos\beta_2^0 v_{1\cdot 2}\right).$$

Подставив найденные значения поправок углов в уравнение (15.7) и приведя к подобным членам, получим

$$\left(h_2^{-1}+h_4^{-1}\right)v_{1\cdot 3}+\left(h_1^{-1}+h_3^{-1}\right)v_{2\cdot 4}-\left(h_2^{-1}\cos\beta_1^0+\right.$$
$$\left.+h_1^{-1}\cos\beta_2^0\right)v_{1\cdot 2}-\left(h_2^{-1}\cos\beta_4^0+h_3^{-1}\cos\beta_3^0\right)v_{2\cdot 3}-$$
$$-\left(h_3^{-1}\cos\beta_6^0+h_4^{-1}\cos\beta_5^0\right)v_{3\cdot 4}-\left(h_4^{-1}\cos\beta_8^0+\right.$$
$$\left.+h_1^{-1}\cos\beta_7^0\right)v_{4\cdot 1}+W=0. \qquad (15.8)$$

### 4. Условие дирекционного угла

Пусть в звене трилатерации (см. рис. 32) на двух сторонах измерены дирекционные углы $\alpha_1$ и $\alpha_2$.

После уравнивания должно соблюдаться условие

$$\alpha_1+\beta_2-\beta_5+\beta_8-\beta_{11}-\alpha_2=0.$$

Уравнение поправок, соответствующее этому условию

$$v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2} + v_2 - v_5 + v_8 - v_{11} + W = 0, \qquad (15.9)$$

$$W = (\alpha_1' - \alpha_2' + \beta_2^0 - \beta_5^0 + \beta_8^0 - \beta_{11}^0)\, \rho^{-1},$$

где $\alpha'$ — измеренный дирекционный угол, $\beta^0$ — значение угла, вычисленное по измеренным значениям сторон.

В условном уравнении дирекционного угла (15.9) поправки углов, пользуясь (15.2), выражаем через поправки сторон:

$$v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2} - h_2^{-1}(v_{1\cdot3} - \cos\beta_1^0 v_{1\cdot2} - \cos\beta_2^0 v_{2\cdot3}) -$$
$$- h_5^{-1}(v_{2\cdot4} - \cos\beta_4^0 v_{2\cdot3} - \cos\beta_6^0 v_{3\cdot4}) + h_8^{-1}(v_{3\cdot5} - \cos\beta_7^0 v_{3\cdot4} -$$
$$- \cos\beta_9^0 v_{4\cdot5}) - h_{11}^{-1}(v_{4\cdot6} - \cos\beta_{10}^0 v_{4\cdot5} - \cos\beta_{12}^0 v_{5\cdot6}) + W = 0.$$

Приведя подобные члены, получим

$$v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2} - h_2^{-1}\cos\beta_1^0 v_{1\cdot2} + h_2^{-1} v_{2\cdot3} - (h_2^{-1}\cos\beta_3^0 -$$
$$- h_5^{-1}\cos\beta_4^0)\, v_{2\cdot3} - h_5^{-1} v_{2\cdot4} + (h_5^{-1}\cos\beta_6^0 - h_8^{-1}\cos\beta_7^0)\, v_{3\cdot4} +$$
$$+ h_8^{-1} v_{3\cdot5} - (h_8^{-1}\cos\beta_9^0 - h_{11}^{-1}\cos\beta_{10}^0)\, v_{4\cdot5} - h_{11}^{-1} v_{4\cdot6} +$$
$$+ h_{11}^{-1}\cos\beta_{12}^0 v_{5\cdot6} + W = 0. \qquad (15.10)$$

Если одна из сторон имеет исходный дирекционный угол, то поправка $v_\alpha$ соответствующей стороны будет отсутствовать.

### 5. Условие исходных дирекционных углов

Пусть пункты *1*, *2*, *5* и *6* (см. рис. 32) заданы исходными координатами. Тогда в уравнении (15.10) поправки $v_{\alpha_1}$, $v_{\alpha_2}$, $v_{1\cdot2}$, $v_{5\cdot6}$ соответственно равны нулю и условное уравнение исходных дирекционных углов будет иметь вид

$$h_2^{-1} v_{1\cdot3} - h_5^{-1} v_{2\cdot4} + h_8^{-1} v_{3\cdot5} - h_{11}^{-1} v_{4\cdot6} - (h_2^{-1}\cos\beta_3^0 -$$
$$- h_5^{-1}\cos\beta_4^0)\, v_{2\cdot3} + (h_5^{-1}\cos\beta_6^0 - h_8^{-1}\cos\beta_7^0)\, v_{3\cdot4} -$$
$$- (h_8^{-1}\cos\beta_9^0 - h_{11}^{-1}\cos\beta_{10}^0)\, v_{4\cdot5} + W = 0. \qquad (15.11)$$

### 6. Условия координат

Известно, что в звене трилатерации (см. рис. 32), опирающемся на исходные пункты, возникают три условия — условие исходных дирекционных углов (15.11), условия абсцисс и ординат.

Рассмотрим условные уравнения абсцисс и ординат.

Для уравненных величин должны соблюдаться следующие условия координат:

$$\Phi_x = x_2 + s_{23}\cos\alpha_{23} + s_{34}\cos\alpha_{34} + s_{45}\cos\alpha_{45} - x_5 = 0,$$

$$\Phi_y = y_2 + s_{23}\sin\alpha_{23} + s_{34}\sin\alpha_{34} + s_{45}\sin\alpha_{45} - y_5 = 0,$$

где

$$\alpha_{23} = \alpha_1 + \beta_2,$$
$$\alpha_{34} = \alpha_1 + \beta_2 - \beta_5,$$
$$\alpha_{45} = \alpha_1 + \beta_2 - \beta_5 + \beta_8.$$

Условные уравнения поправок для абсцисс и ординат имеют общий вид:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_{23}}\right)_0 v_{2\cdot 3} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_{34}}\right)_0 v_{3\cdot 4} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_{45}}\right)_0 v_{4\cdot 5} +$$
$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2}\right)_0 v_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_5}\right)_0 v_5 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_8}\right)_0 v_8 + W = 0. \qquad (15.12)$$

Частные производные соответственно:

$$\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial s_{ij}}\right)_0 = \cos \alpha_{ij}^0; \quad \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial s_{ij}}\right)_0 = \sin \alpha_{ij}^0;$$
$$\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta_2}\right)_0 = -(s_{23}' \sin \alpha_{23}^0 + s_{34}' \sin \alpha_{34}^0 + s_{45}' \sin \alpha_{45}^0) = -(y_5 - y_2);$$
$$\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta_5}\right)_0 = s_{34}' \sin \alpha_{34}^0 + s_{45}' \sin \alpha_{45}^0 = y_5 - y_3^0;$$
$$\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \beta_8}\right)_0 = -s_{45}' \sin \alpha_{45}^0 = -(y_5 - y_4^0);$$
$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_2}\right)_0 = s_{23}' \cos \alpha_{23}' + s_{34}' \cos \alpha_{34}^0 + s_{45}' \cos \alpha_{45}^0 = x_5 - x_2;$$
$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_5}\right)_0 = -(s_{34}' \cos \alpha_{34}^0 + s_{45}' \cos \alpha_{45}^0) = -(x_5 - x_3^0);$$
$$\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial \beta_8}\right)_0 = s_{45}' \cos \alpha_{45}^0 = x_5 - x_4^0.$$

Подставив найденные значения частных производных в уравнение (15.12), получим условные уравнения абсцисс и ординат в виде

$$\cos \alpha_{23}^0 v_{2\cdot 3} + \cos \alpha_{34}^0 v_{3\cdot 4} + \cos \alpha_{45}^0 v_{4\cdot 5} - (y_5 - y_2) v_2 +$$
$$+ (y_5 - y_3^0) v_5 - (y_5 - y_4^0) v_8 + W_x = 0;$$
$$\sin \alpha_{23}^0 v_{2\cdot 3} + \sin \alpha_{34}^0 v_{3\cdot 4} + \sin \alpha_{45}^0 v_{4\cdot 5} + (x_5 - x_2) v_2 -$$
$$- (x_5 - x_3^0) v_5 + (x_5 - x_4^0) v_8 + W_y = 0.$$

Затем на основании формулы (15.2), после исключения поправок углов и приведения подобных членов получим условные уравнения абсцисс и ординат:

$$\left(\cos \alpha_{23}^0 + \frac{y_5 - y_2}{h_2} \cos \beta_3^0\right) v_{2\cdot 3} + \left(\cos \alpha_{34}^0 - \frac{y_5 - y_3^0}{h_5} \cos \beta_6^0\right) v_{3\cdot 4} +$$
$$+ \left(\cos \alpha_{45}^0 + \frac{y_5 - y_4^0}{h_8} \cos \beta_9^0\right) v_{4\cdot 5} - \frac{y_5 - y_2}{h_2} v_{1\cdot 3} +$$
$$+ \frac{y_5 - y_3^0}{h_5} v_{2\cdot 4} - \frac{y_5 - y_4^0}{h_8} v_{3\cdot 5} + W_x = 0; \qquad (15.13)$$

$$\left(\sin\alpha_{23}^0 - \frac{x_5 - x_2}{h_2}\cos\beta_3^0\right)v_{2\cdot3} + \left(\sin\alpha_{34}^0 + \frac{x_5 - x_3^0}{h_5}\cos\beta_6\right)v_{3\cdot4} +$$
$$+ \left(\sin\alpha_{45}^0 - \frac{x_5 - x_4^0}{h_8}\cos\beta_9^0\right)v_{4\cdot5} + \frac{x_5 - x_2}{h_2}v_{1\cdot3} -$$
$$- \frac{x_5 - x_3^0}{h_5}v_{2\cdot4} + \frac{x_5 - x_4^0}{h_8}v_{3\cdot5} + W_y = 0. \qquad (15.14)$$

В этих условных уравнениях свободные члены вычисляют по формулам

$$W_x = x_2 + s'_{23}\cos\alpha_{23}^0 + s'_{34}\cos\alpha_{34}^0 + s'_{45}\cos\alpha_{45}^0 - x_5 = x_5^0 - x_5,$$
$$W_y = y_2 + s'_{23}\sin\alpha_{23}^0 + s'_{34}\sin\alpha_{34}^0 + s'_{45}\sin\alpha_{45}^0 - y_5 = y_5^0 - y_5, \qquad (15.15)$$

где $s'_{ij}$ — измеренные значения сторон; $\alpha_{ij}$ — значения дирекционных углов, вычисленные по углам $\beta_i^0$.

В свою очередь, углы $\beta_i^0$ вычислены по измеренным сторонам.

## § 16. Условные уравнения в сетях полигонометрии

### 1. Полигонометрический ход, опирающийся на исходные пункты и исходные азимуты

В полигонометрическом ходе, опирающемся на исходные пункты $A_1$ и $A_n$, на исходные направления $\alpha_0$ и $\alpha_n$ (рис. 33), имеются три избыточных измерения: два угла и одна линия. Эти избыточные измерения дают условие дирекционных углов и два условия координат. При этом условные уравнения имеют вид:

— для исходных дирекционных углов

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i - (n-1)\,180° - \alpha_n = 0, \qquad (16.1)$$

$$\alpha_i = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{i}\beta_k - (i-1)\,180°; \qquad (16.2)$$

— для абсцисс и ординат

$$x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i\cos\alpha_i - x_n = 0,$$
$$y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i\sin\alpha_i - y_n = 0. \qquad (16.3)$$

Дифференцируя эти уравнения относительно переменных $\beta_i$, $s_i$ и переходя от дифференциалов к поправкам $v_i$, $v_{s_i}$ измеренных величин $\beta'_i$, $s'_i$, получаем условные уравнения поправок:

— для исходных дирекционных углов

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + W = 0, \qquad (16.4)$$

$$W = \sum_{i=1}^{n}\beta'_i + \alpha_0 - \alpha_n - (n-1)\,180°; \qquad (16.5)$$

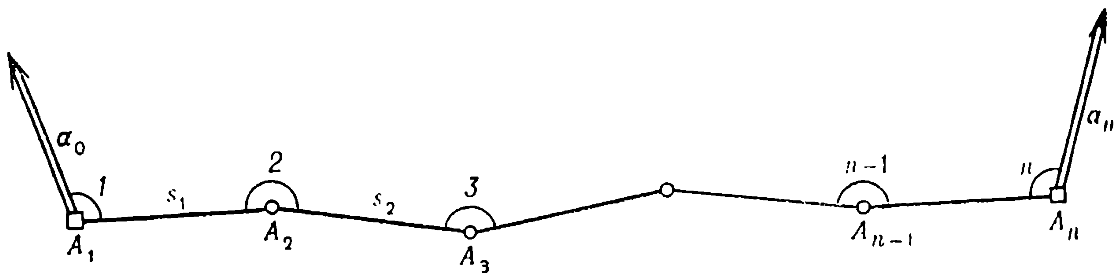



**Рис. 33.**
Полигонометрический ход

— для абсцисс

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(v_{s_i} \cos \alpha_i^0 - s_i' \sin \alpha_i^0 v_{\alpha_i}\right) + W_x = 0, \tag{16.6}$$

$$W_x = \sum_{i=1}^{n-1} s_i' \cos \alpha_i^0 + x_1 - x_n = x_n^0 - x_n; \tag{16.7}$$

— для ординат

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(v_{s_i} \sin \alpha_i^0 + s_i' \cos \alpha_i^0 v_{\alpha_i}\right) + W_y = 0, \tag{16.8}$$

$$W_y = \sum_{i=1}^{n-1} s_i' \sin \alpha_i^0 + y_1 - y_n = y_n^0 - y_n. \tag{16.9}$$

В этих формулах $\alpha_i^0$, $x_n^0$, $y_n^0$ — вычисленные значения дирекционного угла стороны $i$ и координат конечного пункта $A_n$.

Из формулы (16.2) следует

$$v_{\alpha_1} = v_1,$$
$$v_{\alpha_2} = v_1 + v_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_{\alpha_i} = v_1 + v_2 + \ldots + v_i.$$

Далее, заменяя в формулах (16.6) и (16.8) поправки дирекционных углов их значениями через поправки углов, пишем

$$-\sum_{i=1}^{n-1} (y_n^0 - y_i^0) v_i + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} \cos \alpha_i^0 + W_x = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_n^0 - x_i^0) v_i + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} \sin \alpha_i^0 + W_y = 0.$$

Очевидно, левые части этих равенств не изменятся, если к ним прибавить величины

$$(y_n^0 - y_n^0) v_n = 0,$$
$$(x_n^0 - x_n^0) v_n = 0.$$

Следовательно

$$-\sum_{i=1}^{n}(y_n^0-y_i^0)v_i+\sum_{i=1}^{n-1}v_{s_i}\cos\alpha_i^0+W_x=0, \tag{16.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_n^0-x_i^0)v_i+\sum_{i=1}^{n-1}v_{s_i}\sin\alpha_i^0+W_y=0.$$

## 2. Свободный полигонометрический ход

Пусть в полигонометрическом ходе (см. рис. 33) известны предварительные значения координат $x_1'$, $y_1'$, $x_n'$, $y_n'$ конечных пунктов и азимутов $\alpha_0'$ и $\alpha_n'$. Тогда уравнения (16.4), (16.5), (16.7), (16.9) и (16.10) будут иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}v_i+\delta\alpha_0-\delta\alpha_n+W=0; \tag{16.11}$$

$$W=\sum_{i=1}^{n}\beta_i'+\alpha_0'-\alpha_n'-(n-1)\,180^\circ; \tag{16.12}$$

$$-(y_n^0-y_1^0)\,\delta\alpha_0-\sum_{i=1}^{n}(y_n^0-y_i^0)v_i+\sum_{i=1}^{n-1}v_{s_i}\cos\alpha_i^0+$$

$$+\delta x_1-\delta x_n+W_x=0; \tag{16.13}$$

$$W_x=x_n^0-x_n'; \tag{16.14}$$

$$(x_n^0-x_1^0)\,\delta\alpha_0+\sum_{i=1}^{n}(x_n^0-x_i^0)v_i+\sum_{i=1}^{n-1}v_{s_i}\sin\alpha_i^0+$$

$$+\delta y_1-\delta y_n+W_y=0; \tag{16.15}$$

$$W_y=y_n^0-y_n'. \tag{16.16}$$

Если полигонометрический ход опирается на один исходный пункт, то в уравнениях (16.13) и (16.15) будут равны нулю соответствующие неизвестные $\delta x$ и $\delta y$. Если на одном или обоих концах заданы исходные дирекционные углы, то соответствующие $\delta\alpha$ будут равны нулю.

Из уравнений (16.11)—(16.16) вытекают как частные условные уравнения для хода, опирающегося на исходные пункты и исходные направления. Для этого достаточно в этих уравнениях положить $\delta\alpha_0$, $\delta\alpha_n$, $\delta x_1$, $\delta y_1$, $\delta x_n$, $\delta y_n$ равными нулю. Таким образом, уравнения (16.11)—(16.16) являются общими уравнениями для полигонометрических ходов, составляющих обширную сеть.

Уравнения типа (16.11), (16.13) и (16.15) назовем условными уравнениями с дополнительными параметрами.

## § 17. Определение числа и вида условных уравнений в геодезических сетях

### 1. Общие сведения

Число независимых условий, возникающих в сети, определяется по формуле $r = n - k$, где $n$ — число всех измеренных величин, $k$ — число необходимых измерений.

В триангуляции число необходимых измерений при уравнивании углов равно удвоенному числу определяемых пунктов, ибо для засечки каждого нового пункта необходимо и достаточно измерить два угла. Если в сети, в которой определяется $p_1$ пунктов, измерены $n$ углов, то число независимых условий

$$r = n - 2p_1. \tag{17.1}$$

В случае уравнивания направлений нужно учитывать, что из $n_i$ измеренных направлений на каждом пункте можно образовать $n_i - 1$ углов. Поэтому, если в сети на $p$ пунктах измерено $n$ направлений, то число независимых условных уравнений

$$r = n - (2p_1 + p), \tag{17.2}$$

где $p_1$ — число определяемых пунктов.

После того как в сети установлено число независимых условных уравнений, необходимо выбрать необходимые условные уравнения. При этом должны быть составлены только необходимые условные уравнения, а число их должно точно соответствовать подсчитанному числу независимых условий.

Но если при этом составлено $r = r_0 + t$ условных уравнений, среди которых $r_0$ необходимых условий, то $t$ уравнений будут зависимыми; в этом случае определитель системы нормальных уравнений коррелат будет равен нулю и система не будет иметь решения. Таким образом, не менее важной является задача отыскания всех необходимых условий.

### 2. Число условий фигур и горизонта

Условие фигуры возникает в замкнутой фигуре, образованной сплошными сторонами. В сети из $p$ пунктов для образования одной замкнутой фигуры необходимо иметь $p$ сплошных сторон. Таким образом, если в сети из $p$ пунктов имеется $n_f$ сплошных сторон, то число независимых условий фигур

$$r_f = n_f - p + 1. \tag{17.3}$$

В геодезическом четырехугольнике (см. рис. 23) шесть сплошных сторон, значит, число независимых условий фигур

$$r_f = 6 - 4 + 1 = 3.$$

В фигуре, изображенной на рис. 24, $p = 5$, $n_f = 8$. Следовательно, число независимых условий фигур $n_f = 4$.

Как уже отмечалось, условия горизонта возникают при уравнивании углов. Число условий горизонта равно числу пунктов, на которых измерены углы по всему горизонту.

### 3. Число полюсных условий

Для построения первых трех точек фигуры необходимо иметь три стороны, а для построения остальных — по две стороны на каждую точку. Следовательно, для построения фигуры из $p$ пунктов необходимо иметь $k_* = 2(p-3)+3$ сторон. Пусть в сети из $p$ пунктов число всех сторон (сплошных и несплошных) равно $n_*$. Тогда число полюсов равно

$$r_* = n_* + 3 - 2p. \qquad (17.4)$$

### 4. Число условий дирекционных углов и сторон

В триангуляции, имеющей исходный масштаб и ориентировку, каждый избыточно измеренный дирекционный угол доставляет одно условие дирекционных углов, а каждая избыточно измеренная сторона — одно условие сторон.

### 5. Несвободные сети

В несвободных сетях дополнительно возникают условия базисов, исходных дирекционных углов и координат. При этом каждый избыточно заданный базис доставляет одно базисное условие, а каждый избыточно заданный исходный дирекционный угол — одно условие исходного дирекционного угла. Каждый исходный пункт (цепь исходных пунктов), не связанный непосредственно с остальными исходными пунктами, оказывается избыточным и приносит два условия координат — условия абсцисс и ординат.

### 6. Иллюстрации и общие правила

1. Для примера определим число и вид условий в фигурах *1* и *2*, изображенных на рис. 34 и 35.

Результаты определения числа и вида независимых условий при уравнивании углов (направлений) приведены в табл. 3.

В общем случае два любых элемента геодезической сети (углы, стороны, дирекционные углы, абсциссы и ординаты), измеренные или заданные исходными, определяют положение одного пункта. Каждый элемент (измеренный или исходный), взятый сверх необходимого числа, доставляет одно независимое условие. Например, в фигурах *1* и *2* (см. рис. 34 и 35) число независимых элементов $m' = 30$ и $m'' = 51$, а число пунктов соответственно $p' = 8$ и $p'' = 12$. Следовательно, число независимых условных уравнений в первой фигуре должно быть $r' = 14$, а во второй — $r'' = 27$.

2. Условия, возникающие в геодезических сетях, разделим на две группы: угловые и линейные. К угловым условиям отнесем усло-

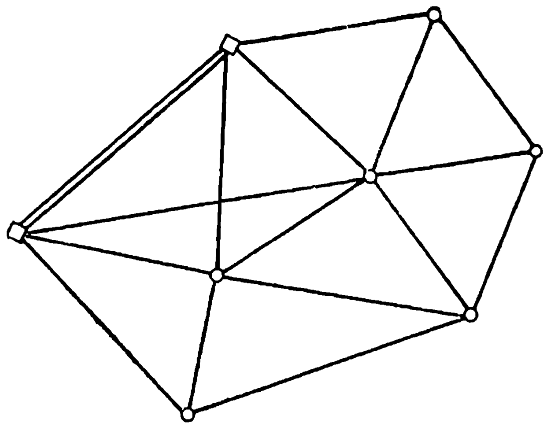


**Рис. 34.**
Триангуляция *1*

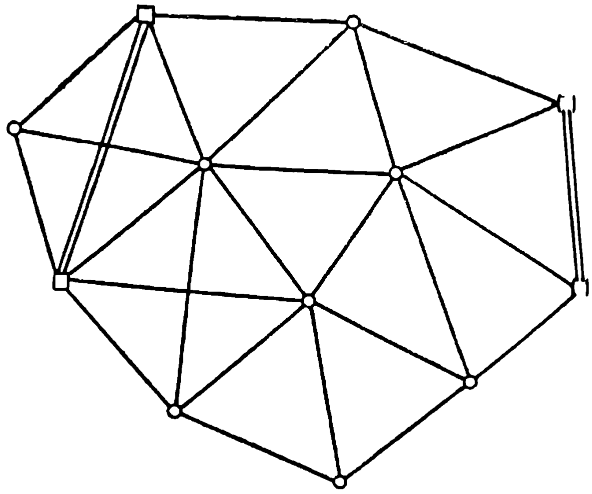


**Рис. 35.**
Триангуляция *2*

вия фигур, горизонтов, сумм и дирекционных углов, а к линейным условиям — условия полюсов, сторон (базисов) и координат.

Установив общее правило для вычисления числа независимых угловых условий $r_\beta$, нетрудно будет определять число линейных условий $r_s = r - r_\beta$.

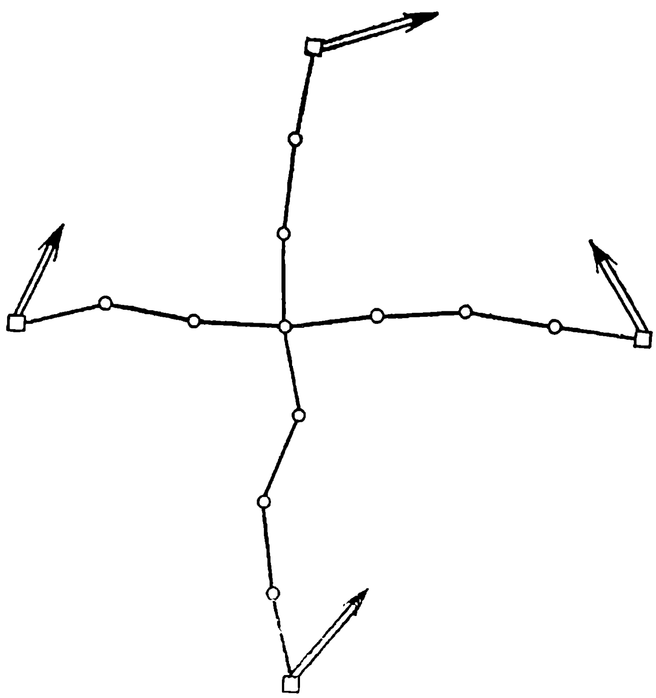
Угловые условия, очевидно, образуют только угловые элементы, ориентирующие каждую сторону сети. Для ориентировки одной стороны необходим один угловой элемент — измеренный (вычисленный) или исходный дирекционный угол. Любой избыточно заданный угловой элемент доставит одно независимое угловое условие.

**Таблица 3**

Определение вида и числа независимых условий

| Число элементов и условий | Фигура *1* (рис. 34) | Фигура *2* (рис. 35) |
|---|---|---|
| Углов | 26 | 43 |
| Направлений | 32 | 42 |
| Всех пунктов | 8 | 12 |
| Определяемых пунктов | 6 | 8 |
| Несвязанных групп исходных пунктов | 1 | 2 |
| Сплошных сторон | 16 | 26 |
| Условий полюса | 3 | 5 |
| Условий фигур | 9 | 15 |
| Условий горизонта | 2 | 3 |
| Условий базиса | — | 1 |
| Условий исходных дирекционных углов | — | 1 |
| Условий абсцисс и ординат | — | 2 |
| Независимых условий при уравнивании: | | |
| углов | 14 | 27 |
| направлений | 12 | 24 |

Рис. 36.
Полигонометрическая сеть



В фигурах, изображенных на рис. 34 и 35, число угловых элементов и число ориентируемых сторон соответственно равно

$n'_\beta = 27;\ k_\beta = 16;$

$n_\beta = 45;\ k_\beta = 26.$

Следовательно, в первой фигуре число независимых угловых условий $r'_\beta = 11$, а во второй фигуре число независимых угловых условий $r''_\beta = 19$.

Сформулированное правило применимо для геодезической сети (триангуляции, трилатерации, полигонометрии, линейно-угловой сети) при любом сочетании угловых и линейных элементов.

3. Рассмотрим примеры. Допустим в фигуре трилатерации (см. рис. 30) измерены 7 сторон и два пункта заданы исходными координатами. Общее число независимых элементов $m = 11$, а число условий $r = 11 - 2 \times 5 = 1$. Угловое или линейное это условие?

В фигуре по 8 сторонам (исходной и 7 измеренным) можно вычислить 8 независимых углов. К ним следует добавить еще один угловой элемент — исходный дирекционный угол. Таким образом, число независимых угловых элементов $n_\beta = 9$. Число сторон $k_\beta = 8$. Значит, в фигуре возникает одно угловое условие. Этим условием является условие горизонта для углов у полюса, вычисляемых по сторонам.

Определим вид и число условий для трилатерационного звена, изображенного на рис. 32. Пусть измерены все стороны и, кроме того, пункты *1*, *2*, *5* и *6* заданы исходными координатами. Тогда в звене 15 независимых элементов — 8 координат и 7 измеренных сторон. Число условий $r = 15 - 2 \times 6 = 3$.

Определим число угловых условий. В звене по известным сторонам можно вычислить 8 независимых углов. Эти углы совместно с двумя исходными дирекционными углами составляют 10 угловых элементов. В звене необходимо ориентировать 9 сторон. Следовательно, в звене всего одно угловое условие — условие исходных дирекционных углов. Остальные два условия — линейные условия. Очевидно, этими условиями будут условия абсцисс и ординат.

В полигонометрической сети, изображенной на рис. 36, имеются 8 координат исходных пунктов и 4 исходных дирекционных угла, 14 измеренных линий и 14 измеренных углов. Всего 40 независимых элементов, из них — 18 угловых.

Число всех условий $r = 40 - 2 \times 15 = 10$. Число ориентируемых сторон $k_\beta = 14$. Значит, угловых условий $r_\beta = 4$. Очевидно, одно условие горизонта возникает на узловом пункте и еще имеются три условия исходных дирекционных углов.

В сети возникают еще 6 условий координат.