УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

§ 21. Основные этапы уравнивания

Основные этапы уравнивания геодезической сети параметрическим способом заключаются в следующем.

1. Устанавливают предварительные значения уравниваемых величин L' и необходимых параметров X в геодезической сети. В качестве уравниваемых величин принимают: направления, углы, азимуты и расстояния — в наземной геодезической сети; экваториальные топоцентрические координаты, топоцентрические расстояния, радиальные скорости и другие элементы — в пространственных геодезических сетях, развиваемых по наблюдениям небесных объектов. За необходимые параметры обычно принимают координаты пунктов и небесных объектов.

Измерения таковы, что они имеют малые погрешности и могут быть приняты за предварительные значения L' уравниваемых величин. Особой заботой является вычисление достаточно точных счислимых значений координат.

2. Устанавливают связь каждой уравниваемой величины L с необходимыми параметрами. Фундаментальное параметрическое уравнение для каждой уравниваемой величины имеет вид

$$\Phi_i = f_i(X) - L_i = 0, \tag{21.1}$$

$$X = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_k, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

3. Приводя нелинейную функцию (21.1) к линейному виду, получают параметрические уравнения поправок

$$V = B\delta X + l \tag{21.2}$$

и решают их под условием $[pv^2] = \min$ с полной оценкой уравниваемых величин и необходимых параметров.

В теоретическом плане все эти этапы нами подробно рассмотрены в предыдущих трех главах.

§ 22. Пример уравнивания направлений в триангуляции

Все этапы вычислений покажем на примере уравнивания триангуляции, изображенной на рис. 37. Исходные данные для уравнивания, извлеченные из каталогов и материалов предварительных вычислений триангуляции, приведены в табл. 6 и 7.

Выписка исходных данных делается тщательным образом и проверяется во вторую руку. Затем приступают к вычислению дирекционных углов и длин сторон триангуляции, точно соответствующих счислимым координатам пунктов. Результаты таких вычислений, выполненных со всеми необходимыми контролями, сведены в табл. 8.

После того как проверена правильность вычисления всех коэффициентов a и b, значения их выписывают на схеме сети у определяемых пунктов. Выписка коэффициентов должна быть проверена во вторую руку.

Таблица 6

Координаты исходных и определяемых пунктов

№ пункта	Название пункта	Предварительные координаты		$0{,}1\xi$	$0{,}1\eta$	Окончательные координаты	
		x^0	y^0			x	y
1	Сармат					6431500,00	8575000,00
2	Окуловка					6435000,00	8598000,00
3	Лаврушино					6417250,00	8589750,00
4	Ногайск	6427500,00	8587250,00	+0,02	—0,03	6427500,02	8587249,97
5	Цыганово	6422500,00	8598500,00	+0,03	+0,02	6422500,03	8598500,02
6	Ефимовка	6417250,00	8589750,00	+0,02	—0,02	6417250,02	8589749,98

Таблица 7

Вычисление дирекционных углов, сторон и коэффициентов уравнений

Обозначения	Направления		
	2—1	2—3	2—5
Δx	—3 500,00	—17 750,00	—12 500,00
Δy	—23 750,00	—9 000,00	—250,00
$\mathrm{tg}\,\alpha$ ($\mathrm{ctg}\,\alpha$)	+0,1473684	+0,5070423	+0,0200000
α_0	261° 37′ 00,30″	206° 53′ 12,97″	181° 08′ 44,75″
$\sin\alpha_0$	—0,9893150	—0,4522313	—0,0199960
$\cos\alpha_0$	—0,1457939	—0,8919007	—0,9998001
s_1	24 006,49	19 901,32	12 502,50
s_2	24 006,50	19 901,32	12 502,50
$s_{ср}$	24 006,50	19 901,32	12 502,50
a	—0,850	—0,469	—0,033
b	+0,125	+0,924	+1,649
$\Delta x + 0{,}30$	—3 499,70	—17 749,70	—12 499,70
$\Delta y + 0{,}30$	—23 749,70	—8 999,70	—249,70
$\mathrm{tg}\,\bar{\alpha}$ ($\mathrm{ctg}\,\bar{\alpha}$)	+0,1473577	+0,5070339	+0,0199765
$\bar{\alpha}$	261° 37′ 02,46″	206° 53′ 11,59″	181° 08′ 39,90″
$(a+b)\,3{,}0$	—2,18	+1,37	+4,35
$\alpha_0-\bar{\alpha}$	—2,16	+1,38	+4,85
$\xi_k-\xi_i$			—0,26
$\eta_k-\eta_i$			—0,17
$\Delta\alpha$			—0,27
α	261° 37′ 00,30″	206° 53′ 12,97″	181° 08′ 44,48″

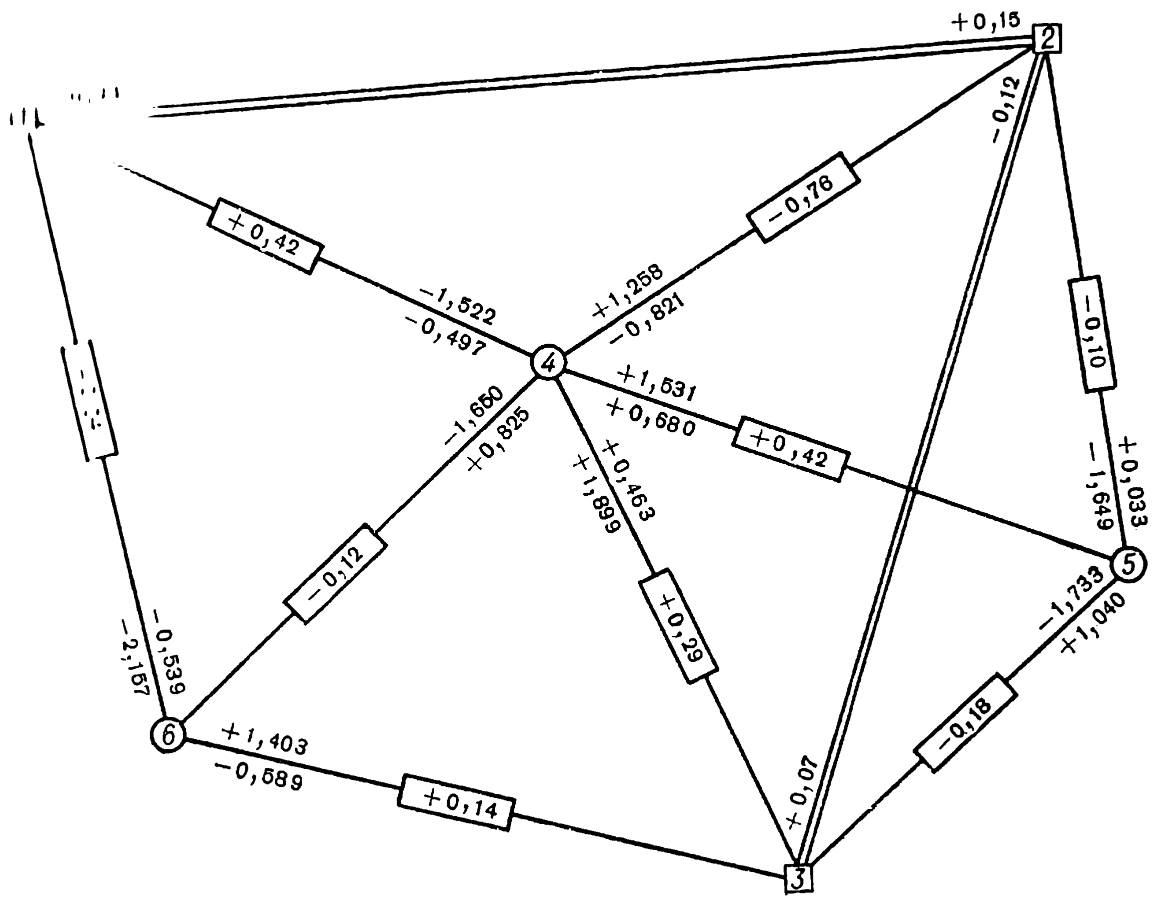


Рис. 37.
Схема триангуляции

…ний поправок

1—4	1—6	3—4	3—5
—4 000,00	—9 000,00	+10 250,00	+5 250,00
+12 250,00	+2 250,00	—2 500,00	+8 750,00
—0,3265306	—0,2500000	—0,2439024	+0,6000000
108° 05′ 00,41″	165° 57′ 49,52″	346° 17′ 34,95″	59° 02′ 10,47″
+0,9506055	+0,2425357	—0,2369556	+0,8414929
—0,3104018	—0,9701425	+0,9715205	+0,5144957
12 886,52	9 276,99	10 550,50	10 204,16
12 886,52	9 276,99	10 550,47	10 204,16
12 886,52	9 276,99	10 550,48	10 204,16
+1,522	+0,539	—0,463	+1,733
+0,497	+2,157	—1,899	—1,040
—3 999,70	—8 999,70	10 250,30	+5 250,30
+12 250,30	+2 250,30	—2 499,70	+8 750,30
—0,3264981	—0,2500417	—0,2438660	+0,6000137
108° 04′ 54,35″	165° 57′ 41,43″	346° 17′ 42,04″	59° 02′ 08,39″
+6,06	+8,09	—7,09	+2,08
+6,06	+8,09	—7,09	+2,08
—0,21	—0,20	—0,21	—0,26
+0,28	+0,18	+0,28	—0,17
—0,18	+0,28	—0,33	—0,27
108° 05′ 00,23″	165° 57′ 49,80″	346° 17′ 34,52″	59° 02′ 10,20″

Продолжение табл. 7

Обозначения	Направления			
	3—6	4—5	4—2	6—4
Δx	5 250,00	—5 000,00	+7 500,00	+5 000,00
Δy	—12 500,00	+11 250,00	+11 500,00	+10 000,00
$\operatorname{tg}\alpha$ ($\operatorname{ctg}\alpha$)	—04200000	—0,4444444	+0,6521739	+0,5000000
α_0	292° 46′ 56,67″	113° 57′ 44,95″	56° 53′ 19,18″	63° 26′ 05,81″
$\sin\alpha_0$	—0,9219821	—0,9138115	+0,8376106	+0,8944272
$\cos\alpha_0$	+0,3872325	—0,4061385	+0,5462677	+0,4472136
s_1	13 557,75	12 311,07	13 729,55	11 180,34
s_2	13 557,75	12 311,07	13 729,53	11 180,33
$s_{\text{ср}}$	13 557,75	12 311,07	13 729,54	11 180,34
a	—1,403	+1,531	+1,258	+1,650
b	—0,589	+0,680	—0,821	—0,825
$\Delta x + 0{,}30$	+5 250,30	—4 999,70	+7 500,30	5 000,30
$\Delta y + 0{,}30$	—12 499,70	+11 250,30	+11 500,30	10 000,30
$\operatorname{tg}\bar{\alpha}$ ($\operatorname{ctg}\bar{\alpha}$)	—0,4200341	—0,4444059	+0,6521830	+0,5000150
$\bar{\alpha}$	292° 47′ 02,65″	113° 57′ 38,32″	56° 53′ 17,86″	63° 26′ 03,33″
$(a+b)$ 3,0	—5,98	+6,63	+1,31	+2,48
$\alpha_0 - \bar{\alpha}$	—5,98	+6,63	+1,32	+2,48
$\xi_k - \xi_i$	—0,20	—0,05	+0,21	—0,01
$\eta_k - \eta_i$	+0,18	—0,45	—0,28	+0,10
$\Delta\alpha$	+0,17	—0,38	+0,49	—0,10
α	292° 46′ 56,84″	113° 57′ 44,57″	56° 53′ 19,67″	68° 26′ 05,71″

Следующим важным этапом является вычисление свободных членов уравнений поправок. Свободные члены удобно вычислять по схеме табл. 9.

Заполняют графы 1—3 (см. табл. 9) и проверяют правильность заполнения во вторую руку. В графе 4 вычисляют значения $\alpha^0 - M'$; в случае обнаружения больших расхождений между ними проверяют вычисления α^0 и выписку исходных данных.

В этой же графе вычисляется предварительное значение ориентирующего угла на каждом пункте

$$z_k^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ki}^0 - M'_{ki}\right)}{n}.$$

Затем в графе 5 вычисляют значения свободного члена $l_{ki} = (\alpha_{ki}^0 - M'_{ki}) - z_k^0$ и эти же значения выписывают карандашом на схеме сети.

Вычисления свободных членов на пункте контролируют по формуле $[l_{ki}] = 0$ и по невязкам треугольников (см. табл. 8).

Проверив правильность вычисления всех свободных членов, выписывают на схеме посредине определяемых сторон (в прямоугольниках) значения $l_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(l_{ki} + l_{ik})$. Вычисления $l_{\text{ср}}$ и

Таблица 8

Составление треугольников и контроль вычислений

Номер треугольника	Названия вершин	Углы $M'_{kj}-M'_{ki}$	$l_{kj}-l_{ki}$	$v_{kj}-v_{ki}$	Уравненные углы
1	4 2 3	109° 24′ 15,20″ 30 00 06,78 40 35 38,79	+0,57″ —0,57 —0,76	—0,35″ —0,08 —0,33	109° 24′ 14,85″ 30 00 06,70 40 35 38,45
W_1	+0,77″	180° 00′ 00,77″	—0,76″	—0,76″	180° 00′ 00,00″
2	5 4 2	67° 11′ 00,91″ 57 04 24,36 55 44 35,78	—1,11″ +1,40 —1,35	—1,00″ +0,53 —0,59	67° 10′ 59,91″ 57 04 24,90 55 44 35,19
W_2	+1,05″	180° 00′ 01,05″	—1,06″	—1,06″	180° 00′ 00,00″
3	3 4 5	72° 44′ 37,30″ 52 19 50,84 54 55 34,81	—1,78″ —0,83 —0,33	—1,62″ —0,88 —0,44	72° 44′ 35,68″ 52 19 49,96 54 55 34,36
W_3	+2,95″	180° 00′ 02,95″	—2,94″	—2,94″	180° 00′ 00,00″
4	6 4 3	49° 20′ 50,24 77 08 30,46 53 30 37,50	+0,62″ +0,40 +0,78	+0,89″ +0,73 +0,18	49° 20′ 51,13″ 77 08 31,19 53 30 37,68
W_4	—1,80″	179° 59′ 58,20″	+1,80″	+1,80″	180° 00′ 00,00″
5	1 4 6	57° 52′ 49,87″ 44 38 54,41 77 28 16,87	—0,75″ +0,19 —0,58	—0,29″ +0,11 —0,96	57° 52′ 49,57″ 44 38 54,52 77 28 15,91
W_5	+1,15″	180° 00′ 01,15″	—1,14″	—1,14″	180° 00′ 00,00″
6	2 1 4	24° 43′ 40,28″ 26 27 59,39 128 48 19,93	+0,84″ +0,72 —1,16	+0,35″ +0,54 —0,49	24° 43′ 40,63″ 26 27 59,93 128 48 19,44
W_6	—0,40″	179° 59′ 59,60″	+0,40″	+0,40″	180° 00′ 00,00″

Таблица 9

Вычисление свободных членов и поправок

Направление	α°	M′
1	2	3
1—2	81° 37′ 00,30″	0° 00′ 00,00″
1—4	108 05 00,41	26 27 59,39
1—6	165 57 49,52	84 20 49,26
2—5	181° 08′ 44,75″	0° 00′ 00,00″
2—3	206 53 12,97	25 44 29,00
2—4	236 53 19,18	55 44 35,78
2—1	261 37 00,30	80 28 16,06
3—5	59° 02′ 10,47″	0° 00′ 00,00″
3—6	292 46 56,67	233 44 45,20
3—4	346 17 34,95	287 15 22,70
3—2	26 53 12,97	327 51 01,49
4—2	56° 53′ 19,18″	0° 00′ 00,00″
4—5	113 57 44,95	57 04 24,36
4—3	166 17 34,95	109 24 15,20
4—6	243 26 05,81	186 32 45,66
4—1	288 05 00,41	231 11 40,07
5—2	1° 08′ 44,75″	0° 00′ 00,00″
5—3	239 02 10,47	237 53 24,28
5—4	293 57 44,95	292 48 59,09
6—4	63° 26′ 05,81″	0° 00′ 00,00″
6—3	112 46 56,67	49 20 50,24
6—1	345 57 49,52	282 31 43,13

Направление	$z° = α° - M'$	l [l]	$Δα - δz$	v [v]
1	4	5	6	7
1—2	81° 37′ 00,30″	—0,23″		—0,26″
1—4	01,02	+0,49	—0,18	+0,28
1—6	00,26	—0,26	+0,28	—0,01
	81° 37′ 00,53″	0,00″	—0,03″	+0,01″
2—5	181 08 44,75	+0,66	—0,27	+0,33
2—3	43,97	—0,12		—0,18
2—4	43,40	—0,69	+0,49	—0,26
2—1	44,24	+0,15		+0,09
	181° 08′ 44,09″	0,00″	—0,06″	—0,02″

Направление	$z^\circ = \alpha^\circ - M'$	l [l]	$\Delta\alpha - \delta z$	v [v]
1	4	5	6	7
3—5	59° 02′ 10,47″	—0,95″	—0,27″	—1,09″
3—6	11,47	+0,05	+0,17	+0,35
3—4	12,25	+0,83	—0,43	+0,53
3—2	11,48	+0,07		+0,20
	59° 02′ 11,42″	0,00″	+0,13″	—0,01″
4—2	56 53 19,18	—0,82	+0,49	—0,21
4—5	20,59	+0,58	—0,38	+0,32
4—3	19,75	—0,25	—0,43	—0,56
4—6	20,15	+0,15	—0,10	+0,17
4—1	20,34	—0,34	—0,18	+0,28
	56° 53′ 20,02″	0,00″	+0,12″	0,00″
5—2	1 08 44,75	—0,85	—0,27	—0,81
5—3	46,19	+0,59	—0,27	+0,63
5—4	45,86	+0,26	—0,38	+0,19
	1° 08′ 45,60″	0,00″	—0,31″	+0,01″
6—4	63 26 05,81	—0,40	—0,10	—0,62
6—3	06,43	+0,22	+0,17	+0,27
6—1	06,39	+0,18	+0,28	+0,34
	63° 26′ 06,21″	0,00″	—0,12″	—0,01″

выписку их следует проверять во вторую руку. При этом должно соблюдаться условие $2\ [l_{ср}] + l_{исх} = 0$.

Затем составляют таблицу коэффициентов редуцированных уравнений поправок (табл. 10). Выписывают в верхнюю часть таблицы из схемы коэффициенты и свободные члены уравнений поправок, редуцированных по второму правилу Шрейбера. Веса принимают равными единице. В нижнюю часть таблицы выписывают суммарное уравнение поправок для каждого пункта, приведенное к весу $p_\Sigma = -1$. Для этого каждый коэффициент суммарного уравнения на пункте делят на $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ (n — число направлений на данном пункте).

Коэффициенты нормальных уравнений вычисляют и записывают в таблицу на строках N_1, N_2, ..., N_k (приложение 3). Одновременно вычисляют контрольные столбцы s и s'. При этом в графе s' записывается сумма произведений, а в графе s — сумма элементов соответствующей строки, например, для первой строки:

$$s_1 = [aa] + [ab] + \cdots + [ak] + [al].$$

Определив поправки координат ξ и η из решения системы нормальных уравнений, контролируют по суммарным уравнениям, выписывают в табл. 10 и вычисляют уравненные значения координат. Кроме того, значения ξ и η выписывают в рабочую схему и табл. 10.

Подставив поправки ξ и η в суммарные уравнения поправок (нижняя часть табл. 10), определяют δz и выписывают их с обратным знаком в графу 6 табл. 9.

При помощи схемы вычисляют значения $(\xi_k - \xi_i)$ и $(\eta_k - \eta_i)$, которые выписывают в табл. 7, и там же вычисляют поправки дирекционных углов по формуле

$$\Delta\alpha_{ki} = (\xi_k - \xi_i)\, a_{ki} + (\eta_k - \eta_i)\, b_{ki}.$$

Строкой ниже вычисляют уравненные значения дирекционных углов

$$\alpha_{ki} = \overset{0}{\alpha}_{ki} + \Delta\alpha_{ki}.$$

Значения $\Delta\alpha_{ki}$ выписывают в графу 6 табл. 9 и на каждом пункте контролируют вычисления равенством

$$\delta z_k = \frac{[\Delta\alpha]}{n},$$

где n — число направлений на пункте.

Таблица 10

Таблица коэффициентов редуцированных уравнений поправок

Направление	p	4. Ногайск		5. Цыганово	
		a +0,208	b −0,282	a +0,256	b +0,170
1	2	3	4	5	6
4—2	1	+1,258	—0,821		
4—5	1	+1,531	+0,680	—1,531	—0,680
4—3	1	+0,463	+1,899		
4—6	1	—1,650	+0,825		
4—1	1	—1,522	—0,497		
5—2	1			+0,033	—1,649
5—3	1			—1,733	+1,040
6—3	1				
6—1	1				
Σ_1	—1	0,621	—0,203		
Σ_2	—1	+0,445	—0,291	+0,012	—0,584
Σ_3	—1	+0,164	+0,672	—0,613	+0,368
Σ_4	—1	+0,025	+0,659	—0,484	—0,215
Σ_5	—1	+0,625	+0,277	—1,318	—0,526
Σ_6	—1	—0,673	+0,337		

$2\,[l_{\text{ср}}] +$

В табл. 9 вычисляют поправки в измеренные направления:

$$v_{ki} = -\delta z_k + \Delta\alpha_{ki} + l_{ki}.$$

Вычисления поправок на каждом пункте контролируются равенством $[v] = 0$ и независимо по невязкам треугольников в табл. 8.

Заключительным контролем является полное соответствие уравненных углов в табл. 8 разностям уравненных дирекционных углов соответствующих сторон.

Наконец, выполняется оценка точности:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{4,22}{10}} = 0,65'';$$

$$m_{\eta_6} = \frac{0,65}{\sqrt{2,88}} = 0,38 \text{ дм};$$

$$m_{\xi_6} = \frac{0,65}{\sqrt{\frac{3,84}{2,66 \cdot 2,88}}} = 0,46 \text{ дм}.$$

6. Ефимовка		$l_{ср}$	s	s'
a +0,200	b —0,184			
7	8	9	10	11
		—0,76	—0,323	
		+0,42	+0,420	
		+0,29	+2,652	
+1,650	—0,825	—0,12	—0,120	
		+0,42	—1,599	
		—0,10	—1,716	
		—0,18	—0,873	
+1,403	+0,589	+0,14	+2,132	
—0,539	—2,157	—0,04	—2,736	
—0,220	—0,880	0	—1,924	—1,924
		0	—0,418	—0,417
+0,497	+0,209	0	+1,297	+1,296
+0,521	—0,261	0	+0,245	+0,246
		0	—0,942	—0,942
+1,026	—0,976	0	—0,286	—0,287

$[l_{исх}] = 0,01''$.

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

§ 26. Основные этапы уравнивания

Процесс уравнивания геодезической сети коррелатным способом заключается в следующем.

1. Устанавливают уравниваемые величины L. Как правило, в качестве уравниваемых величин берут измеренные величины, а за их предварительные значения принимают результаты измерений L'.

2. Составляют r необходимых и независимых условных уравнений

$$\Phi(L) = 0 \tag{26.1}$$

и приводят их к линейному виду

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial L}\right)_0 V + W = 0, \tag{26.2}$$

где свободный член $W = \Phi\,(L')$.

3. Решают уравнение (26.2) по методу наименьших квадратов с полной оценкой всех неизвестных.

В теоретическом плане все эти этапы подробно рассмотрены в главах 1, 2 и 3.

§ 27. Пример уравнивания геодезической сети коррелатным способом

На примере рассмотрим уравнивание направлений в геодезической сети (см. рис. 37) по способу коррелат. Исходные данные для уравнивания приведены в табл. 11 и 12. Средняя квадратическая погрешность измерения направления 0,7″. Относительные погрешности исходных сторон 1 : 200 000. Средняя квадратическая погрешность исходных дирекционных углов $m_\alpha = 0{,}8''$.

1. Пользуясь изложенными в гл. 3 правилами, подсчитаем число и виды условных уравнений.

Число всех пунктов $p = 6$ (на всех пунктах измерены направления); независимых элементов сети $m = 28$ (шесть координат исходных пунктов и 22 направления); независимых условий $r = m - 3p = 28 - 18 = 10$; ориентируемых сторон $k_\beta = 11$; углов («измеренных» и исходных дирекционных) $n_\beta = 19$; центральных фигур $n_c = 1$; независимых угловых условий

$$r_N = n_\beta - k_\beta - n_c = 7,$$

в том числе одно условие исходных дирекционных углов и шесть условий фигур.

Число условий фигур $r_f = n_f + 1 - p = 6$.

Остальные три условия будут линейными. Из них — число условий полюса $r_* = 11 + 3 - 2 \times 6 = 2$.

Остается одно условие базиса, так как избыточно задана одна исходная сторона.

2. Приступим к составлению условных уравнений. В сети семь треугольников. Из них выберем только шесть.

Чтобы облегчить вычисления коэффициентов и свободных членов условных уравнений фигур, составим список треугольников (табл. 13), в котором на заключительном этапе будет произведено контрольное решение треугольников по уравненным углам

Таблица 11

Исходные данные

Номер пункта	Название	Координаты	Дирекционные углы, логарифмы сторон
1	Сармат	6 431 500,00 8 575 000,00	
			81° 37′ 00,30″ 4.380 3288
2	Окуловка	6 435 000,00 8 598 00,00	
			206° 53′ 12,97″ 4.298 8819
3	Лаврушино	6 417 250,00 8 589 750,00	

Таблица 12

Измеренные направления
(приведенные к центрам пунктов и на плоскость)

Направление	Результаты измерений	Направление	Результаты измерений	Номер и название определяемого пункта
1—2	0° 00′ 00,00″	4—2	0° 00′ 00,00″	
1—4	26 27 59,39	4—5	57 04 24,36	4. Ногайск
1—6	84 20 49,26	4—3	109 24 15,20	5. Цыганово
		4—6	186 32 45,66	
2—5	0 00 00,00	4—1	231 11 40,07	6. Ефимовка
2—3	25 44 29,00	5—2	0 00 00,00	
2—4	55 44 35,78	5—3	237 53 24,28	
2—1	80 28 16,06	5—4	292 48 59,09	
3—5	0 00 00,00			
3—6	233 44 45,20	6—4	0 00 00,00	
3—4	287 15 22,70	6—3	49 20 50,24	
3—2	327 51 01,49	6—1	282 31 43,13	

для проверки соблюдения условий фигур, дирекционных углов, базиса и полюса.

В этой таблице вычислены свободные члены условий фигур.

Допустимое значение свободного члена для условных уравнений фигур (треугольников) определяем

$$W_{\text{доп}} = 2{,}5 \times 0{,}7'' \sqrt{6} = 4{,}2''.$$

Как видно из табл. 13, все свободные члены условных уравнений фигур по абсолютной величине меньше 3″.

Таблица 13

Составление треугольников и вычисление окончательных координат

Номер треугольника	Вершины треугольников	Углы, вычисленные по направлениям	Поправки
1	4 2 3 $W_a = +0{,}77''$	109° 24′ 15,20″ 30 00 06,78 40 35 38,79 180 00 00,77	—0,31″ —0,08 —0,38 —0,77
2	5 4 2 $W_b = +1{,}05''$	67° 11′ 00,91″ 57 04 24,36 55 44 35,78 180 00 01,05	—1,03″ +0,57 —0,59 —1,05
3	3 4 5 $W_c = +2{,}95''$	72° 44′ 37,30″ 52 19 50,84 54 55 34,81 180 00 02,95	—1,62″ —0,88 —0,45 —2,95
4	6 4 3 $W_d = -1{,}80''$	49° 20′ 50,24″ 77 08 30,46 53 30 37,50 179 59 59,20	+0,96″ +0,73 +0,11 +1,80
5	1 4 6 $W_e = +1{,}15''$	57° 52′ 49,87″ 44 38 54,41 77 28 16,87 180 00 01,15	—0,27″ +0,14 —1,02 —1,15
6	2 1 4 $W_f = -0{,}40''$	24° 43′ 40,28″ 26 27 59,39 128 48 19,93 179 59 59,60	+0,36″ +0,59 —0,55 +0,40

Пользуясь схемой сети (см. рис. 37) и списком треугольников, пишем условные уравнения фигур для измеренных направлений:

$$v_{43} - v_{42} + v_{24} - v_{23} + v_{32} - v_{34} + 0{,}77'' = 0,$$
$$v_{52} - v_{54} + v_{45} - v_{42} + v_{24} - v_{25} + 1{,}05'' = 0,$$
$$v_{35} - v_{34} + v_{43} - v_{45} + v_{54} - v_{53} + 2{,}95'' = 0,$$
$$v_{63} - v_{64} + v_{46} - v_{43} + v_{34} - v_{36} - 1{,}80'' = 0,$$
$$v_{16} - v_{14} + v_{41} - v_{46} + v_{64} - v_{61} + 1{,}15'' = 0,$$
$$v_{21} - v_{24} + v_{42} - v_{41} + v_{14} - v_{12} - 0{,}40'' = 0.$$

Уравненные углы	x	Котангенсы уравненных углов	y
109° 24′ 14,89″ 30 00 06,70 40 35 38,41 180 00 00,00	27 500,02 35 000,00 17 250,00	—0,3522 913 1,7319 209 1,1669 672 2,8988 881	87 249,97 98 750,00 89 750,00
67° 10′ 59,88″ 57 04 24,93 55 44 35,19 180 00 00,00	22 500,02 27 500,02 35 000,00	0,4207 043 0,6475 830 0,6810 519	98 500,02 87 249,97 98 750,00
72° 44′ 35,68″ 52 19 49,96 54 55 34,36 180 00 00,00	17 250,00 27 500,02 22 500,03	0,3106 375 0,7720 366 0,7021 285 1,0826 741	89 750,00 87 249,97 98 500,02
49 20 51,20 77 08 31,19 53 30 37,61 180 00 00,00	22 500,02 27 500,02 17 250,00	0,8586 927 0,2282 592 0,7396 789 0,9679 381	77 249,99 87 249,97 89 750,00
57° 52′ 49,60″ 44 38 54,55 77 28 15,85 180 00 00,00	31 500,00 27 500,02 22 500,02	0,6277 745 1,0123 460 0,2222 245 1,6401 205	75 00,00 87 249,97 77 249,98
24° 43′ 40,64 26 27 59,98 128 48 19,38 180 00 00,00	35 000,00 31 500,00 27 500,02	2,1713 64 2,0086 15 —0,8041 754 4,1799 79	98 750,00 75 000,00 87 249,97

Условие дирекционных углов на пункте 2

$$v_{21} - v_{23} + 54^\circ 43' 47{,}06'' - (261^\circ 37' 00{,}30'' -$$

$$- 206^\circ 53' 12{,}97'') = 0$$

или

$$v_{21} - v_{23} - 0{,}27'' = 0.$$

Допустимое значение

$$W_{\text{доп}} = 2{,}5\sqrt{2[(0{,}8)^2 + (0{,}7)^2]} = 3{,}8''.$$

Свободные члены уравнений линейных условий (двух полюсов и одного базиса) и необходимые коэффициенты вычислены в табл. 14—16.

Таблица 14

Полюсное условие (полюс центральной фигуры — пункт 4)
$W_h = \lg\sin(1)_{42} + \lg\sin(2)_{43} + \lg\sin(6)_{41} + \lg\sin(3)_{46} -$
$- \lg\sin(3)_{24} - \lg\sin(2)_{14} - \lg\sin(6)_{34} - \lg\sin(1)_{64}$

Угол	Логарифм синуса угла	δ_i (в единицах 6-го знака логарифма)	Угол	Логарифм синуса угла	δ_i (в единицах 6-го знака логарифма)
$(1)_{42}$	9.649 0177	+4,23	$(2)_{14}$	9.621 4969	+4,57
$(2)_{43}$	9.698 9947	+3,65	$(3)_{24}$	9.813 3782	+2,46
$(3)_{46}$	9.905 2371	+1,55	$(6)_{34}$	9.880 0542	+1,81
$(6)_{41}$	9.989 5333	+0,47	$(1)_{64}$	9.927 8532	+1,32
Σ_1	9.242 7828		Σ_2	9.242 7825	

$W_h = +0{,}30$ единицам шестого знака логарифма; $W_{\text{доп}} = 20{,}0$ единицам шестого знака логарифма; $[\delta^2] = 65{,}7940$.

Таблица 15

Полюсное условие (полюс геодезического четырехугольника — пункт 4)
$W_i = \lg\sin(2)_{45} + \lg\sin(5)_{43} + \lg\sin(3)_{24} - \lg\sin(5)_{24} -$
$- \lg\sin(3)_{54} - \lg\sin(2)_{43}$

Угол	Логарифм синуса угла	δ_i (в единицах 6-го знака логарифма)	Угол	Логарифм синуса угла	δ_i (в единицах 6-го знака логарифма)
$(2)_{45}$	9.917 2553	+1,43	$(5)_{24}$	9.964 6141	+0,89
$(5)_{43}$	9.912 9730	+1,48	$(3)_{54}$	9.979 9976	+0,66
$(3)_{24}$	9.813 3782	+2,46	$(2)_{43}$	9.698 9947	+3,65
Σ_1	9.643 6065		Σ_2	9.643 6064	

$W_i = +0{,}1$ единицы шестого знака логарифма; $W_{\text{доп}} = 12{,}5$ единицы шестого знака логарифма; $[\delta^2] = 24{,}8371$.

Условные уравнения полюсов (согласно табл. 14 и 19)

$$4{,}23\,(v_{14}-v_{12})+3{,}65\,(v_{24}-v_{23})+1{,}55\,(v_{34}-v_{36})+$$

$$+0{,}47\,(v_{64}-v_{61})-4{,}57\,(v_{21}-v_{24})-2{,}46\,(v_{32}-v_{31})-$$

$$-1{,}81\,(v_{63}-v_{64})-1{,}32\,(v_{16}-v_{14})+0{,}30=0;$$

$$1{,}43\,(v_{24}-v_{25})+1{,}48\,(v_{54}-v_{53})+2{,}46\,(v_{32}-v_{34})-$$

$$-0{,}89\,(v_{52}-v_{54})-0{,}66\,(v_{35}-v_{34})-3{,}65\,(v_{24}-v_{23})+0{,}10=0.$$

Условные уравнения базиса (согласно табл. 16):

$$4{,}23\,(v_{14}-v_{12})-0{,}74\,(v_{43}-v_{42})+1{,}70\,(v_{42}-v_{41})-$$

$$-2{,}46\,(v_{32}-v_{34})-2{,}60=0.$$

Допустимые значения свободных членов полюсных и базисных уравнений помещены соответственно в табл. 14—16.

3. Составим таблицу коэффициентов условных уравнений поправок (табл. 17), при помощи которой удобно будет вычислять нормальные уравнения.

Таблица 16

Базисное условие
$W_j=\lg s_{12}+\lg\sin(1)_{42}+\lg\sin(4)_{32}-\lg s_{23}-\lg\sin(4)_{21}-$
$-\lg\sin(3)_{24}$

Сторона, угол	Логарифм стороны (синуса угла)	$\delta_s\,(\delta_i)$	Сторона, угол	Логарифм стороны (синуса угла)	$\delta_s\,(\delta_i)$
s_{12}	4.380 3288	+1,80	s_{23}	4.298 8819	+2,17
$(1)_{42}$	9.649 0177	+4,23	$(4)_{21}$	9.891 6921	—1,70
$(4)_{32}$	9.974 6030	—0,74	$(3)_{24}$	9.813 3782	+2,46
Σ_1	4.003 9495		Σ_2	4.003 9522	

$W_j=-2{,}70$; $[\delta^2]=27{,}3821$;
δ_s — перемена логарифмов в шестом знаке при изменении стороны на 1 дм;
δ_i — перемена логарифмов синуса угла в шестом знаке при изменении угла на 1″.

$W_{\text{доп}}=2{,}5\sqrt{[(1{,}80)^2+(2{,}17)^2]\,m_s^2+27{,}38\cdot 2m^2}=15{,}0$ единицам шестого знака логарифма; $m=0{,}7''$; $m_s=1$ дм.

Нормальные уравнения решены по алгоритму Гаусса.

4. Подставив найденные значения коррелат (приложение 4) вычислим поправки к измеренным направлениям и погрешности единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} = \left(\frac{4,48}{10}\right)^{1/2} = 0,67''.$$

5. В табл. 13 приведены окончательные вычисления координат по формулам Юнга.

§ 28. Двухгрупповое уравнивание триангуляции по способу Крюгера—Урмаева

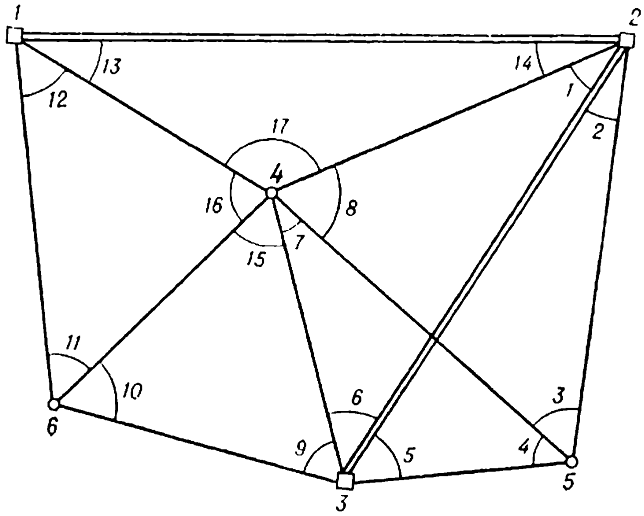
В триангуляции с большим числом условных уравнений вычислительные работы становятся очень трудоемкими. Для облегчения часто переходят к делению условных уравнений на группы и их раздельному решению. Но решение каждой группы условных

Таблица 17

Коэффициенты условных уравнений поправок

v	a 0,831	b −0,638	c −0,956	d −0,077	e −0,257	f −1,784
1	2	3	4	5	6	7
1—2						−1
1—4					−1	+1
1—6					+1	
2—5		−1				
2—3	−1					
2—4	+1	+1				−1
2—1						+1
3—5			+1			
3—6				−1		
3—4	−1		−1	+1		
3—2	+1					
4—2	−1	−1				+1
4—5		+1	−1			
4—3	+1		+1	−1		
4—6				+1	−1	
4—1					+1	−1
5—2		+1				
5—3			−1			
5—4		−1	+1			
6—4				−1	+1	
6—3				+1		
6—1					−1	
W	+0,77	+1,05	+2,95	−1,80	+1,15	−0,40

Рис. 43.
Схема триангуляции



уравнений в отдельности проводят так, чтобы получались те же результаты, какие получают при совместном их решении.

В триангуляции (рис. 43) наиболее эффективно применение двухгруппового способа решения систем условных уравнений. Обоснование широкого использования этого метода станет ясным

g +0,889	h −0,211	i +0,214	j +0,698	s	v
8	9	10	11	12	13
	—4,23		—4,23	—9,46	—0,31″
	+5,55		+4,23	+9,78	+0,28
	—1,32			—0,32	+0,02
		—1,43		—2,43	+0,33
—1	—3,65	+3,65		—2,00	—0,17
	+8,22	—2,22		+7,00	—0,26
+1	—4,57			—2,57	+0,10
		—0,66		+0,34	—1,10
	—1,55			—2,55	+0,42
	+4,01	—1,80	+2,46	+3,67	+0,53
	—2,46	+2,46	—2,46	—1,46	+0,15
			+2,44	+1,44	—0,25
				0,00	+0,32
			—0,74	+0,26	—0,56
				0,00	+0,17
			—1,70	—1,70	+0,32
		—0,89		+0,11	—0,83
		—1,48		—2,48	+0,64
		+2,37		+2,37	+0,19
	+2,28			+2,28	—0,66
	—1,81			—0,81	+0,30
	—0,47			—1,47	+0,36
—0,27	+0,30	+0,10	—2,70	$[v^2] = 4,48$	

после рассмотрения теории способа. Сущность способа заключается в следующем.

1. Условные уравнения делят на две группы:

I группа (r условных уравнений)

$$
\begin{aligned}
&a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + W_a = 0,\\
&b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n + W_b = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n + W_r = 0.
\end{aligned}
$$

II группа (τ условных уравнений)

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n + W_\alpha = 0,\\
&\beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \cdots + \beta_nv_n + W_\beta = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tau_1v_1 + \tau_2v_2 + \cdots + \tau_nv_n + W_\tau = 0.
\end{aligned}
$$

В этих уравнениях n — число измерений, при этом $n > r + \tau$.

2. Решают условные уравнения первой группы под условием $[v'^2] = \min$, т. е. составляют нормальные уравнения коррелат порядка r и, решая их, находят коррелаты k_a, $k_в$, ..., k_r, затем вычисляют первичные поправки

$$v_i' = a_ik_a + b_ik_b + \cdots + r_ik_r. \tag{28.1}$$

3. Уравниваемые величины исправляют первичными поправками и по этим исправленным величинам составляют условные уравнения второй группы. При этом коэффициенты второй группы преобразуют так, чтобы, решив вторую группу условных уравнений (с преобразованными коэффициентами и с новыми свободными членами) под условием $[v''^2] = \min$, можно было получить такие вторичные поправки v'', которые в сумме с первичными поправками v' давали бы величину общей поправки v, равную поправке, получаемой из совместного решения систем условных уравнений под условием $[v^2] = \min$.

Таким образом, должно соблюдаться условие

$$v = v' + v'', \tag{28.2}$$

а также условие нахождения искомого экстремума функции

$$[v^2] = [v'^2] + [v''^2].$$

Второе условие равносильно требованию

$$[v'v''] = 0, \tag{28.3}$$

ибо $[(v' + v'')^2] = [v'^2] + [v''^2] + 2\,[v'v'']$.

Напишем условные уравнения первой группы с учетом требования (28.2)

$$
\begin{aligned}
&[a(v' + v'')] + W_a = 0, \\
&[b(v' + v'')] + W_b = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[r(v' + v'')] + W_r = 0.
\end{aligned}
$$

Поскольку уравнения первой группы решают отдельно и из решений находят первичные поправки v', то необходимо, чтобы найденные из решения второй группы условных уравнений вторичные поправки не нарушали условий первой группы, т. е. чтобы соблюдались тождества

$$
\begin{aligned}
&[av'] + W_a = 0, \\
&[bv'] + W_b = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&[rv'] + W_r = 0,
\end{aligned}
\tag{28.4}
$$

необходимо найти вторичные поправки v'', удовлетворяющие условию

$$[av''] = [bv''] = \ldots = [rv''] = 0. \tag{28.5}$$

Напишем условные уравнения второй группы с учетом требования (28.2):

$$
\begin{aligned}
&[\alpha(v' + v'')] + W_\alpha = 0, \\
&[\beta(v' + v'')] + W_\beta = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[\tau(v' + v'')] + W_\tau = 0.
\end{aligned}
$$

Обозначив соответственно

$$
\begin{aligned}
&[\alpha v'] + W_\alpha = W_A, \\
&[\beta v'] + W_\beta = W_B, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&[\tau v'] + W_\tau = W_T,
\end{aligned}
\tag{28.6}
$$

запишем условные уравнения второй группы

$$
\begin{aligned}
&[\alpha v''] + W_A = 0, \\
&[\beta v''] + W_B = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&[\tau v''] + W_T = 0.
\end{aligned}
\tag{28.7}
$$

Эта система — система условных уравнений второй группы со свободными членами, вычисленными по исправленным значениям уравниваемых величин за первичные поправки v'.

Теперь остается преобразовать коэффициенты второй группы условных уравнений так, чтобы соблюдались все условия.

Пусть такое преобразование найдено, запишем уравнения второй группы с новыми коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&[Av''] + W_A = 0,\\
&[Bv''] + W_B = 0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&[Tv''] + W_T = 0.
\end{aligned}
\qquad (28.8)
$$

Из решения их под условием $[v''^2] = \min$ найдем коррелаты k_A, k_B, ..., k_T и вторичные поправки

$$v''_i = A_i k_A + B_i k_B + \cdots + T_i k_T. \qquad (28.9)$$

Если примем для преобразованных коэффициентов второй группы соблюдение условия

$$
\begin{aligned}
&[aA] = [aB] = \cdots = [aT] = 0,\\
&[bA] = [bB] = \cdots = [bT] = 0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&[rA] = [rB] = \cdots = [rT] = 0,
\end{aligned}
\qquad (28.10)
$$

то вторичные поправки v'', вычисленные по формуле (28.9), удовлетворят уравнения (28.5).

Заметим, что при соблюдении условия (28.10) удовлетворяется и условие $[v'v''] = 0$.

Действительно

$$
\begin{aligned}
[v'v''] = &\{[aA]\,k_A + [aB]\,k_B + \cdots + [aT]\,k_T\}\,k_a +\\
&+ \{[bA]\,k_A + [bB]\,k_B + \cdots + [bT]\,k_T\}\,k_b +\\
&\cdot\ \cdot\\
&+ \{[rA]\,k_A + [rB]\,k_B + \cdots + [rT]\,k_T\}\,k_r.
\end{aligned}
$$

Согласно условию (28.10), все коэффициенты перед коррелатами тождественно равны нулю, значит выполняется требование $[v'v''] = 0$.

Приступим к поиску преобразованных коэффициентов второй группы под условием (28.10).

Как видно из условных уравнений второй группы, число искомых коэффициентов A_i, B_i, ..., T_i равно $n\tau$, тогда как система (28.10) имеет $r\tau$ уравнений. Следовательно, система (28.10) является недоопределенной системой, имеющей множество решений. Выберем одно из возможных ее решений:

$$
\begin{aligned}
&A_i = \alpha_i + a_i\rho_{11} + b_i\rho_{12} + \cdots + r_i\rho_{1r},\\
&B_i = \beta_i + a_i\rho_{21} + b_i\rho_{22} + \cdots + r_i\rho_{2r},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&T_i = \tau_i + a_i\rho_{\tau 1} + b_i\rho_{\tau 2} + \cdots + r_i\rho_{\tau r}.
\end{aligned}
\qquad (28.11)
$$

Подставив в исходную систему (28.10) ее корни, т. е. выбранные нами значения преобразованных коэффициентов (28.11), получим:

$$
\left.\begin{aligned}
&[aA] = [aa]\rho_{11} + [ab]\rho_{12} + \cdots + [ar]\rho_{1r} + [a\alpha] = 0,\\
&[bA] = [ab]\rho_{11} + [bb]\rho_{12} + \cdots + [br]\rho_{1r} + [b\alpha] = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[rA] = [ar]\rho_{11} + [br]\rho_{12} + \cdots + [rr]\rho_{1r} + [r\alpha] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (28.12)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&[aB] = [aa]\rho_{21} + [ab]\rho_{22} + \cdots + [ar]\rho_{2r} + [a\beta] = 0,\\
&[bB] = [ab]\rho_{21} + [bb]\rho_{22} + \cdots + [br]\rho_{2r} + [b\beta] = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[rB] = [ar]\rho_{21} + [br]\rho_{22} + \cdots + [rr]\rho_{2r} + [r\beta] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (28.13)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&[aT] = [aa]\rho_{\tau 1} + [ab]\rho_{\tau 2} + \cdots + [ar]\rho_{\tau r} + [a\tau] = 0,\\
&[bT] = [ab]\rho_{\tau 1} + [bb]\rho_{\tau 2} + \cdots + [br]\rho_{\tau r} + [b\tau] = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[rT] = [ar]\rho_{\tau 1} + [br]\rho_{\tau 2} + \cdots + [rr]\rho_{\tau r} + [r\tau] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (28.14)
$$

Как видно из этих уравнений, каждая группа (28.12), (28.13), (28.14) отличается от нормальных уравнений первой группы только своим столбцом свободных членов. Отсюда можно заключить, что все искомые множители ρ_{ij} будут найдены однозначно так же, как и однозначно находили коррелаты первой группы.

Для их нахождения достаточно к нормальным уравнениям первой группы присоединить справа τ столбцов свободных членов и решить такую расширенную систему нормальных уравнений.

Подставляя в уравнение (28.11) найденные таким образом значения множителей ρ_{ij}, находим все преобразованные значения коэффициентов A_i, B_i, ..., T_i второй группы условных уравнений. Правильность вычисления коэффициентов преобразованных уравнений можно проверить по формулам (28.10).

Затем, решая условные уравнения второй группы (28.8) под условием $[v''^2] = \min$, находим коррелаты k_A, k_B, ..., k_T, удовлетворяющие нормальным уравнениям второй группы:

$$
\begin{aligned}
&[AA]k_A + [AB]k_B + \cdots + [AT]k_T + W_A = 0,\\
&[AB]k_A + [BB]k_B + \cdots + [BT]k_T + W_B = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[AT]k_A + [BT]k_B + \cdots + [TT]k_T + W_T = 0.
\end{aligned}
$$

Наконец, подставив найденные значения коррелат второй группы в уравнение поправок (28.9), находим вторичные поправки v''. При этом вторичные поправки v'', во-первых, найдены из условия, что сложение их с соответствующими первичными поправками v' дает полную поправку v, получаемую из совместного решения условных уравнений первой и второй групп условных уравнений; во-вторых, они найдены под условием соблюдения $[v'v''] = 0$, т. е. имеет место равенство

$$[vv] = [v'v'] + [v''v''] \tag{28.15}$$

и находится искомый экстремум функции.

Кроме того, вторичные поправки не нарушают условные уравнения первой группы, ибо соблюдается условие (28.5).

В заключение проводится оценка точности. Средняя квадратическая ошибка единицы веса вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[v'^2] + [v''^2]}{r + \tau}}.$$

Вычислив суммы $[v^2]$, $[v'^2]$, $v''^2]$ и проверив равенство (28.15), можно убедиться в правильности нахождения поправок к уравниваемым величинам.

Обратный вес функции измеренных величин вычисляют по формуле

$$Q_F = \left\{[ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \dots - \frac{[rf\cdot(r-1)]^2}{[rr\cdot(r-1)]} - \right.$$
$$\left. - \frac{[Af]^2}{[AA]} - \frac{[Bf\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]} - \dots - \frac{[Tf\cdot(\tau-1)]^2}{[TT\cdot(\tau-1)]}\right\},$$

ибо по условию (28.10) нормальные уравнения первой и второй групп не имеют общих множителей.

Эту формулу для обратного веса можно записать и так:

$$Q_F = [ff\cdot r] + [ff\cdot\tau] - [ff]. \tag{28.16}$$

Практически для вычисления обратного веса функции Q_F по формуле (28.16) необходимо при решении нормальных уравнений первой группы отвести добавочный столбец f, вписав в него коэффициенты $[af]$, $[bf]$, ..., $[rf]$, $[ff]$.

Точно так же следует поступать при решении нормальных уравнений второй группы, присоединив к ним столбец $[Af]$, $[Bf]$, ..., $[Tf]$.

Последовательно исключая коррелаты k_a, $k_в$, ..., k_r в системе нормальных уравнений первой группы и коррелаты k_A, k_B, ..., k_T в системе нормальных уравнений второй группы, одновременно преобразуем в каждой системе столбцы f. После исключения последней коррелаты k_r в первой системе, последней коррелаты k_T во второй системе в столбце f первой системы получим число $[ff\cdot r]$, а в столбце f второй системы — число $[ff\cdot\tau]$.

Рассмотренный нами двухгрупповой способ решения систем условных уравнений предложен немецким геодезистом Л. Крюгером. Способ строго решает любую систему условных уравнений. Однако в общем случае преобразование коэффициентов условных уравнений является весьма трудоемким из-за необходимости отыскания множителей ρ_{ij} и многократного умножения их на коэффициенты условных уравнений первой группы.

Но если в первую группу отнести условные уравнения, не имеющие общих неизвестных, то решение таких уравнений не представляет особого труда, ибо неквадратичные коэффициенты нормальных уравнений первой группы будут равны нулю. Следовательно, искомые коррелаты первой группы и множители ρ_{ij} (переходные коррелаты) будут найдены по формулам:

$$
\begin{aligned}
&k_A = -\frac{W_a}{[aa]};\ k_B = -\frac{W_b}{[bb]};\ \ldots;\ k_r = -\frac{W_r}{[rr]};\\
&\rho_{11} = -\frac{[a\alpha]}{[aa]};\ \rho_{12} = -\frac{[b\alpha]}{[bb]};\ \ldots;\ \rho_{1r} = -\frac{[r\alpha]}{[rr]};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\rho_{\tau 1} = -\frac{[a\tau]}{[aa]};\ \rho_{\tau 2} = -\frac{[b\tau]}{[bb]};\ \ldots;\ \rho_{\tau r} = -\frac{[r\tau]}{[rr]}.
\end{aligned}
\tag{28.17}
$$

Профессор Н. А. Урмаев пришел к выводу, что такой частный случай двухгруппового способа дает бо́льший эффект, если триангуляцию уравнивать по углам и при этом в первую группу отнести только условные уравнения неперекрывающихся фигур.

При таком способе разделения условные уравнения первой группы будут простыми и явно независимыми:

$$
\begin{aligned}
&v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_1} + W_1 = 0,\\
&v_{n_1+1} + v_{n_1+2} + \cdots + v_{n_1+n_2} + W_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$n_j (j = 1, 2, \ldots, n_j)$ — число углов в j-й фигуре.

Нормальные уравнения первой группы также распадаются на независимые уравнения вида:

$$
\begin{aligned}
&n_1 k_1 + W_1 = 0,\\
&n_2 k_2 + W_2 = 0,\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Следовательно, первичные поправки соответственно равны:

$$
\begin{aligned}
&v_1' = v_2' = \cdots = v_{n_1}' = -\frac{W_1}{n_1};\\
&v_{n_1+1}' = v_{n_1+2}' = \cdots = v_{n_1+n_2}' = -\frac{W_2}{n_2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{28.18}
$$

Таким образом, задача отыскания первичных поправок заключается в распределении невязки в каждой фигуре на все углы поровну. В триангуляции, как правило, почти все фигуры являются треугольниками. В этом случае невязка в треугольнике распределяется поровну на каждый угол.

Переходные множители ρ_{ij} также отыскивают по простым формулам

$$\rho_{1j} = -\frac{[\alpha]_j}{n_j}; \quad \rho_{2j} = -\frac{[\beta]_j}{n_j}; \quad \dots; \quad \rho_{\tau j} = -\frac{[\tau]_j}{n_j},$$

где $[\alpha]_j$, $[\beta]_j$, ..., $[\tau]_j$ — сумма соответствующих коэффициентов второй группы при углах j-й фигуры; n_j — число углов в j-й фигуре.

Искомые преобразованные коэффициенты вычисляют по формулам

$$\begin{aligned} A_i^{(j)} &= \alpha_i^{(j)} + \rho_{1i}, \\ B_i^{(j)} &= \beta_j^{(j)} + \rho_{2i}, \\ &\dots\dots\dots \\ T_i^{(j)} &= \tau_i^{(j)} + \rho_{\tau i}. \end{aligned} \tag{28.19}$$

Так как $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}, \dots, T_i^{(j)}$ являются уклонениями от арифметической середины, то можно использовать контрольные формулы:

$$A_i^{(j)},\ B_i^{(j)},\ \dots,\ T_i^{(j)}$$

$$[A]_j = [B]_j = \dots = [T]_j = 0, \tag{28.20}$$

согласно которым сумма преобразованных коэффициентов при углах фигуры j равна нулю.

Поскольку $a_i = b_i = \cdots = r_i = 1$ согласно условию (28.10),

$$[A] = [B] = \dots = [T] = 0. \tag{28.21}$$

Из формул (28.19) вытекает простое правило получения преобразованных коэффициентов условных уравнений второй группы. Преобразованные коэффициенты при поправках углов данной фигуры вычисляют как разности: непреобразованный коэффициент минус среднее арифметическое непреобразованных коэффициентов при поправках углов этой фигуры.

Порядок уравнивания в способе Крюгера—Урмаева следующий:

1. Распределяют невязки фигур (треугольников) поровну, в результате чего получают предварительно уравненные углы.
2. Вычисляют по предварительно уравненным углам свободные члены второй группы условных уравнений.
3. Вычисляют преобразованные коэффициенты второй группы по формулам (28.19), контролируя правильность вычислений формулой (28.20).
4. Составляют нормальные уравнения второй группы; из их решений находят коррелаты и затем вычисляют вторичные поправки по формуле (28.9).
5. Контролируют правильность вычислений вторичных поправок по формулам (28.3) и (28.5): $[v'v''] = 0$ и $[v''] = 0$.
6. Вычисляют значения уравненных углов $\beta = \beta' + v' + v''$ и проводят оценку точности и окончательные вычисления.

Для оценки обратного веса функции коэффициенты весовой функции преобразуют одновременно с коэффициентами условных уравнений второй группы по той же формуле

$$F_i^{(j)} = f_j - \frac{[f]_j}{n_j}$$

и записывают их в столбец F.

Затем совместно с нормальными уравнениями вычисляют столбец F, т. е. $[AF]$, $[BF]$, ..., $[TF]$, $[FF]$. В ходе решения нормальных уравнений преобразуют и столбец F, после исключения последней коррелаты k_T в столбце F получают обратный вес функции

$$Q_F = [FF] - \frac{[AF]^2}{[AA]} - \frac{[BF\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]} - \dots - \frac{[TF\cdot(\tau-1)]^2}{[TT\cdot(\tau-1)]}.$$