

Техническая книга

techbook.ru К. П. Учаев, С. Г. Емельянов,

К. П. Учаева, Е. И. Яцун, В. П. Борискин,

Н. П. Учаев, А. П. Титова

# ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

## ВВОДНЫЙ КУРС



ТОНКИЕ  
НАУКОЕМКИЕ  
ТЕХНОЛОГИИ

УДК 51(073)  
ББК 22.143я73  
У 90

Рецензенты:

профессор, доктор технических наук *М. Г. Косов*  
профессор, доктор технических наук *В. В. Сербровский*

*Учаев П. Н., Емельянов С. Г., Учаева К. П., Яцун Е. И.,  
Борискин В. П., Учаев Н. П., Титова А. П.*

У 90 **Оптимизация прикладных задач. Вводный курс:** учебное пособие / П. Н. Учаев, С. Г. Емельянов, К. П. Учаева [и др.]; под общ. ред. проф. П. Н. Учаева. — Старый Оскол: ТНТ, 2015. — 288 с.

ISBN 978-5-94178-432-5

Изложены основы и алгоритмы решения оптимизационных задач, а также задач с использованием методов одно- и многомерного поиска. Кроме того, показаны преобразования задач условной оптимизации в безусловную. Рассмотрены минимаксные и максиминные задачи.

Учебное пособие соответствует федеральному государственному образовательному стандарту и предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств». Может быть использовано также преподавателями, аспирантами, технологами и конструкторами машиностроительных производств.

УДК 51(073)  
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-94178-432-5

© Учаев П. Н., Емельянов С. Г.,  
Учаева К. П. [и др.], 2015  
© Оформление. ООО «ТНТ», 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	6
ВВЕДЕНИЕ .....	8
<b>I. ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ .....</b>	<b>9</b>
<b>1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПТИМИЗАЦИИ .....</b>	<b>9</b>
1.1. Основные сведения курсов линейной алгебры и математического анализа .....	10
1.2. Математическое моделирование .....	18
1.3. Численная реализация математической модели .....	20
<b>2. ОПТИМИЗАЦИЯ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ .....</b>	<b>22</b>
2.1. Общие сведения .....	22
2.2. Оптимизация при проектировании .....	24
2.3. Оптимизация при планировании и анализе функционирования систем .....	24
2.4. Оптимизация для анализа и обработки информации .....	25
2.5. Оптимизация при управлении динамическими системами .....	26
<b>3. СТРУКТУРА ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ .....</b>	<b>27</b>
3.1. Общие сведения .....	28
3.2. Схема решения оптимизационных задач .....	31
3.3. Критерии оптимизации и целевые функции .....	33
3.4. Математическая формулировка задач оптимизации .....	35
<b>4. УРОВНИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ .....</b>	<b>37</b>
4.1. Уровни оптимизации .....	37
4.2. Классификация задач оптимизации при проектировании ..	39
4.3. Рациональное и оптимальное решения инженерных задач .....	40
<b>II. СОВРЕМЕННЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ .....</b>	<b>46</b>
<b>5. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ОЦЕНКА .....</b>	<b>47</b>
5.1. Классификация методов оптимизации .....	47
5.2. Оценка метода оптимизации .....	49
5.3. Прочие методы оптимизации .....	50

<b>6. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА</b> .....	52
6.1. Классификация методов одномерного поиска .....	52
6.2. Методы с использованием производных .....	54
6.3. Интервальные методы .....	59
6.4. Методы полиномиальной аппроксимации .....	74
6.5. Метод наименьших квадратов .....	81
6.6. Сравнение методов .....	90
<b>7. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОГО ПОИСКА</b> .....	93
7.1. Классификация методов многомерного поиска .....	93
7.2. Преобразование двумерных задач в одномерные .....	96
<b>8. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. СИМПЛЕКС-МЕТОД</b> ...	123
8.1. Общие сведения .....	123
8.2. Линейное программирование .....	126
8.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования .....	130
8.4. Практическое применение симплексного метода .....	135
<b>9. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ</b> .....	139
9.1. Методы решения задач нелинейной оптимизации .....	139
9.2. Метод покоординатного спуска .....	144
9.3. Метод конфигураций Хука-Дживса .....	146
9.4. Метод исключения областей .....	152
9.5. Метод случайного поиска .....	153
9.6. Градиентные методы .....	156
9.7. Сравнение методов .....	168
<b>10. МЕТОДЫ ЛИНЕАРИЗАЦИИ</b> .....	171
10.1. Основные положения .....	171
10.2. Обобщённый метод приведённого градиента .....	174
10.3. Метод проекций градиента .....	176
<b>11. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ</b> .....	178
11.1. Основы и алгоритм динамического программирования .....	178
11.2. Классификация задач динамического программирования .....	181
<b>12. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ</b> .....	192
12.1. Общие сведения .....	192
12.2. Методы решения многокритериальных задач оптимизации .....	192
12.3. Структурно-параметрическая оптимизация конструкции .....	205

12.4. Выбор компромиссного решения многокритериальной задачи оптимизации .....	210
<b>13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В БЕЗУСЛОВНУЮ</b> .....	212
13.1. Методы косвенной оптимизации .....	212
13.2. Метод множителей Лагранжа .....	214
13.3. Метод барьерных функций .....	225
13.4. Методы штрафных функций .....	226
13.5. Сравнение методов .....	233
13.6. Понятие о решении задач с седловыми точками .....	233
<b>14. МИНИМАКСНЫЕ И МАКСИМИННЫЕ ЗАДАЧИ</b> .....	234
14.1. Основные положения .....	234
14.2. Примеры решения минимаксных и максиминных задач ...	235
<b>III. ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ОПТИМИЗАЦИИ</b> ...	255
<b>15. БИБЛИОТЕКА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ФИРМ</b> .....	255
15.1. Общие сведения .....	256
15.2. Пакеты программ иностранных фирм .....	257
15.3. Пакеты программ отечественных фирм .....	260
<b>16. СИСТЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ</b> .....	261
16.1. Структура и возможности системы <i>PRO/Engineer</i> .....	261
16.2. Общие сведения о системе <i>MathLab</i> .....	263
16.3. Возможности системы <i>MathLab</i> .....	264
<b>17. ОПТИМИЗАЦИЯ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ</b> .....	266
17.1. Методология оптимального синтеза .....	267
17.2. Выбор оптимального технологического процесса .....	268
17.3. Экономические критерии оптимальности конструкции ...	269
17.4. Выбор оптимального варианта конструкции .....	272
17.5. Оптимизация надёжности технической системы .....	275
17.6. Оптимизация конструкции технической системы .....	277
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	281
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</b> .....	283
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</b> .....	285

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал пособия является введением в теорию оптимизации: в нём изложены приложения этой теории к решению прикладных задач, возникающих при создании конкурентоспособной продукции.

Цель данного издания — ознакомление с основами и алгоритмами методов решения оптимизационных задач, примерами и задачами оптимизации инженерных решений.

Пособие предназначено для магистрантов при изучении дисциплин «История и методология науки и производства», «Современные проблемы науки в машиностроении» и «Методология научных исследований в машиностроении», а также при выполнении научной работы. Оно может быть полезным для студентов и аспирантов, а также может оказать методическую помощь преподавателям при чтении лекционного курса, проведении практических занятий и руководстве курсовым и дипломным проектированием.

Отличие настоящего пособия от существующих заключается в следующем:

— в нём рассмотрены примеры и приведены задачи из изучаемых ранее дисциплин: «Начертательная геометрия»; «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин и основы конструирования»;

— материал расположен в порядке нарастающей сложности. Изучая примеры решения задач известных дисциплин, пользователь постепенно приобретает знания, которые необходимы для понимания последующего материала.

Пособие состоит из трёх частей.

Часть I. *Введение в теорию оптимизации.* Приводятся понятия и основные сведения из курса математического анализа, часто используемые в пособии. Этот материал касается множеств, матриц, векторов, функций и т. п. Показана область применения методов оптимизации. Рассмотрены их типовые приложения в этих областях. Представлена структура оптимизационных задач. Изложены уровни

оптимизации и дана классификация оптимизационных задач при проектировании.

Часть II. *Современные оптимизационные алгоритмы.* Дается классификация методов оптимизации и их сравнительная оценка. Рассматривается структура алгоритмов одно- и многомерного поиска и приводятся примеры решения задач оптимизации с помощью этих алгоритмов. Приводятся методы решения многокритериальных задач оптимизации, показаны процедуры структурно-параметрической оптимизации конструкции и приведён пример решения многокритериальной задачи. Показано преобразование задачи условной оптимизации в безусловную. Рассмотрены основы, указан алгоритм, и приведены примеры решения минимаксных и максиминных задач.

Часть III. *Пакеты прикладных программ оптимизации.* Приводятся основные сведения о пакетах прикладных программ зарубежных и отечественных разработчиков. Рассматриваются системы *MathCAD* и *MathLab*, используемые в пособии для решения оптимизационных задач.

Замечания и предложения по улучшению пособия будут приняты с признательностью, просьба направлять их в адрес издательства.

## ВВЕДЕНИЕ

Методы оптимизации позволяют выбрать наилучший конкурентоспособный вариант инженерной конструкции из всех возможных альтернатив. В конце XIX в. учёный П. Л. Чебышев впервые поставил задачу оптимизации — оптимального раскрой материала. В 30-х гг. XX столетия советский математик Л. В. Канторович создал труд, касающийся оптимизации, за который в 1970 г. получил Нобелевскую премию.

В последнее время этим методам уделялось большое внимание, и в результате был разработан ряд высокоэффективных алгоритмов, позволяющих найти оптимальный вариант конструкции при помощи ЭЭВМ.

Настоящее пособие предназначено для ознакомления читателей, прежде всего магистрантов, с основными положениями теории оптимизации и оказания им помощи в применении этой теории при решении прикладных задач создания конкурентоспособных технических систем, соответствующих современному уровню развития науки и техники. С этой целью оно содержит научные принципы оптимизации создаваемых объектов; основы и алгоритмы современных методов одно- и многомерного поиска экстремума целевой функции задач безусловной и условной оптимизации. Причём изложены методы одно- и многокритериальной (векторной) оптимизации, а также процедуры преобразования задач условной оптимизации в безусловную.

Кроме того, рассмотрены минимаксные и максиминные задачи, довольно часто встречающиеся в инженерной практике.

Теоретические положения иллюстрируются многочисленными примерами. Каждый рассмотренный метод оптимизации сопровождается задачами для самостоятельного решения.

Многие примеры и задачи взяты из известных работ [3, 5, 6, 8 и др.], а некоторые — являются оригинальными.

## I. ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

В данной части рассматриваются исходные положения теории оптимизации. Методологически *теория оптимизации* представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, ориентированных на нахождение и идентификацию наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать полного перебора и оценивания возможных вариантов. Процесс оптимизации лежит в основе всей инженерной деятельности, поскольку классические функции инженера заключаются в том, чтобы, с одной стороны, проектировать новые, более эффективные и менее дорогостоящие технические системы и, с другой стороны, разрабатывать методы повышения качества функционирования существующих систем [4].

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В данной главе кратко изложены сведения, изучаемые в тех или иных учебных курсах и используемые в дальнейшем для освоения методов оптимизации. Эффективность оптимизационных методов, позволяющих осуществить выбор наилучшего варианта без непосредственной проверки всех возможных вариантов, тесно связана с широким использованием достижений в области математики путём реализации итеративных вычислительных схем, опирающихся на строго обоснованные логические процедуры и алгоритмы, на базе применения вычислительной техники. Поэтому для изложения методологических основ оптимизации требуется привлечение важнейших результатов теории матриц, элементов линейной алгебры и дифференциального исчисления, а также положений математического анализа. Математические понятия и конструкции используются в настоящем пособии не только для того, чтобы повысить уровень строгости представления материала, но и потому, что они составляют терминологическую базу изложения,

которая позволяет упростить описание и определение структурных элементов рассматриваемых вычислительных процедур и облегчить их понимание.

### 1.1. Основные сведения курсов линейной алгебры и математического анализа

В данном подразделе в виде напоминания приводятся понятия и в краткой форме основные сведения из курсов линейной алгебры и математического анализа, часто используемые в дальнейшем. Этот материал касается множеств, матриц, векторов, функций и т. п.

**Множества.** Под множеством понимают совокупность однородных объектов (элементов). Графически множества могут быть представлены прямыми, отрезками, плоскостями и гиперплоскостями.

Классификация множеств приведена на рисунке 1.1.

Математические операции, выполняемые с множествами (рис. 1.2): объединение  $x \cup y$ , пересечение  $x \cap y$ , разность  $x \setminus y$ , произведение  $x \times y$  и т. п.

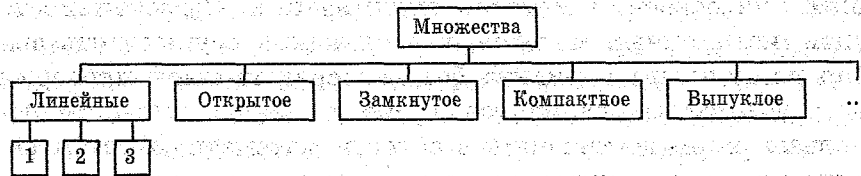


Рис. 1.1. Классификация множеств:

1 — прямая (отрезок); 2 — плоскость; 3 — гиперплоскость

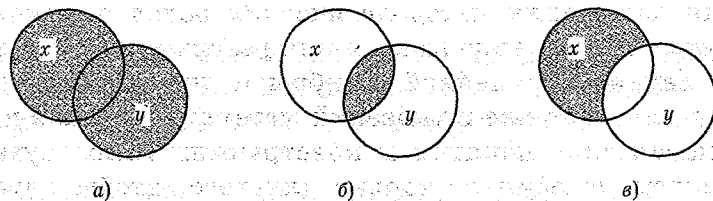


Рис. 1.2. Операции с множествами:

a — объединение; б — пересечение; в — разность

Символы и знаки, обозначающие отношения между множествами, приведены в таблице 1.1, а в таблице 1.2 представлены рекомендуемые обозначения логических операций.

Таблица 1.1

Обозначения теоретико-множественные

Содержание	Обозначение	Пример символической записи
Принадлежность точки геометрической фигуре	$\in$	$A \in a$ — точка $A$ принадлежит прямой $a$
		$A \in \alpha$ — точка $A$ принадлежит плоскости $\alpha$
Включает, содержит	$\subset$	$a \subset \alpha$ — прямая $a$ принадлежит плоскости $\alpha$
Объединение	$\cup$	$ABCD = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$ — ломаная линия $ABCD$ является объединением отрезков $[AB]$ , $[BC]$ , $[CD]$
Пересечение	$\cap$	$a = \alpha \cap \beta$ — прямая $a$ есть пересечение плоскостей $\alpha$ и $\beta$

Таблица 1.2

Обозначения логических операций

Содержание	Обозначение	Пример символической записи
Импликация — логическое следствие	$\Rightarrow$	$(a \parallel c \wedge b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$ — если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой
Конъюнкция предложений, соответствует союзу «и»	$\wedge$	$M \cap N = \{x: x \in M \wedge x \in N\}$ — пересечение множеств $M$ и $N$ есть множество $\alpha$ , состоящее из всех тех и только тех элементов $x$ , которые принадлежат как множеству $M$ , так и множеству $N$
Дизъюнкция предложений, соответствует союзу «или»	$\vee$	$M \cup N = \{x: x \in M \vee x \in N\}$ — объединение множеств $M$ и $N$ есть множество $\alpha$ , состоящее из всех тех и только тех элементов $x$ , которые принадлежат хотя бы одному множеству $M$ или $N$ (или $M$ , или $N$ , или обоим)
Эквивалентность	$\Leftrightarrow$	$A \in \alpha \Leftrightarrow A \in l, l \in \alpha$ — точка принадлежит плоскости, если (в том и только в том случае) она принадлежит некоторой прямой, принадлежащей этой плоскости

**Векторы.** Вектором называется упорядоченное множество действительных чисел, например,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Есть вектор, состоящий из  $n$  элементов (компонент).

Основные сведения о векторах и действиях над ними приведены в работе [4].

**Матрицы.** Под матрицей понимают табличную форму записи чисел или элементов множеств. Матрица  $A$  размерностью  $(k \times n)$ , т. е. у которой  $k$  строк и  $n$  столбцов, может быть записана одним из следующих способов.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{array} \right\| \quad (1.1)$$

Кроме того, матрица может быть записана в компактном виде:

$$A = [a_{ij}] = (a_{ij}) = \|a_{ij}\|, \quad i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Классификация матриц дана на рисунке 1.3.

Основные сведения о матрицах и действиях над ними приведены в работе [4].



Рис. 1.3. Классификация матриц:

- 1 — матрица-столбец; 2 — матрица-строка; 3 — транспонированная матрица; 4 — единичная матрица; 5 — квадратная матрица  $(k = n)$ ; прямоугольная матрица  $(k \neq n)$ ; 6 — обратная матрица.

При решении задач оптимизации, в частности при исследовании стационарных точек функции (см. ниже), используется *матрица Гессе (гессциан)* — функции  $F(x)$ , которая обозначается как  $G(x)$  или  $H(x)$  и является симметричной матрицей  $n \times n$  элементов вида

$$G_{ij} = \partial^2 F / (\partial x_i, \partial x_j)$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_N \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_N^2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

**Функции одной переменной.** График функции, содержащей в рассматриваемом интервале только одно экстремальное значение, представлен на рисунке 1.4. Такую функцию называют *унимодальной*.

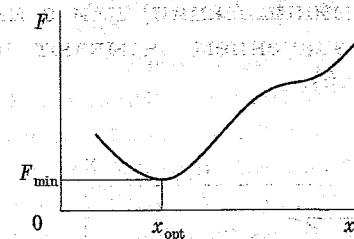


Рис. 1.4. График функции одной переменной

Для обозначения минимума и максимума употребляется общий термин — *экстремум*. Задача поиска экстремума

функции сводится к определению значения  $x^*$ , которое является решением уравнения

$$F'(x) = 0.$$

Это необходимое условие существования экстремума функции. Затем находим значение функции, соответствующее этой точке (аргументу)

$$F(x^*) \rightarrow \text{extr}_{x \in X} F(x).$$

Функция, экстремальные значения которой находятся при оптимизации, называется *целевой*.

Кроме того, укажем достаточное условие для оценки, является ли значение функции в этой точке минимальным или максимальным. Для этого находим вторую производную: если  $F''(x^*) < 0$ , то функция в рассматриваемой точке достигает максимума, в противном случае значение функции минимально.

Следовательно, заданная функция в пределах исследуемого интервала  $[a, b]$  должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой.

У функции  $F(x)$  в исследуемом интервале может быть несколько значений, соответствующих точкам  $x_j^*$  ( $j = 1, e$ ) локальных экстремумов. Естественно, что такая функция является многоэкстремальной. Её принято называть *мультимодальной*. Один из локальных экстремумов функции с наименьшим (при минимизации) или с наибольшим (при максимизации) её значением называют абсолютным или глобальным (рис. 1.5).

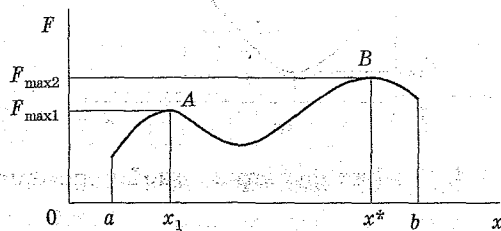


Рис. 1.5. Функция одной переменной с несколькими экстремумами

В соответствии с вышеизложенным заключаем, что *решением задачи минимизации* являются: во-первых, значения компонентов вектора  $x^*$ ; во-вторых, значение функции  $F(x^*)$ . Это решение обладает следующими свойствами:

$$F(x^*) \rightarrow \min_{x \in X} F(x). \quad (1.4)$$

Задача поиска *глобального минимума*

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in X},$$

решение которой обладает свойством

$$F(x) = \min_i \{F(x_i^*)\} = \min_{x \in X} F(x). \quad (1.5)$$

При этом точки  $x_i^*$  являются точками локальных минимумов, а точка  $x^*$  из (1.4), совпадающая с одной из точек  $x_i^*$  — точкой глобального (абсолютного) минимума.

Интервал  $[a, b]$  значений  $x$ , в котором заключён экстремум (минимум или максимум) функции, называется *интервалом неопределённости*.

Процедура поиска экстремума функции представляет собой, как правило, процесс многократного применения одного и того же алгоритма, т. е. является *итерационным (пошаговым) методом*.

*Критерий останова* итерационного процесса

$$|F(x_{i+1}) - F(x_i)| \leq \varepsilon_F, \quad (1.6)$$

где  $F(x_i)$  и  $F(x_{i+1})$  — значения функции, соответствующие  $i$ -му и  $i+1$ -му приближениям к точке  $x^*$  экстремума  $F(x)$ ;

$\varepsilon_F$  — заданное малое значение функции.

*Экстремум условный*: при параметрической оптимизации рассматривается задача поиска экстремума функции  $F(x)$  в области допустимых решений  $D$ , определяемой системой уравнений и (или) неравенств. При этом решается задача на условный экстремум.

Задача поиска условного экстремума функции  $F(x)$  на множестве  $D$  имеет следующий вид:



$$F(x) \rightarrow \text{extr}_{x \in D},$$

$$D = \{x: h_i(x) = 0, a_i(x) \leq 0, a_i \leq x_i \leq b_i; a_i > 0, \quad (1.7)$$

$$l = \overline{1, s}, \quad k = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Решение такой задачи обладает свойством

$$F(x^*) \rightarrow \text{extr}_{x \in D} F(x),$$

а точка  $x^*$  является точкой условного экстремума, причём различают условные локальные и глобальные экстремумы.

**Теорема Вейерштрассе.** В случае непрерывной целевой функции и замкнутого ограниченного (компактного) допустимого множества задача оптимизации должна иметь решение. Это отражается следующим утверждением, которое называют теоремой Вейерштрассе: *всякая функция  $F(x)$ , непрерывная на отрезке  $[ab]$ , принимает на этом отрезке своё наименьшее и наибольшее значения, т. е. на этом отрезке существуют такие точки  $x_1$  и  $x_2$ , что для любого значения  $x \in [ab]$  выполняется неравенство*

$$F_1(x) \leq F(x) \leq F_2(x).$$

Следовательно, эта теорема свидетельствует о существовании экстремума функции.

**Функции многих переменных. Стационарная точка** — минимум, максимум или седло функции в многомерном пространстве. Понятие максимума функции нескольких переменных и задача максимизации функции — аналогичны вышерассмотренным.

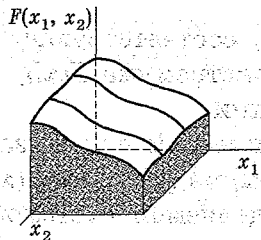


Рис. 1.6. График функции двух переменных

На рисунке 1.6 представлена гиперповерхность функции двух переменных, а на рисунке 1.7 — седловая точка.

Как видно, седловая точка  $A$  функции  $F(x_1, x_2)$  является результатом её минимизации по  $x_2$  и максимизации по  $x_1$ .

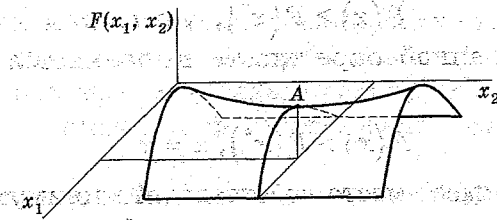


Рис. 1.7. График функции двух переменных с седловой точкой

При этом необходимым условием существования максимума, минимума или седловой точки функции многих переменных является равенство нулю всех её первых производных по независимым переменным. Иными словами, стационарная точка целевой функции (гл. 3)  $M = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Необходимым и достаточным условием локального минимума является положительно определённая матрица Гессе (1.3). Это означает, что все собственные значения матрицы должны быть положительными. Локальному максимуму соответствует отрицательно определённая эта матрица, для которой все собственные значения отрицательны.

**Градиент (производная) функции  $F(x)$**  — вектор с компонентами  $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ , имеющий вид

$$\nabla F(x) = \frac{\partial F}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} e_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} e_n, \quad (1.8)$$

где  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$  — частные производные функции в рассматриваемой точке;

$e_i$  — система независимых единичных векторов, направленных вдоль осей координат  $x_i, i = \overline{1, n}$ .

**Минимум локальный:** функция  $F(x)$  в точке  $x^*$  имеет минимум, если существует такая окрестность

$$U = \{x: \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

во всех точках которой выполняется неравенство

$$F(x) \geq F(x^*), \quad x \in U.$$

Если в заданной окрестности выполняется строгое неравенство

$$F(x) > F(x^*), \quad x \neq x^*,$$

то в точке  $x^*$  имеет место собственный минимум; в противном случае минимум называется несобственным.

Приведённое определение локального минимума функции относится к понятию локального безусловного минимума функции.

*Задача минимизации функции*

$$\alpha(x) \rightarrow \min_{x \in X},$$

т. е. функцию  $F(x)$  следует (знак « $\rightarrow$ ») минимизировать (знак « $\min$ »), варьируя вектор  $x$  в пределах  $X$  ( $x \in X$ ).

*Функция аддитивная* (аддитивный вид) — функция с разделяющимися переменными

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i). \quad (1.9)$$

*Функция мультипликативная* — функция с не разделяющимися переменными

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_n(x_n). \quad (1.10)$$

Путём преобразования этой функции можно придать аддитивный вид

$$\ln F(x) = \ln F_1(x_1) + \ln F_2(x_2) + \dots + \ln F_n(x_n). \quad (1.11)$$

## 1.2. Математическое моделирование

Рассмотрим основные этапы подготовки и решения инженерных задач создания конкурентоспособной продукции, что предполагает выбор наилучшего (оптимального) варианта из нескольких альтернатив.

Сначала необходимо сформулировать цель исследования. Затем составляются различные модели для решения задач.

Метод исследования технической системы или процесса на моделях называют *моделированием*. При этом создаётся *математическая модель*, представляющая собой совокупность математических выражений, которые описывают:

— наиболее существенные для решаемой задачи связи между исходными данными (входными параметрами);

— ограничения, наложенные на входные и выходные параметры.

Для разработки математической модели необходимо располагать условием задачи в виде *расчётной схемы (модели)* и текстовой части, в которой должна быть указана цель исследования. Под расчётной моделью понимают идеализированный объект исследования путём исключения несущественных (по мнению разработчика) особенностей. В процессе поиска экстремума целевой функции (оптимизации) ниже будут создаваться расчётная и математическая модели.

Для некоторых задач разрабатывается модель, в которой, по крайней мере, одним из критериев качества создаваемого объекта является экономический показатель. Такую модель называют *экономико-математической*. В качестве экономического показателя могут быть ресурсы: материальные, финансовые и т. п.

Математическая модель в процессе исследования подвергается математическому анализу. При этом проверяется корректность постановки задач. Задача считается поставленной корректно, если бесконечно малому входному параметру соответствует бесконечно малое приращение выходного. В случае, когда наблюдаются скачки, задача поставлена некорректно.

Если задача корректна, то проверяют, не существует ли аналитическое решение. При наличии такого решения его берут за основу исследования. В противном случае выполняют численный анализ математической модели, что является предметом математического программирования.

### 1.3. Численная реализация математической модели

Поскольку размерность инженерных задач, как правило, достаточно велика, а расчёты в соответствии с алгоритмами оптимизации требуют значительных затрат времени, оптимизационные методы ориентированы главным образом на решение с помощью ЭВМ.

Численная реализация математической модели является решением задачи *математического программирования*. Она сводится к поиску экстремума, так называемой функции цели при наличии ограничений на параметры, от которых она зависит. Классификация задач математического программирования и примеры решения прикладных задач оптимизации при синтезе объектов, в соответствии с назначением учебного пособия, приводится ниже.

Алгоритм численной реализации математической модели:

- определяется метод решения инженерной задачи;
- на его основании выбирается или, при необходимости, составляется алгоритм решения;
- используется существующая программа или в соответствии с алгоритмом разрабатывается новая программа для реализации на ЭВМ (при большом объёме расчётов);
- осуществляются пробные решения задачи, после анализа которых могут быть внесены коррективы в любой из предыдущих этапов, начиная с формулирования цели исследования и составления математической модели.

Как видно, приведённый материал является по своей сути численным программированием.

Однако, в дальнейшем не рассматриваются вопросы, связанные с составлением программ для ЭВМ и программированием. Главное внимание в книге уделяется математическим и логическим построениям, лежащим в основе исследуемых методов, факторам, обуславливающим выбор тех или иных аналитических схем, а также рассмотрению важнейших прикладных аспектов теории.

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя со сведениями, изучаемыми в тех или иных учебных курсах и используемыми в дальнейшем для освоения методов оптимизации.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое множество?
2. Дайте классификацию множеств.
3. Приведите примеры символической записи операций над множествами.
4. Что такое матрица?
5. Дайте классификацию матриц.
6. Какие действия производятся над матрицами?
7. Что такое моделирование?
8. Какие модели создаются при оптимизации?
9. Какова структура математической модели?
10. Каков алгоритм численного анализа математической модели?

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ

В данной главе показаны области применения методов оптимизации, рассмотрены их типовые приложения в этих областях.

### Основные понятия и определения

*Оптимизация* — поиск наилучшего инженерного решения из всех возможных альтернатив.

*Параметры проектные* — независимые переменные величины, которые полностью и однозначно определяют решаемую задачу.

*Теория оптимизации* — совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, ориентированных на нахождение и идентификацию наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать полного перебора и оценивания возможных вариантов.

*Целевая функция* — выражение, связывающее критерий оптимальности с варьируемыми параметрами и позволяющее найти его минимальное или максимальное значение.

### 2.1. Общие сведения

Поскольку размерность инженерных задач, как правило, достаточно велика, а расчёты в соответствии с алгоритмами оптимизации требуют значительных затрат времени, оптимизационные методы ориентированы главным образом на реализацию с помощью ЭВМ. Однако, несмотря на то, что изложение методологических принципов ведётся в книге с учётом указанной ориентации, авторы не сочли целесообразным подробно останавливаться на вопросах, связанных с составлением программ для ЭВМ и программированием. Главное внимание в книге уделяется математическим и логическим построениям, лежащим в основе исследуемых методов, факторам, обуславливающим выбор тех или иных

аналитических схем, а также рассмотрению важнейших прикладных аспектов теории.

Теория оптимизации находит эффективное применение во всех направлениях инженерной деятельности, и в первую очередь в следующих четырёх её областях:

— во-первых, проектирование систем и их составных частей;

— во-вторых, планирование и анализ функционирования существующих систем;

— в-третьих, инженерный анализ и обработка информации;

— в-четвёртых, управление динамическими системами.

При рассмотрении приложений методов оптимизации при проектировании и анализе функционирования систем следует иметь в виду, что оптимизация всего лишь один этап в процессе формирования оптимального проекта или условий эффективного функционирования системы. Указанный процесс является циклическим и включает синтез (определение) структуры системы, построение модели, оптимизацию параметров модели и анализ полученного решения. При этом оптимальный проект или новый план функционирования системы строится на основе решения серии оптимизационных задач, способствующего дальнейшему совершенствованию структуры системы. Для краткости изложения рассматриваемые в данном разделе примеры иллюстрируют лишь один цикл процесса проектирования и связаны главным образом с подготовкой к этапу оптимизации. Такую ориентацию примеров не следует интерпретировать как подчёркивание ведущей роли оптимизационных методов в инженерном проектировании и в процессе анализа систем. Несмотря на то, что методы теории оптимизации отличаются универсальностью, их успешное применение в значительной степени зависит от профессиональной подготовки инженера, который должен иметь чёткое представление о специфических особенностях изучаемой системы. Основная цель рассмотрения приводимых ниже примеров заключается в

том, чтобы продемонстрировать разнообразие постановок оптимизационных задач, возникающих в процессе проектирования и анализа, на фоне общности их формы.

## 2.2. Оптимизация при проектировании

Сфера применения оптимизационных методов в инженерном проектировании достаточно широка: от проектирования отдельных структурных элементов технических систем до проектирования узлов оборудования и составления предварительных проектов промышленных предприятий в целом, для того чтобы использовать методы оптимизации, необходимо разработать «принципиальную схему» функционирования системы или выявить её структуру; тогда задача оптимизации сводится к выбору таких значений переменных, характеризующих размеры отдельных устройств и режимы их работы, которым соответствует наилучшее значение характеристического показателя качества функционирования системы.

## 2.3. Оптимизация при планировании и анализе функционирования систем

Вторая важная область применения оптимизационных методов в инженерной практике связана с совершенствованием существующих систем и разработкой производственных планов для многопродуктовых технико-экономических процессов. Задачи анализа функционирования систем обычно возникают в тех случаях, когда требуется адаптировать существующую производственную систему к новым условиям функционирования, отличным от тех условий, которые были предусмотрены проектом этой системы. Причины, порождающие требования такого рода, как правило, связаны с необходимостью:

- 1) увеличения общего объёма выпуска продукции;
- 2) использования других видов сырья и расширения ассортимента изделий;

3) совершенствования технологических операций, отличающихся низким уровнем проектных решений.

В связи с решением указанных задач требуется выбрать новый температурный режим, давление или характеристики потока; установить дополнительное оборудование; разработать новые технологические операции. Методы оптимизации в производственном планировании ориентированы главным образом на составление программ производства нескольких видов продукции на отдельном предприятии, а также на координирование производственных планов предприятий, которые связаны хозяйственными отношениями. Поскольку в таких приложениях предполагается, что основное оборудование установлено и функционирует, предметом исследования являются только функции переменных затрат. Возникающие при этом задачи чаще всего можно сформулировать с помощью линейных и квазилинейных моделей. В качестве иллюстрации этого класса приложений оптимизационных методов рассмотрим задачу планирования производства нефтепродуктов.

## 2.4. Оптимизация для анализа и обработки информации

Ещё одна широкая область применения оптимизационных методов в инженерной практике связана с задачами инженерного анализа, в частности с задачами нелинейного регрессионного анализа. Среди наиболее общих проблем, возникающих в процессе разработки инженерных моделей, можно выделить проблему определения параметров некоторой полуэмпирической модели на основе заданного множества экспериментальных данных. Такого рода задачи обработки информации, или задачи регрессионного анализа, путём несложных преобразований приводятся к виду оптимизационных задач, поскольку выбор значений параметров модели осуществляется в соответствии с критерием качества и описания имеющихся данных с помощью этой модели [11].

## 2.5. Оптимизация при управлении

### динамическими системами

В инженерной практике, связанной с управлением динамическими системами, также допускается применение методов оптимизации. При этом анализ соответствующих примеров требует от пользователя специальной подготовки. Подобные задачи могут быть предметом динамического программирования. При этом осуществляется управление финансовыми и материальными ресурсами (гл. 6).

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя с основными направлениями применения методов оптимизации, а также с типовыми приложениями в этих областях.

### Вопросы для самоконтроля

1. Укажите области применения теории оптимизации в инженерной деятельности.
2. Назовите основные задачи оптимизации при проектировании.
3. В каких случаях применяют оптимизационные методы при планировании и анализе функционирования систем?
4. Какие задачи оптимизации решаются для анализа и обработки информации?
5. Приведите пример оптимизации при управлении динамическими системами.

## 3. СТРУКТУРА ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В данной главе рассмотрены:

- схема оптимизационных задач;
- критерии оптимизации.

### Основные понятия и определения

**Алгоритм оптимизации** — последовательность процедур решения задачи оптимизации.

**Критерий оптимальности** — принятый показатель меры эффективности (качества) исследуемой системы или показатель, который позволяет количественно оценить эффективность проектного решения.

**Область допустимых значений целевой функции** — область, содержащая удовлетворяющие ограничениям решения.

**Оптимизация безусловная** — процесс решения оптимизационной задачи, в постановке которой нет ограничений.

**Оптимизация векторная или многокритериальная** — оптимальное проектирование с учётом нескольких критериев эффективности.

**Оптимизация скалярная** — однокритериальная оптимизация.

**Оптимизация условная** — процесс решения оптимизационной задачи, в постановке которой предусмотрены ограничения в виде равенств и (или) неравенств.

**Параметры проектные** — независимые переменные величины, которые полностью и однозначно определяют решаемую задачу.

**Пространство проектирования** — область допускаемых значений целевой функции, определяемая всеми  $n$  проектными параметрами.

**Решение допустимое** — решение, удовлетворяющее ограничениям.

**Целевая функция** — выражение, связывающее критерий оптимальности с варьируемыми параметрами и по-

звляющее найти его минимальное или максимальное значение.

**Экстремум функций глобальный (абсолютный)** — экстремум функции с наименьшим (при минимизации) или с наибольшим (при максимизации) значением.

**Экстремум функций локальный** — экстремум функции в какой-либо точке.

**Оптимум функции:** оптимум функции  $f(x)$  — синоним понятий минимума, максимума, экстремума функции  $f(x)$ . Задача поиска оптимума функции  $f(x)$  на области допустимых решений  $D$  имеет вид

$$f(x^*) \rightarrow \operatorname{opt}_{x \in D}$$

решение которой обладает свойством

$$f(x^*) \rightarrow \operatorname{opt} f(x).$$

**Оптимальное решение** — точка оптимума  $x^*$  и оптимальное значение функции  $f(x)$ .

**Параметры проектные** — независимые переменные, которые полностью и однозначно определяют решаемую задачу проектирования. Они служат для количественного описания системы и их значения вычисляются в процессе оптимизации.

**Поиск многомерный** — нахождение экстремума целевой функции многих переменных, т. е. в многомерном пространстве.

**Решение базисное** или базисная точка — точка, в которой отдельные переменные равны нулю.

**Симплекс** — регулярный многогранник в  $n$ -мерном евклидовом пространстве с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

### 3.1. Общие сведения

**Проектные параметры и целевая функция.** Под *проектными параметрами* понимают независимые переменные величины, которые полностью и однозначно определяют ре-

шаемую задачу. Это неизвестные величины (например, геометрические параметры, масса, температура), значения которых вычисляются в процессе оптимизации. Они служат для количественного описания создаваемой инженерной конструкции. Число проектных параметров характеризует степень сложности решаемой задачи проектирования.

**Целевая функция (ЦФ)** представляет собой выражение, связывающее критерий оптимальности с варьируемыми параметрами и позволяющее найти его экстремальное (минимальное или максимальное) значение. В зависимости от количества параметров целевая функция может быть одно- или многомерной. При одномерном поиске находится экстремум функции одного переменного, а при многомерном — многих переменных, т. е. в многомерном пространстве.

**Поиск максимума и минимума. Пространство проектирования.** Если необходимо найти максимум  $F(\mu)$ , достаточно заменить знак ЦФ, т. е. решить задачу минимизации  $[-F(\mu)]$  (рис. 3.1). Поскольку задачу максимизации легко превратить в задачу поиска минимума целевой функции, для нахождения максимума и минимума можно использовать один и тот же алгоритм.

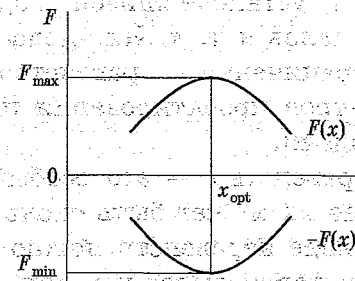


Рис. 3.1. Превращение задачи на максимум в задачу на минимум

Под *пространством проектирования* понимают область допустимых значений целевой функции, определяемую всеми  $n$  проектными параметрами.

Пространство, как правило, ограничено рядом условий — ограничений, связанных с физической сущностью решаемой задачи. Довольно часто с учётом ограничений оптимальное значение целевой функции достигается не там, где её поверхность имеет нулевой градиент: лучшее решение может соответствовать одной из границ области проектирования.

**Ограничение равенства и неравенства.** Задача оптимального проектирования заключается в определении значений параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при которых целевая функция, являющаяся линейной или нелинейной, имеет экстремальное значение

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{extr}$$

при условии, что выполняются ограничения, заданные в форме:

- равенств  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m};$
- неравенств  $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i = \overline{1, m}.$

Ограничения делятся на две группы: равенства и неравенства.

**Ограничение-равенство** — зависимость между проектными параметрами, которые должны учитываться при отыскании решения. Они отражают физические, экономические и др. законы, установившиеся тенденции, наличие необходимых материалов и т. д. Их число может быть любым. Используя ограничение — равенство, можно уменьшить число параметров проектирования и тем самым упростить решение задачи.

**Ограничение-неравенство** — это особый вид ограничений. В общем случае их может быть сколь угодно много.

Ограничения в виде неравенств можно преобразовать в равенство введением так называемых дополнительных (избыточных) переменных. Этот вопрос рассмотрен в главе 13 при использовании метода множителей Лагранжа с ограничениями-неравенствами.

**Локальный и глобальный оптимумы функции.** На рисунке 1.5 показана одномерная целевая функция, имеющая

два локальных оптимума. Под глобальным оптимумом понимают оптимальное решение для всего пространства проектирования. Оно лучшее из всех других решений, соответствующих локальным оптимумам, и именно его находит инженер.

### 3.2. Схема решения оптимизационных задач

На рисунке 3.2 приведены основные этапы решения оптимизационных задач.

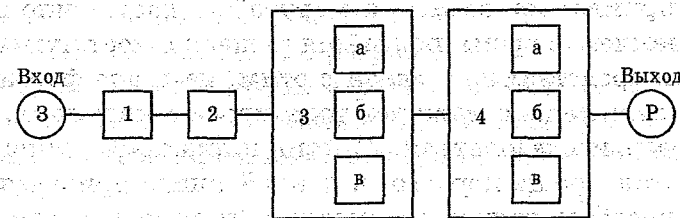


Рис. 3.2. Схема решения оптимизационных задач

- 3 — текст поставленной задачи;
- 1 — исходные данные;
- 2 — расчётная модель, включая проектные параметры;
- 3 — математическая модель:
  - а) критерий оптимальности;
  - б) целевая функция (целевые функции);
  - в) ограничения в виде равенств или неравенств;
- 4 — математический аппарат оптимизации:
  - а) метод оптимизации;
  - б) схема алгоритма;
  - в) реализация алгоритма (программа и её реализация);
- Р — результат (оптимальное инженерное решение)

Как видно из рисунка 3.2, процесс решения любой прикладной оптимизационной задачи состоит из двух этапов: сначала задачу формализуют, а затем с помощью соответствующего аналитического или численного метода решают. На этапе формализации строят математическую модель, т. е. конкретные технические, физические и экономические условия и требования воплощают в виде задачи оптимизации с конкретной целевой функцией и определённым допус-



тимым множеством. Математическая модель должна быть адекватна исходной прикладной задаче, т. е. наиболее полно и точно соответствовать ей.

Для этого необходимо учитывать все факторы, участвующие в задаче, что может привести к слишком сложной задаче оптимизации, на решение которой потребуется неоправданно много сил и средств. Поэтому этап формализации оказывается тесно связанным с последующим этапом. Нужно построить такую математическую модель, которая, с одной стороны, по возможности точно соответствует исходной прикладной задаче, а с другой — достаточно проста и за приемлемое время поддается решению доступными методами и средствами. В связи с этим, на этапе формализации исключительно важную роль играют интуиция, опыт и кругозор исследователя. В принципиальном отношении второй этап проще первого; в данной книге приведены методы, способствующие реализации именно второго этапа решения.

Процесс оптимизации любой конструкторской задачи, сводящейся к отысканию экстремума целевой функции в заданном пространстве проектирования при наложенных ограничениях, включает в себя следующие этапы:

- 1) выбор исходных данных;
- 2) выявление критерия (критериев) оптимальности, выражающего цель и направление оптимизирующего поиска;
- 3) составление целевой функции;
- 4) разработка всех дополнительных функциональных уравнений и уравнений для определения параметров;
- 5) составление уравнений и неравенств, выражающих ограничения для всех групп параметров и определяющих область возможных решений;
- 6) исключение в уравнении целевой функции второстепенных неспецифических варьируемых величин и параметров;
- 7) определение области изменения оптимизируемой конструкции в зависимости от величин, входящих в целевую функцию;

8) оценка влияния ограничений, окончательная корректировка уравнения целевой функции;

9) выбор необходимого метода решения. Вначале проверяют, не существует ли аналитическое решение. Если существует, то используют, прежде всего, этот метод решения задачи. В противном случае переходят к следующему этапу;

10) численный анализ математической модели:

- а) выбирают метод оптимизации;
- б) в соответствии с ним составляют алгоритм и программу для машинного эксперимента;
- в) выполняют отладку программы;
- г) осуществляют пробное решение задачи, заключающееся в определении оптимальных параметров с учётом уравнения целевой функции, функциональных уравнений и ограничений;
- д) анализируют полученные результаты. При необходимости вносят соответствующие коррективы в любой из предыдущих этапов.

### 3.3. Критерий оптимизации и целевые функции

Задачи оптимизации, как правило, многокритериальные, причём для оценки качества конструкции могут быть использованы следующие группы критериев:

— стоимость разработки, изготовления и эксплуатации изделия (приведённые затраты), причём стоимость изготовления обусловлена степенью технологичности конструкции и требованиями точности;

— эффективность использования — нагрузка, частота вращения и т. п.;

— качество функционирования — динамичность нагрузки, виброакустические характеристики, кинематическая точность, степень балансировки и т. п.;

— показатели эксплуатационной надёжности — вероятность безотказной работы и др.;

— энергетические показатели — потери энергии или КПД;

— возможность управления и контроля параметрами изделия.

Указанные критериальные оценки в совокупности определяют технико-экономическую модель проектируемой конструкции, например привода машины.

Для оценки конструкции отдельной детали можно использовать также критерий равнопрочности, который выражается непосредственно через параметры, определяющие напряжённо-деформированное состояние этой детали, или конструктивный критерий — критерий минимума потенциальной энергии формоизменения.

Приведённые критерии качества конструкции используются для составления целевых функций (ЦФ), которые могут быть заданы: в форме явной аналитической зависимости  $F = F(\mu)$ ; в виде некоторого алгоритма; в форме уравнения, решением которого является функция  $F(\mu)$ , и т. д.

Целевые функции должны содержать только те элементы выбранного критерия, которые могут быть представлены в функции параметрами. Постоянные величины, если они входят в ЦФ, изменяют только абсолютное значение критерия и при образовании экстремума исчезают.

В большинстве случаев ЦФ задают несколькими функциями  $F_1(\mu), \dots, F_m(\mu)$ , которые должны быть минимизированы или максимизированы.

Целевые функции, подлежащие минимизации:

— потеря энергии, повышение температуры, масса конструкции, габариты, силы инерции, масса отдельных звеньев, максимальная величина концентрации напряжений;

— величина упругой деформации, пропорциональная максимальной силе, нагружающей деталь; скорость удара, частота собственных колебаний, виброакустические характеристики, расход масла и т. п.

Целевые функции, подлежащие максимизации: запас прочности (статической и сопротивления усталости), ско-

рость движения (предельная частота), КПД, нагрузочная способность, вероятность безотказной работы, частота собственных колебаний и т. п.

Следовательно, некоторые из указанных функций в отдельных случаях требуется минимизировать, а в других максимизировать. Как уже отмечалось, если необходимо найти максимум  $F(\mu)$ , достаточно заменить знак ЦФ, т. е. решить задачу минимизации  $[-F(\mu)]$ .

Приведённые критерии качества конструкции используются для составления целевых функций, которые могут быть заданы: в форме явной аналитической зависимости  $F = F(\mu)$ ; в виде некоторого алгоритма; в форме уравнения, решением которого является функция  $F(\mu)$ , и т. д.

### 3.4. Математическая формулировка задач оптимизации

Предпосылкой к успешному решению задачи оптимизации конструкции служит выявление зависимости между целевой функцией, ограничениями и оптимизируемыми величинами. Поэтому составление её математической модели предполагает основательные знания:

— во-первых, существа явлений, происходящих в конструкции;

— во-вторых, математических методов, с помощью которых можно описать поведение конструкции.

В формализованном виде задача оптимального проектирования в общей постановке заключается в определении значений управляемых параметров (как правило, независимых конструктивных величин)  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , при которых критерий оптимальности проектируемой конструкции, являющийся линейной или нелинейной (в подавляющем большинстве случаев) функцией переменных,

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

имеет экстремальное (минимальное или максимальное) значение

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{extr}$$

при условии, что выполняются ограничения, заданные в форме:

— равенств  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m}$ ;

— неравенств  $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i = \overline{1, m}$ .

Другими словами, при известных множестве возможных вариантов конструкции данного типа, функционале  $F(\mu)$ , определяющем функцию цели, системе ограничений  $G(\mu)$ , определяющих подмножества вариантов  $M^G$ , требуется найти  $\mu \in M^G$ , при которых  $F(\mu) = \text{extr}$ .

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя с примерами задач проектирования типовых изделий с элементами оптимизации, схемами поиска оптимального решения их критериями и функциями, математической формулировкой задачи оптимального проектирования, методами оптимизации, структурно-параметрическая оптимизация конструкции на примере цепных муфт (гл. 12).

#### Вопросы для самоконтроля

1. Схема поиска решения, критерии оптимальности.
2. Методы оптимизации.

## 4. УРОВНИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ

В данной главе изложены уровни оптимизации и дана классификация оптимизационных задач при проектировании.

### Основные понятия и определения

**Оптимизация принципа действия** — выбор физических принципов действия объекта проектирования и его механизмов.

**Структурная оптимизация** — поиск наилучшей структуры создаваемого объекта.

**Параметрическая оптимизация** — определение оптимальных параметров проектируемой технической системы.

### 4.1. Уровни оптимизации

При проектировании объекта возможны следующие *уровни оптимизации*:

- первый — выбор физических принципов действия технической системы и её механизмов;
- второй — поиск наилучшей структуры (структурная оптимизация);
- третий — определение оптимальных параметров (параметрическая оптимизация) проектируемой технической системы.

Применительно к приводу рабочей машины, проектируемому, например, по курсу деталей машин, должны быть определены:

- 1) принцип действия создаваемого привода;
- 2) структура привода;
- 3) параметры его основных составных частей.

**Оптимальный выбор принципа действия.** Поиск оптимальной руководящей технической идеи или оптимального физического принципа действия технической системы и её

механизмов выполняется на предпроектной стадии — в процессе проведения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИИОКР). При этом в качестве одного из критериев оптимальности используется экономический показатель, т. е. создается экономико-математическая модель. Благодаря этому реализуется наибольший эффект от создания нового изделия.

В качестве примера рассмотрим возможные исполнения механизма изменения вылета стрелы грузоподъемной машины:

— первое — в механизме применяется силовой гидроцилиндр (пример 14.2);

— второе — изменение вылета стрелы осуществляется за счёт наматывания каната полиспаста на барабан, приводимый во вращение от двигателя.

Как видно, в рассматриваемых конструкциях механизма использованы различные принципы действия, и требуется сравнительная их оценка по выявлению более эффективной из них.

**Структурно-параметрическая оптимизация.** На этапе проектирования решается задача разработки инженерной конструкции при известных физических принципах действия. При этом следует выполнять структурно-параметрическую оптимизацию.

Важно, что на предпроектном и проектном этапах новые решения могут быть предметами изобретения.

Поскольку в деталях машин изучаются лишь детали и сборочные единицы механического привода, ниже рассматриваем вопросы, касающиеся второй и третьей задач. Следовательно, в процессе разработки механического привода должна быть выполнена оптимизация проектируемой системы на двух уровнях:

— во-первых, структурная оптимизация — выбор количества и типа передач и других составных частей привода, обеспечивающих наилучшие его технико-экономические характеристики;

— во-вторых, параметрическая оптимизация — определение наилучших параметров отдельных структурных составляющих привода (сборочных единиц и деталей).

## 4.2. Классификация задач оптимизации

### при проектировании

Известно, что все задачи оптимизации можно разделить на две основные группы:

1. Задачи безусловной оптимизации. К этой группе относятся те задачи, в постановке которых нет ограничений и требуется оптимизировать целевую функцию  $F(x)$  на множестве её определения, т. е. найти оптимальную точку  $x^*$  и значение целевой функции в этой точке —  $F(x^*)$ ;

2. Задачи условной оптимизации, в постановке которых предусмотрены ограничения в виде равенств и (или) неравенств и требуется найти оптимальную точку  $x^*$  на множестве допустимых решений, заданных системой ограничений, и значение целевой функции в этой точке —  $F(x^*)$ .

Кроме того, оптимизация может быть однокритериальная (скалярная) и многокритериальная (векторная).

*Однокритериальная оптимизация* основана на определении экстремума функции (функционала) с помощью классических методов. При этом математическая модель должна характеризоваться непрерывными и дифференцируемыми аналитическими функциями и задача не должна содержать ограничений на функции управления и другие переменные.

*Многокритериальная оптимизация* позволяет получить наилучшее значение для заданного множества характеристик рассматриваемого объекта. На практике данный вид задач встречается наиболее часто. Это объясняется большим количеством технических требований, предъявляемым к проектируемому изделию в зависимости от условий и режимов его работы, а также структурной сложностью самого изделия.

Рассмотренные в подразделе 4.1 примеры задач проектирования типовых изделий с элементами оптимизации являются, как правило, многокритериальными задачами условной оптимизации. Все они касаются синтеза механического привода машин и его составных частей.

Так, на рисунке 4.1 представлена структурная схема оптимизации привода. Она охватывает практически весь комплекс задач оптимального проектирования механического привода.

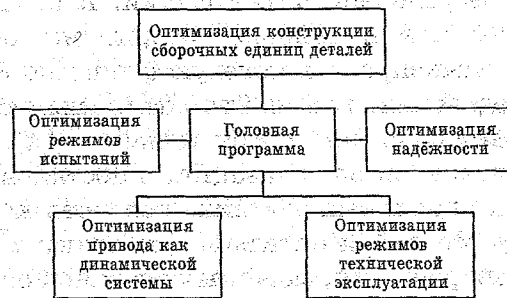


Рис. 4.1. Структурная схема оптимизации привода

### 4.3. Рациональное и оптимальное решения инженерных задач

В курсе «Сопротивление материалов» рассматривались стержни с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений. Это могут быть стержни равного сопротивления растяжению, изгибу и т. п.

Наглядной иллюстрацией стержней с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений может служить консольная балка равного сопротивления изгибу (рис. 4.2), во всех сечениях которой максимальное напряжение  $\sigma_{\max}(z)$  равно допустимому  $[\sigma]$ .

$$\sigma_{\max}(z) = \frac{M(z)}{W(z)} = [\sigma], \quad (4.1)$$

где  $M(z)$  — изгибающий момент в сечении  $z$ ;  
 $W(z)$  — момент сопротивления этого сечения.

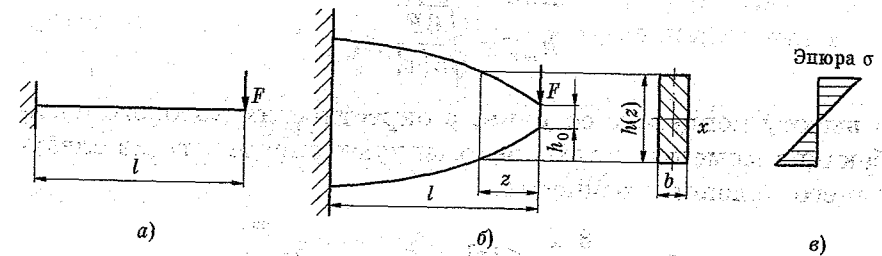


Рис. 4.2. Балка равного сопротивления:

$a$  — расчётная схема;  $b$  — параметры балки;  
 $c$  — эпюра напряжений

Из условия прочности имеем

$$W(z) = \frac{M(z)}{[\sigma]}. \quad (4.2)$$

Так как  $[\sigma] = \text{const}$  и

$$M(z) = Fz, \quad (4.3)$$

то  $W(z)$  меняется по линейному закону.

Если зададимся формой сечения балки таким образом, чтобы размеры определялись только одним параметром, из уравнения (4.2) найдём закон изменения этого параметра по длине балки, т. е. определим размеры всех сечений.

Вернёмся к рисунку 4.2, на котором балка равного сопротивления изгибу имеет прямоугольное сечение постоянной ширины  $b$  и переменной высоты  $h(z)$ . Для него

$$W(z) = \frac{bh^2(z)}{6}. \quad (4.4)$$

С учётом выражений (4.2)-(4.4) получаем

$$h(z) = \sqrt{\frac{6F}{b[\sigma]} \sqrt{z}}. \quad (4.5)$$

Из формулы (4.5) следует, что высота рассматриваемой балки меняется по параболическому закону, причём

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{6F}{b[\tau]}} \sqrt{l},$$

а высоту концевое сечения, в окрестностях которого изгибающие моменты малы, рекомендуют определять из следующего условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} \leq [\tau] \Rightarrow h_{\min} \geq 1,5 \frac{F}{b[\tau]}.$$

Балка параболического очертания с прямоугольным сечением постоянной ширины (рис. 4.2б) даёт определённую экономию материала. Однако нетрудно видеть (рис. 4.2в), что при таком решении не реализовано максимально возможное описание материалоемкости изделия. Кроме того, из-за сложной формы балка не удовлетворяет требованиям технологичности. Практически для удовлетворения этим требованиям используют не балки равного сопротивления, а близкие к ним по эффекту ступенчатые стержни. Примером подобных изделий (деталей машин общего назначения) могут служить валы переменного сечения, листовые рессоры и т. д.

По указанным причинам рассмотренное проектное решение будем считать рациональным.

При оптимальном проектировании балки должна быть разработана математическая модель, например, следующего вида:

$$F(x) = m(x) \rightarrow \min \quad (4.6)$$

или

$$F(x) = c(x) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$q_1(x) = [\sigma] - \sigma_{\max} j(x) \geq 0;$$

$$q_2(x) = [f] - f(x) \geq 0;$$

$$q_3(x) = F_{\text{lim}}(x) - F \geq 0,$$

где  $m(x)$  — масса балки как функция вектора проектных параметров  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ , определяющих форму и размеры её поперечных сечений;

$c(x)$  — полные затраты, обусловленные стоимостью материала и затратами на изготовление;

$\sigma_{\max}(x)$  — максимальное напряжение в  $j$ -й точке поперечного сечения балки;

$f(x)$  — прогиб конца балки;

$F_{\text{lim}}(x)$  — предельная (критическая) нагрузка на балку из условия недопустимости потери её устойчивости.

Следовательно, оптимальное проектное решение должно обеспечивать минимум функции цели и удовлетворять ряду функциональных ограничений, связанных с прочностью, жёсткостью и устойчивостью балки.

Оптимальное решение рассматриваемой задачи представлено на рисунке 4.3.

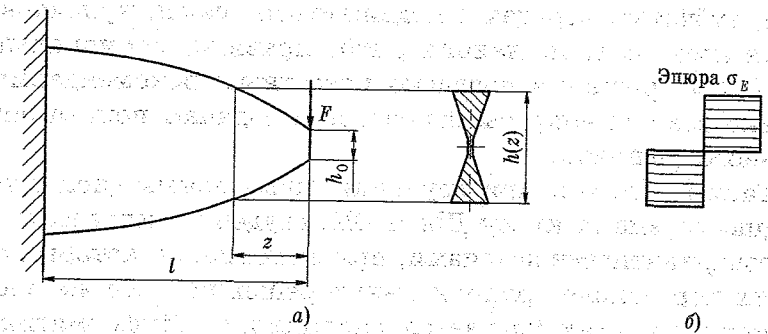


Рис. 4.3. Оптимальное решение:

а — параметры балки; б — эпюра напряжений

Решение, близкое к оптимальному, показано на рисунке 4.4. Балка имеет переменное сечение в виде двутавра, осевой момент сопротивления которого изменяется по линейному закону вдоль длины балки за счёт варьирования лишь высоты сечения.

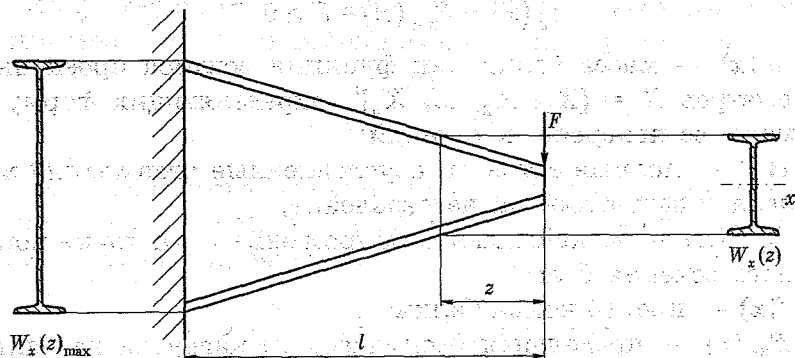


Рис. 4.4. Решение, близкое к оптимальному

Компьютерное исследование напряжённо-деформированного состояния балок выполнено методом конечных элементов с использованием графической системы *Solid WR*.

В курсе теории механизмов и машин при синтезе маховика, зубчатых передач с подвижными осями, кулачковых механизмов и т. п. находят, как правило, рациональные проектные решения согласно известным рекомендациям. Однако все эти вопросы относятся к задачам поиска оптимального решения.

Таким образом, при изучении инженерных дисциплин, предшествующих курсу ДМ и ОК, студенты встречаются с многовариантными задачами, при выполнении которых они до сих пор находят рациональные решения. В то же время на первых курсах изучается дисциплина «Информатика». Поэтому в процессе изучения дисциплин «Сопротивление материалов» и «Теория механизмов и машин» студентов необходимо знакомить с методиками разработки математических моделей для поиска оптимальных решений инженерных задач.

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя с уровнями оптимизации при проектировании и классификацией задач оптимизации.

### Вопросы для самоконтроля

1. Назовите уровни оптимизации при проектировании.
2. По каким признакам классифицируются задачи оптимизации?
3. Приведите примеры задач оптимизации при проектировании.
4. Какое решение является рациональным?
5. В чём особенность экономико-математической модели при оптимизации?

## II. СОВРЕМЕННЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ\*

Эффективность оптимизационных методов, позволяющих осуществить выбор наилучшего варианта без непосредственной проверки всех возможных вариантов, тесно связана с широким использованием достижений в области математики путём реализации итеративных вычислительных схем, опирающихся на строго обоснованные логические процедуры и алгоритмы, на базе применения вычислительной техники. Поэтому для изложения методологических основ оптимизации требуется привлечение важнейших результатов теории матриц, элементов линейной алгебры и дифференциального исчисления, а также положений математического анализа.

Математические понятия и модели используются в настоящем пособии для:

- повышения адекватности представления материала;
- составления терминологической базы изложения, которая позволяет упростить описание и определение структурных элементов рассматриваемых вычислительных процедур и облегчить их понимание.

Поскольку размерность инженерных задач, как правило, достаточно велика, а расчёты в соответствии с алгоритмами оптимизации требуют значительных затрат времени, оптимизационные методы ориентированы в основном на реализацию с помощью ЭВМ. Однако, несмотря на то, что изложение методологических принципов ведётся ниже с учётом указанной ориентации, авторы не сочли целесообразным подробно останавливаться на вопросах, связанных с составлением программ для ЭВМ и программированием. Главное внимание в пособии уделяется математическим и логическим построениям, лежащим в основе исследуемых

\* Материал отдельных глав подготовлен с участием доцента С. А. Чевычелова [17].

методов, факторам, обуславливающим выбор тех или иных аналитических схем, а также рассмотрению важнейших прикладных аспектов теории [18].

## 5. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ОЦЕНКА

В настоящей главе даётся классификация методов оптимизации — инструмента решения прикладных инженерных задач и их сравнительная оценка.

### Основные понятия и определения

*Метод оптимизации* — стратегия поиска оптимального проектного решения. Классификацию методов оптимизации можно производить по различным критериям.

*Стохастическое программирование* — задача оптимизации, в которой параметры являются случайными величинами.

*Универсальность метода* оптимизации — возможность его применения для решения самых разнообразных задач.

*Целочисленное программирование* — задача, в которой некоторые или все переменные должны принимать целое значение.

*Численный метод* — численное или приближённое решение экстремальных задач с помощью ЭВМ, т. е. машинная реализация алгоритма оптимизации.

*Эффективность метода* оптимизации (алгоритма) — число вычислений функции, необходимое для достижения требуемого сужения интервала неопределённости.

### 5.1. Классификация методов оптимизации

Метод оптимизации является стратегией поиска оптимального проектного решения. Классификацию методов оптимизации можно производить по различным критериям.



Основой любого из них является математический аппарат. В зависимости от используемого аппарата различают следующие типы методов оптимизации [1, 6]:

- классические неитерационные методы глобальной оптимизации;
- алгоритмические или математического программирования (итерационные);
- аналитико-графические;
- диалоговой оптимизации и другие.

К *классическим* относятся методы: наименьших квадратов, дифференциального исчисления, принцип минимакса Л. С. Понтрягина. Определение экстремума функции (функционала) классическими методами возможно при условии, что математическая модель характеризуется непрерывными и дифференцируемыми аналитическими функциями и что задача не содержит ограничений на функции управления и другие переменные.

Методами математического программирования являются линейное, нелинейное, динамическое, дискретное и стохастическое программирования. Эти методы подразумевают численное или приближённое решение уравнений в экстремальных задачах с помощью ЭВМ, т. е. машинную реализацию алгоритма с использованием САЕ-систем или специализированного программного обеспечения (ПО).

*Численные* методы поиска экстремума функций многих переменных лежат в основе алгоритмов конструирования физически реализуемых операторов и поэтому являются ключевыми для решения задач оптимального синтеза технических систем [3].

Для правильной постановки и решения задач оптимального проектирования конструкций необходимо знать:

- принцип действия методов оптимизации;
- класс задач, к которым применим тот или иной метод;
- формулировку задачи синтеза конструкции как технической системы в терминах теории оптимизации;
- наиболее эффективный метод её решения.

## 5.2. Оценка методов оптимизации

В настоящем пособии методы оптимизации делятся в зависимости от числа проектных параметров (рис. 5.1).

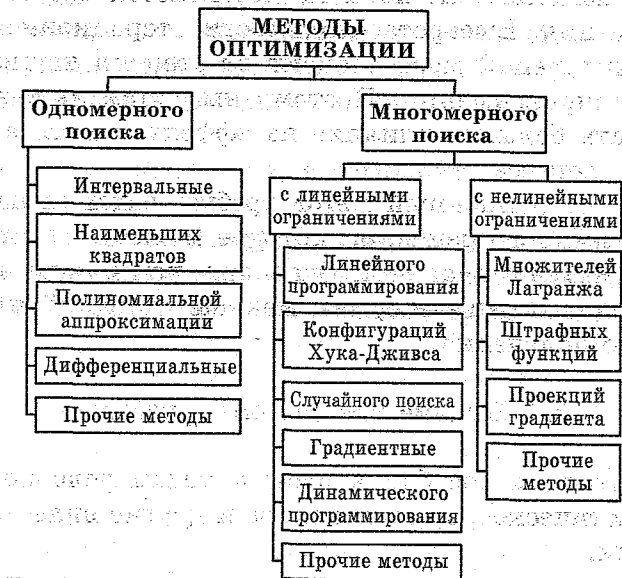


Рис. 5.1. Общая классификация методов оптимизации

Критериями сравнения методов оптимизации являются следующие:

- эффективность алгоритма — число вычислений, необходимое для достижения требуемой точности определения функции;
- универсальность, определяемая возможностью использования алгоритма для решения задач различного типа.

Более подробная информация по данному вопросу приведена в специальной литературе [11].

Решение задач оптимизации выполняется, как правило, итерационными методами. Их сущность заключается в многократном повторении одного и того же простого алго-

ритма, который даёт результат, постепенно приближающийся к точному решению.

Итерации начинаются с задания начального приближённого решения. Затем начальные значения переменных постепенно изменяются, пока не достигается заданная точность решения. Быстрота сходимости итерационного метода в значительной мере зависит от степени точности начальной аппроксимации. Поэтому интуиция инженера может оказать большое влияние на эффективность вычислительного процесса.

Любой итерационный метод требует задания начального приближённого решения, которое может быть получено *любым разумным способом*. Очевидно, чем ближе исходное приближение к решению, тем меньше итераций необходимо для его получения.

### 5.3. Прочие методы оптимизации

В настоящем пособии к этим методам условно отнесены: стохастическое, целочисленное и другие виды программирования.

**Стохастическое программирование.** В данном случае при решении задач оптимизации параметры являются случайными величинами. Подобные задачи встречаются в инженерной практике при оптимизации надёжности технических систем (гл. 17). В этом случае нагрузка, действующая на детали подсистем, и механические свойства материала этих деталей в действительности не являются детерминированными.

**Целочисленное программирование.** Оно позволяет решать задачи специальной структуры [7]. Под задачей целочисленного программирования понимается задача, в которой некоторые или все переменные должны принимать целое значение. В первом случае задача является смешанной, а во втором — полностью целочисленной. Естественно, что для смешанной задачи отдельные переменные предполага-

ются целочисленными, а остальные могут принимать произвольные (нецелые) значения.

В качестве примера укажем задачу о ранце (контейнере), которая относится к динамическому программированию (гл. 11).

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя с классификацией и сравнительной оценкой методов оптимизации.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое метод оптимизации?
2. Назовите основные типы методов оптимизации.
3. По каким показателям оценивается метод оптимизации?

## 6. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА

В данной главе рассматривается структура алгоритмов одномерного поиска, и приводятся примеры решения задач оптимизации с помощью этих алгоритмов. При этом рассматриваются как линейные, так и нелинейные функции. При решении последних задач используется классический метод, излагаемый в курсе математического анализа.

### Основные понятия и определения

*Интервальный метод* — метод, основанный на последовательном сужении интервала, в котором находится экстремум функции.

*Метод наименьших квадратов* — метод, позволяющий установить регрессионную зависимость путём обработки экспериментальных данных.

*Метод одномерного поиска* — метод нахождения экстремума функции одного параметра (рис. 1.4).

### 6.1. Классификация методов одномерного поиска

Для решения задачи оптимизации, в которой характеристическая мера задана функцией одной переменной, можно использовать различные методы одномерного поиска (рис. 6.1).

*Интервальные методы* основаны на последовательном сужении интервала, в котором находится экстремум функции.

*Методы полиномиальной аппроксимации* более сложны и имеют систематическую погрешность, поскольку аппроксимирующая кривая отличается от истинной кривой. Однако эта погрешность достаточно невелика.

*Дифференциальные методы.* Если к условию непрерывности ввести требование дифференцируемости функции (гл. 1), то эффективность поисковых процедур можно существенно повысить, так как необходимым условием существования локального экстремума функции в некоторой точке  $x$  явля-

ется обращение в нуль первой производной функции в этой точке

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 0.$$

В случае, когда

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} < 0$$

в указанной точке функция *максимальна*, в противном случае

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} > 0$$

и функция *минимальна*. Следовательно, здесь указаны необходимые и достаточные условия существования экстремумов функции. Сравнивая полученные экстремальные значения, находят оптимальное решение.



Рис. 6.1. Классификация методов одномерного поиска

*Метод наименьших квадратов.* Сущность данного метода заключается в поиске таких коэффициентов функциональной зависимости, при которых сумма квадратов отклонений полученного выражения от значений табличной зависимости по всем точкам  $j$  таблицы  $(j = 1, k)$  была мини-

мальной. Этот метод применяется при обработке экспериментальных данных для установления регрессионной зависимости между исследуемыми величинами.

## 6.2. Методы с использованием производных

**Метод Ньютона-Рафсона.** В рамках схемы Ньютона-Рафсона предполагается, что функция  $f$  дважды дифференцируема. Работа алгоритма начинается в точке  $x_1$ , которая представляет начальное приближение (или начальную оценку) координаты стационарной точки или корня уравнения  $f'(x) = 0$ . Затем строится линейная аппроксимация функции  $f'(x)$  в точке  $x_1$ , и точка, в которой аппроксимирующая линейная функция обращается в нуль, принимается в качестве следующего приближения. Если точка  $x_k$  принята в качестве текущего приближения к стационарной точке, то линейная функция, аппроксимирующая функцию  $f'(x)$  в точке  $x_k$ , записывается в виде

$$f'(x; x_k) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k). \quad (6.1)$$

Приравняв правую часть уравнения (6.1) нулю, получим следующее приближение:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}. \quad (6.2)$$

Рисунок 6.2 иллюстрирует основные шаги реализации метода Ньютона-Рафсона. К сожалению, в зависимости от выбора начальной точки и вида функции, алгоритм может как сходиться к истинной стационарной точке, так и расходиться [1].

Ниже приведён алгоритм, использующий поиск методом Ньютона-Рафсона.

- Шаг 1. Определить начальную точку  $x_1$ .
- Шаг 2. Вычислить  $f'(x_k)$ ,  $f''(x_k)$  и следующее приближение по формуле (6.2).
- Шаг 3. Проверка на окончание поиска. Если  $|f'(x_k)| > \varepsilon$ , то перейти к шагу 2.

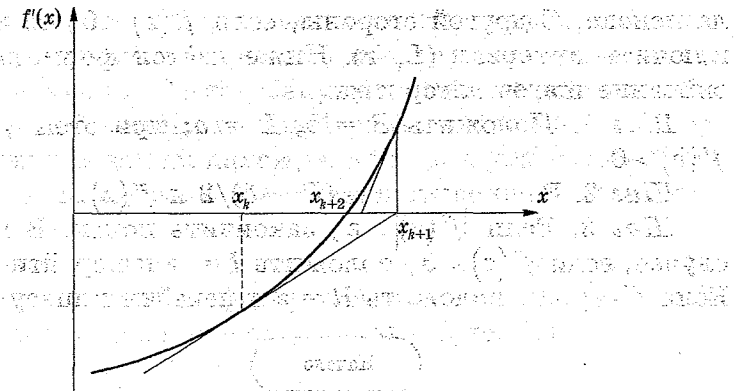


Рис. 6.2. Метод Ньютона-Рафсона

**Метод средней точки.** Если функция  $f'(x)$  унимодальна в заданном интервале поиска, то точкой оптимума является точка, в которой  $f'(x) = 0$ . Если при этом имеется возможность вычислять как значение функции, так и её производной, то для нахождения корня уравнения  $f'(x) = 0$  можно воспользоваться эффективным алгоритмом исключения интервалов, на каждой итерации которого рассматривается лишь одна пробная точка. Например, если в точке  $z$  выполняется неравенство  $f'(z) < 0$ , то с учётом предположения об унимодальности естественно утверждать, что точка минимума не может находиться левее точки  $z$ . Другими словами, интервал  $x \leq z$  подлежит исключению. С другой стороны, если  $f'(z) > 0$ , то точка минимума не может находиться правее  $z$  и интервал  $x \geq z$  можно исключить [1]. Приведённые рассуждения лежат в основе логической структуры метода средней точки, который иногда называют поиском Больцано.

Определим две точки  $L$  и  $R$  таким образом, что  $f'(L) < 0$  и  $f'(R) > 0$ . Стационарная точка расположена между  $L$  и  $R$  (рис. 6.3). Вычислим значение производной функции в средней точке рассматриваемого интервала  $z = (R + L)/2$ . Если  $f'(z) > 0$ , то интервал  $(z, R)$  можно исключить из интерва-

ла поиска. С другой стороны, если  $f'(z) < 0$ , то можно исключить интервал  $(L, z)$ . Ниже дается формализованное описание шагов алгоритма.

**Шаг 1.** Положить  $R = b$ ,  $L = a$ ; при этом  $f'(a) < 0$  и  $f'(b) > 0$ .

**Шаг 2.** Вычислить  $z = (R + L)/2$  и  $f'(z)$ .

**Шаг 3.** Если  $|f'(z)| \leq \varepsilon$ , закончить поиск. В противном случае, если  $f'(z) < 0$ , положить  $L = z$  и перейти к шагу 2. Если  $f'(z) > 0$ , положить  $R = z$  и перейти к шагу 2.

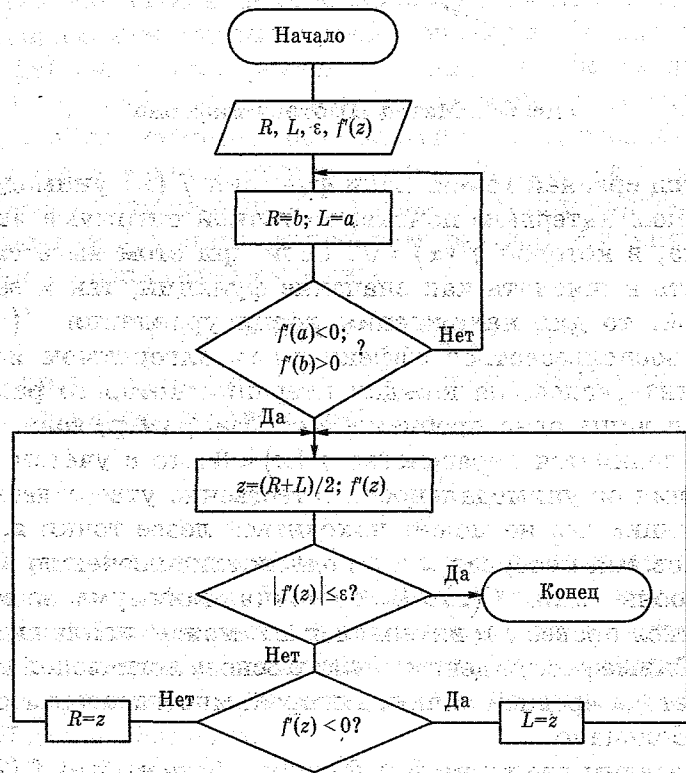


Рис. 6.3. Схема алгоритма метода средней точки

Следует отметить, что логическая структура поиска в соответствии с изложенным методом исключения интерва-

лов основана лишь на исследовании знака производной независимо от значений, которые эта производная принимает.

**Метод секущих.** Метод секущих, являющийся комбинацией метода Ньютона и общей схемы исключения интервалов, ориентирован на нахождение корня уравнения  $f'(x)$  в интервале  $[a, b]$ , если, разумеется, такой корень существует.

Предположим, что в процессе поиска стационарной точки функции  $f(x)$  в интервале  $[a, b]$  обнаружены две точки  $L$  и  $R$ , в которых знаки производной различны (рис. 6.4).

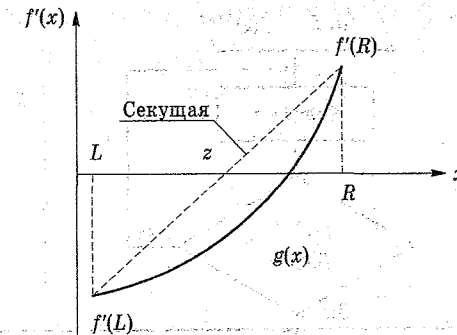


Рис. 6.4. Метод секущих

В этом случае алгоритм метода секущих позволяет аппроксимировать функцию  $f'(x)$  «секущей прямой» (прямой линией, соединяющей две точки) и найти точку  $z$ , в которой секущая графика  $f'(x)$  пересекает ось абсцисс (рис. 6.4). Таким образом, следующее приближение к стационарной точке  $x^*$  определяется по формуле

$$z = R - \frac{f'(R)}{[f'(R) - f'(L)] / (R - L)}. \quad (6.3)$$

Если  $|f'(z)| \leq \varepsilon$ , поиск следует закончить. В противном случае необходимо выбрать одну из точек  $L$  или  $R$  таким образом, чтобы знаки производных в этой точке и точке  $z$  были различны, а затем повторить основной шаг алгоритма [1].

Алгоритм для данного метода следующий (рис. 6.5):  
**Шаг 1.** Положить  $R = b$ ,  $L = a$ ; при этом  $f'(a) < 0$  и  $f'(b) > 0$ .

**Шаг 2.** Вычислить текущее приближение  $z$  к минимуму по формуле (6.3). Вычислить  $f'(z)$ .

**Шаг 3.** Если  $|f'(z)| \leq \varepsilon$ , закончить поиск. В противном случае, если  $f'(z) < 0$ , положить  $R = z$  и перейти к шагу 2.

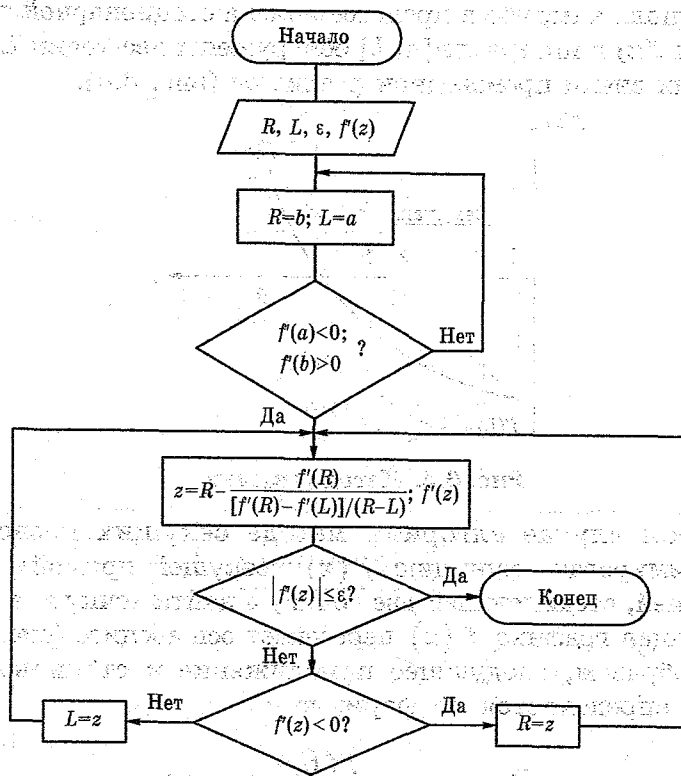


Рис. 6.5. Схема алгоритма метода секущих

После составления алгоритмов можно начинать разработку программного комплекса, определив вначале цели, которым должна удовлетворять разрабатываемая программа.

### 6.3. Интервальные методы

Метод общего поиска. Интервал неопределённости  $[a, b]$  делится на  $N$  частей, и подсчитываются значения целевой функции  $Y(x)$  в  $N + 1$  точках (включая  $Y(a)$  и  $Y(b)$ ) (рис. 6.6). Из подсчитанных  $N + 1$  значений целевой функции выбирается минимальное (максимальное)  $Y^{(1)}$  и соответствующее ему значение параметра  $x^{(1)}$ , после чего назначается сокращённый (новый) интервал неопределённости  $\Delta$  или изменения параметра  $x$ , определяемый как расстояние по  $x$  между точками, соседними с точкой минимума (максимума).

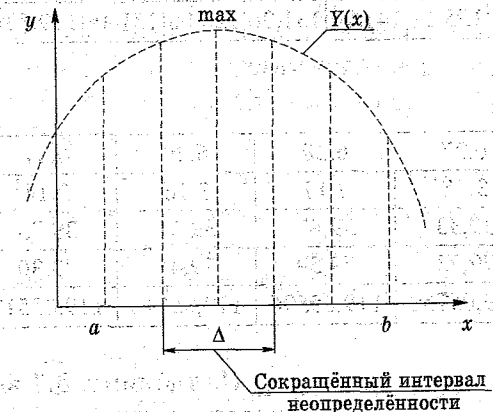


Рис. 6.6. Схема алгоритма метода общего поиска

Сокращённый интервал неопределённости снова делится на такое же количество  $N$  частей, определяется новое минимальное (максимальное) значение  $Y^{(2)}$  целевой функции, затем назначается новый сокращённый интервал и т. д. Процесс прекращается по достижении заданной точности  $\varepsilon_x$  (по проектному параметру) или  $\varepsilon_y$  (по целевой функции).

**Пример 6.1.** Пусть ёмкость в виде параллелепипеда (рис. 7.4) имеет объём  $V = 125 \text{ дм}^3$ , определим  $x_1^*$  и  $x_3^*$  ме-

тодом общего поиска с точностью  $\varepsilon_x = 0,01$ . Данную задачу, являющуюся двумерной, решаем одномерным интервальным методом.

Принимаем интервал неопределённости параметра  $x$  [3; 7], количество участков  $N = 8$ , результат расчёта целевой функции  $A_2 = f(x_1, x_3)$  сводим в таблицу 6.1.

Таблица 6.1

$x_1$	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00
$x_3 = V/x_1^2$	13,89	10,20	7,81	6,17	5,00	4,13	3,47	2,96	2,55
$A_1 = x_1^2$	9,00	12,25	16,00	20,25	25,00	30,25	36,00	42,25	49,00
$A_2 = 4V/x_1$	166,67	142,86	125,00	111,11	100,00	90,91	83,33	76,92	71,43
$A_2 = A_1 + A_2$	175,67	155,11	141,00	131,36	125,00	121,16	119,33	119,17	120,43

Таблица 6.2

$x_1$	6,27	6,28	6,29	6,31	6,32
$x_3 = V/x_1^2$	3,18	3,17	3,16	3,14	3,13
$A_1 = x_1^2$	39,33	39,47	39,61	39,75	39,90
$A_2 = 4V/x_1$	79,73	79,59	79,44	79,30	79,16
$A_2 = A_1 + A_2$	119,05750	119,05596	119,05518	119,05517	119,05591

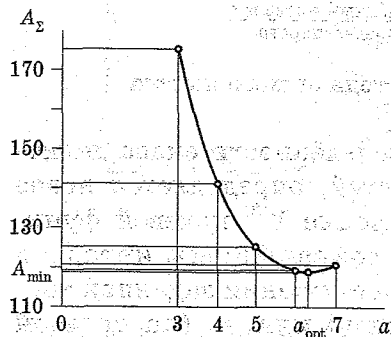


Рис. 6.7. График зависимости  $A_2 = f(x_1, x_3)$

Из таблицы 6.1 видно, что  $A_2$  имеет минимальное значение при  $x_1 = 6,5$ . Так как сокращённый интервал больше заданной точности, повторяем расчёт. В результате расчёта во втором и третьем приближении интервал сократится соответственно  $\Delta_3 [6,13; 6,38]$  и  $\Delta_4 [6,26; 6,35]$ .

Для наглядности строим график зависимости  $A_2 = f(x_1, x_3)$  (рис. 6.7).

Метод деления отрезка пополам. Рассматриваемый метод позволяет исключать в точности половину интервала на каждой итерации. Иногда этот метод называют трёхточечным поиском на равных интервалах, поскольку его реализация основана на выборе трёх пробных точек, равномерно распределённых в интервале поиска. Ниже приводится алгоритм поиска, ориентированный на нахождение точки минимума функции  $f(x)$  в интервале  $[a, b]$  (рис. 6.8).

**Шаг 1.** Вычислить  $x_m = (a + b)/2$ ,  $L = b - a$  и  $f(x_m)$ . Если  $|L| < \varepsilon$ , закончить поиск и принять  $\min f(x) = f(x_m)$ . В противном случае продолжить расчёт.

**Шаг 2.** Определить  $x_1 = a + L/4$  и  $x_2 = b - L/4$ . Таким образом, точки  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_m$  делят интервал  $[a, b]$  на четыре равные части. Вычислить значения  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

**Шаг 3.** Сравнить  $f(x_1)$  и  $f(x_m)$ .

Если  $f(x_1) < f(x_m)$ , исключить интервал  $[x_m, b]$ , положив  $b = x_m$ . Средней точкой нового интервала поиска становится точка  $x_1$ . Следовательно, необходимо положить  $x_m = x_1$ . Вернуться к шагу 1. Если  $f(x_1) \geq f(x_m)$ , продолжить расчёт.

**Шаг 4.** Сравнить  $f(x_2)$  и  $f(x_m)$ .

Если  $f(x_2) < f(x_m)$ , исключить интервал  $[a, x_m]$ , положив  $a = x_m$ . Так как средней точкой нового интервала становится точка  $x_2$ , положить  $x_m = x_2$ . Перейти к шагу 5.

Если  $f(x_2) \geq f(x_m)$ , исключить интервалы  $[a, x_1]$  и  $[x_2, b]$ . Положить  $a = x_1$  и  $b = x_2$ . Средней точкой нового интервала продолжает оставаться  $x_m$ . Вернуться к шагу 1.

Если  $f(x_2) < f(x_m)$ , исключить интервал  $[a, x_m]$ , положив  $a = x_m$ . Так как средней точкой нового интервала становится точка  $x_2$ , положить  $x_m = x_2$ . Перейти к шагу 5. Если  $f(x_2) \geq f(x_m)$ , исключить интервалы  $[a, x_1]$  и  $[x_2, b]$ . Положить  $a = x_1$  и  $b = x_2$ . Средней точкой нового интервала продолжает оставаться  $x_m$ . Вернуться к шагу 1.

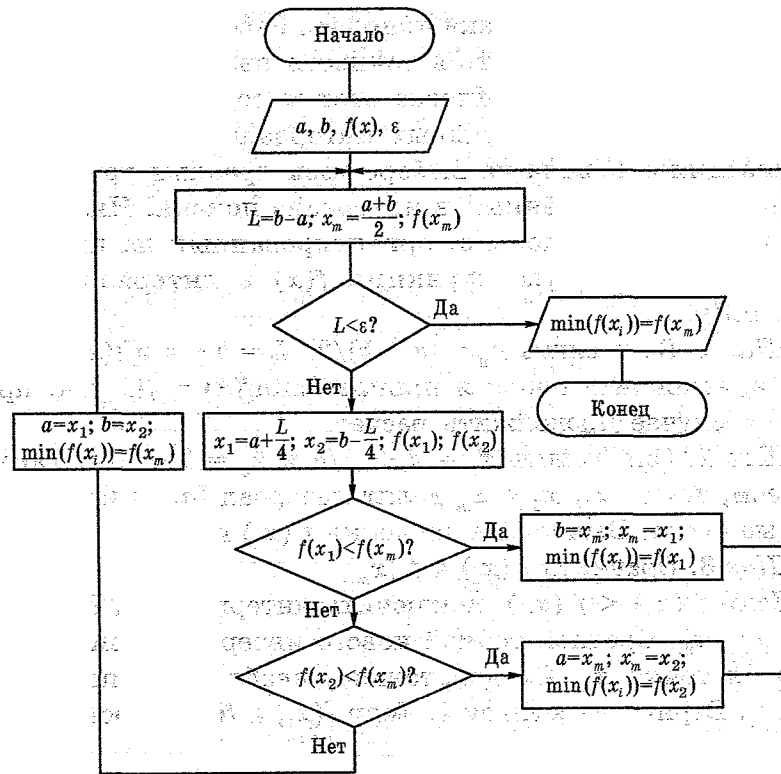


Рис. 6.8. Схема алгоритма метода деления отрезка пополам

**Пример 6.2.** Требуется определить расход металла на изготовление ёмкости в виде параллелепипеда (рис. 7.4) с крышкой.

**Решение.** Целевая функция в данном случае имеет следующий вид:

$$A_2 = 2x_1^2 + \frac{4V}{x_1} \rightarrow \min. \quad (6.4)$$

Выполнив аналогичные преобразования, получим

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sqrt[3]{V}.$$

Данную задачу, являющуюся двумерной, решаем одномерным интервальным методом деления отрезка пополам с точностью  $\varepsilon_x = 0,01$ .

Принимаем интервал неопределённости параметра  $x_1[3; 7]$ , определяем значение целевой функции  $A_2 = f(x_1, x_3)$  в промежуточных точках, результат расчёта сводим в таблицу 6.3.

Таблица 6.3

$a$	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
$h = V/x_1^2$	13,89	7,81	5,00	3,47	2,55
$A_1 = 2x_1^2$	18,00	32,00	50,00	72,00	98,00
$A_2 = 4V/x_1$	166,67	125,00	100,00	83,33	71,43
$A_\Sigma = A_1 + A_2$	184,667	157,000	150,000	155,333	169,429

Согласно расчётам на последующих этапах интервал неопределённости сократится  $\Delta_2[4; 6]$ ,  $\Delta_3[4,5; 5,5]$ ,  $\Delta_4[4,75; 5,25]$ ,  $\Delta_5[4,88; 5,13]$ ,  $\Delta_6[4,94; 5,07]$ ,  $\Delta_7[4,97; 5,04]$ ,  $\Delta_8[4,99; 5,02]$ .

В девятом приближении  $\Delta_9[4,99; 5,01]$  интервал неопределённости сокращается до заданной степени точности, следовательно, поиск прекращается. Результат расчёта представлен в таблице 6.4.

Таблица 6.4

$a$	4,99	5,00	5,00	5,01	5,01
$h = V/a^2$	5,02	5,01	5,00	4,99	4,98
$A_1 = 2a^2$	49,80	49,90	50,00	50,10	50,20
$A_2 = 4V/a$	100,20	100,10	100,00	99,90	99,80
$A_\Sigma = A_1 + A_2$	150,001	150,000	150,000	150,000	150,001

Таким образом, суммарная площадь минимальна при  $a^* = 5$  и  $h^* = 5$ . Для наглядности строим график зависимости  $A_2 = f(a, h)$  (рис. 6.9).



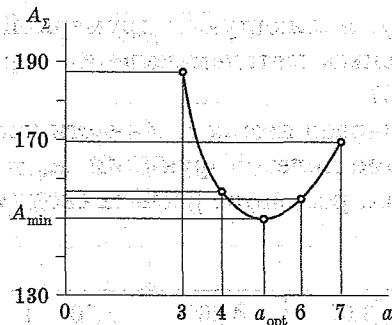


Рис. 6.9. График зависимости  $A_2 = f(a, h)$

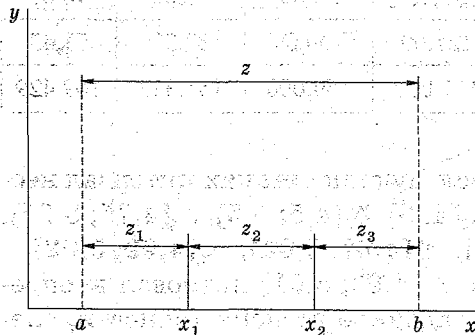


Рис. 6.10. Обозначения, используемые в методе дихотомии

### Метод дихотомии.

При рассмотрении предыдущих методов отмечалось, что вычисление целевой функции в двух точках интервала неопределённости позволяет его сузить. Можно так выбрать эти точки, что интервал неопределённости будет минимальным (рис. 6.10).

Если при  $x_1$  значение целевой функции больше, чем при  $x_2$ , то новый интервал неопределённости (при поиске минимума) равен  $P = z_2 + z_3$ . В противном случае интервал неопределённости равен  $T = z_1 + z_2$ .

Задача состоит в том, чтобы одновременно минимизировать  $T$  и  $P$ , удовлетворяя условиям:  $z_1 + z_2 + z_3 = z$ ,  $z_1 > 0$ ,  $z_2 > 0$ ,  $z_3 > 0$ . Если из равенств исключить  $z_2$ , тогда  $T = z - z_3$  и  $P = z - z_1$ .

Так как величина  $z$  задана, то эти выражения будут тем меньше, чем больше  $z_1$  и  $z_3$ . Следовательно, оптимум будет соответствовать условию  $z_1 = z_3 = 0,5z$ , но тогда  $z_2 = 0$ , что противоречит условию  $z_2 > 0$ .

Пусть  $z_2$  имеет некоторое очень малое значение  $\varepsilon$ . Тогда из  $z_1$  и  $z_3$  вычтем по  $\varepsilon/2$ . В результате после вычисления первой пары значений целевой функции при близких значениях  $x$  интервал неопределённости сузится, как показано на рисунке 6.11.

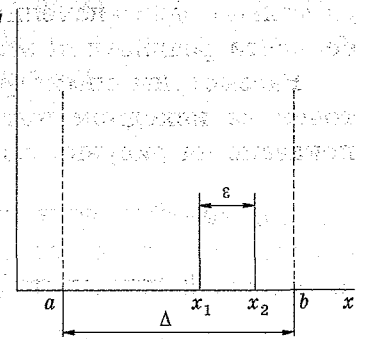


Рис. 6.11. Метод дихотомии

В дальнейшем, при использовании метода дихотомии, выполняются те же операции, что и при использовании метода деления интервала пополам (рис. 6.11). Отметим, что для достижения одинаковых сужений интервала неопределённости метод дихотомии требует для вычисления целевой функции в точках на одну точку меньше.

Константе различимости  $\varepsilon$  можно присваивать разные значения.

Обычно  $\varepsilon$  принимается в интервале от  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$ , но иногда приходится выходить за указанные пределы.

**Пример 6.3.** При решении примера 6.2 методом дихотомии на первом этапе интервал сузится до  $\Delta_2[4,999; 7]$  (табл. 6.5).

Таблица 6.5

$a$	3,00	4,999	5,001	7,00
$h = V/a^2$	13,89	5,00	5,00	2,55
$A_1 = 2a^2$	18,00	49,98	50,02	98,00
$A_2 = 4V/a$	166,67	100,02	99,98	71,43
$A_2 = A_1 + A_2$	184,667	150,000	150,000	169,429

В дальнейшем необходимо выполнить те же операции, что и при использовании метода деления интервала пополам.

**Метод золотого сечения.** В отличие от приведённого выше в методе золотого сечения на каждой итерации вычисляет-

ся только одно значение целевой функции. Приведём особенности реализации этого метода.

Рассмотрим симметричное расположение двух пробных точек на исходном интервале единичной длины, которое показано на рисунке 6.12.

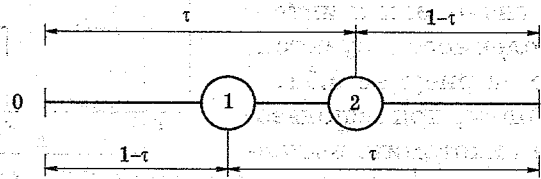


Рис. 6.12. Поиск с помощью метода золотого сечения

Пробные точки отстоят от граничных точек интервала на расстоянии  $\tau$ . При таком симметричном расположении точек длина остающегося после исключения интервала всегда равна  $\tau$  независимо от того, какие из значений функции в пробных точках оказались меньшим. Предположим, что исключается правый подинтервал. На рисунке 6.13 показано, что оставшийся подинтервал длины  $\tau$  содержит одну пробную точку, расположенную на расстоянии  $(1-\tau)$  от левой граничной точки.

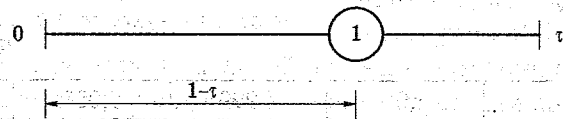


Рис. 6.13. Интервалы, полученные методом золотого сечения

Для того чтобы симметрия поискового образца сохранялась, расстояние  $(1-\tau)$  должно составлять  $\tau$ -ю часть длины интервала (которая равна  $\tau$ ). При таком выборе  $\tau$  следующая пробная точка размещается на расстоянии, равном  $\tau$ -й части длины интервала, от правой граничной точки интервала (рис. 6.14).

Отсюда следует, что при выборе  $\tau$  в соответствии с условием  $1-\tau = \tau^2$  поискового образца, показанного на рисун-

ке 6.12, симметрия сохраняется при переходе к уменьшенному интервалу, который изображён на рисунке 6.14. Решая это квадратное уравнение, получаем

$$\tau = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

откуда положительное решение  $\tau = 0,61803$ . Схема поиска, при которой пробные точки делят интервал в этом отношении, известна под названием поиска с помощью метода золотого сечения.

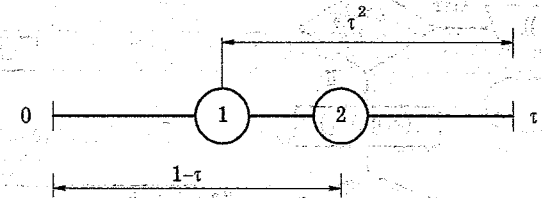


Рис. 6.14. Симметрия золотого сечения интервала

Алгоритм поиска с помощью данного метода выглядит следующим образом (рис. 6.15):

Шаг 1. Положить  $x_0 = a$ ,  $x_3 = b$ .

Шаг 2. Положить  $x_1 = a + \tau_1(b - a)$ . Вычислить значение  $f(x_1)$ .

Шаг 3. Положить  $x_2 = a + \tau_2(b - a)$ . Вычислить значение  $f(x_2)$ .

Шаг 4. Сравнить  $f(x_2)$  и  $f(x_1)$ .

Если  $f(x_1) > f(x_2)$ , исключить интервал  $(x_1, x_2)$ , положив  $L = x_3 - x_1$ ,  $x_0 = x_1$ ,  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 = x_0 + \tau_2 L$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Вычислить значение  $f(x_2)$ . Перейти к шагу 5.

Если  $f(x_1) < f(x_2)$ , исключить интервал  $(x_2, x_3)$ , положив  $L = x_2 - x_0$ ,  $x_3 = x_2$ ,  $x_1 = x_2$ ,  $x_1 = x_0 + \tau_1 L$ ,  $f(x_2) = f(x_1)$ .

Вычислить значение  $f(x_1)$ . Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Определить количество вычислений функций —  $k$ .

Если  $k < N$  и  $|L| > \epsilon$ , перейти к шагу 4. В противном случае закончить поиск.

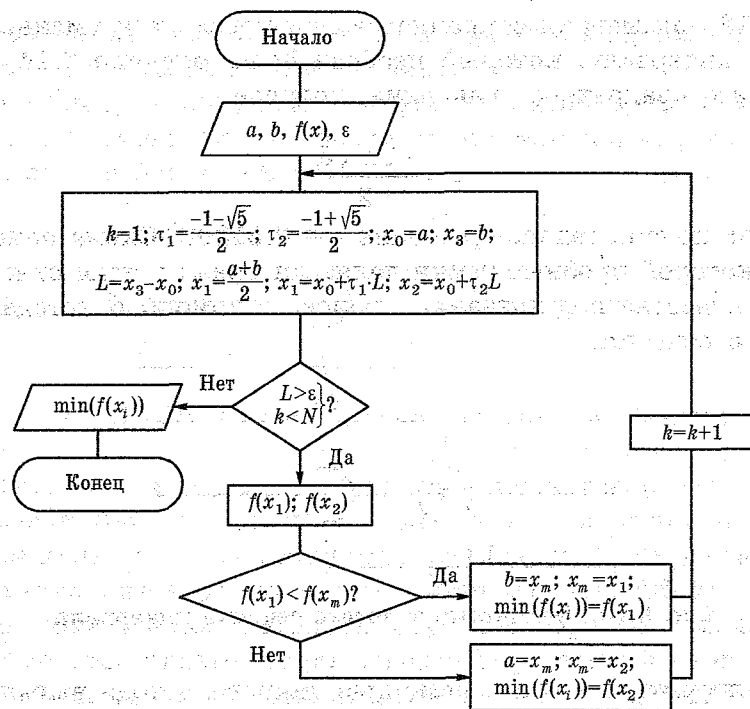


Рис. 6.15. Схема алгоритма метода золотого сечения

**Пример 6.4.** Завод планирует выпускать ёмкости в форме поверхности прямого кругового цилиндра без крышки объёмом  $V = 100 \text{ см}^3$ . Необходимо определить радиус  $x_1$  основания и высоту  $x_2$ , при которых расход листового материала будет минимальным. Данную задачу решаем методом золотого сечения. Результаты расчёта сводим в таблицу 6.6 при  $V = 392,7 \text{ дм}^3$ .

Таблица 6.6

$r$	3,00	4,53	5,47	7,00
$h = V/(\pi r^2)$	13,90	6,10	4,18	2,55
$A = \pi r^2 + 2V/r$	290,06	237,83	237,55	266,06

Согласно расчётам на последующих этапах интервал неопределённости сокращается  $\Delta_2[4,53;7]$ ,  $\Delta_3[4,53;6,06]$ ,  $\Delta_4[4,53;5,48]$ ,  $\Delta_5[4,89;5,48]$ ,  $\Delta_6[4,89;5,25]$ ,  $\Delta_7[4,89;5,11]$ ,  $\Delta_8[4,97;5,11]$ ,  $\Delta_9[4,97;5,06]$ ,  $\Delta_{10}[4,97;5,03]$ ,  $\Delta_{11}[4,99;5,03]$ .

В двенадцатом приближении интервал неопределённости сокращается до  $\Delta_{12}[4,99;5,01]$ .

В результате расчёта получаем оптимальные значения  $r^* = h^* = 5 \text{ дм}$  (табл. 6.7).

Таблица 6.7

$r$	4,99	5,00	5,00	5,01
$h = V/(\pi r^2)$	5,02	5,01	5,00	4,98
$A = \pi r^2 + 2V/r$	235,5811	235,5801	235,5800	235,5808

Для наглядности строим график (рис. 6.16).

**Метод чисел Фибоначчи.** Данный метод используется при решении задач с линейной и нелинейной целевыми функциями. Он имеет такую же последовательность исключения интервалов, что и метод золотого сечения. Отличие состоит в выборе начальных точек и в величине исключаемого интервала. Метод является оптимальным при заданном числе вычислений целевой функции.

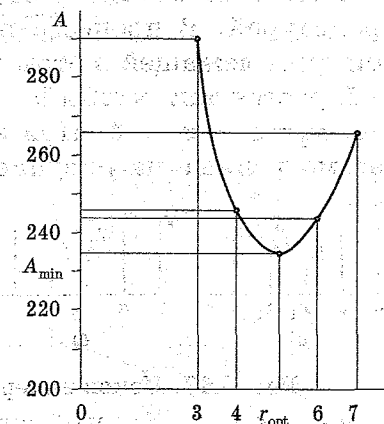


Рис. 6.16. График зависимости  $A = f(R)$

В этом методе при поиске применяется последовательность натуральных чисел, определяемая в форме

$$F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ при } n = 2, 3, \dots$$

которая называется числами Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...). Видно, что числа Фибоначчи быстро увеличиваются, что важно для ускорения поиска.

Находим положение первой и второй точек, которые находятся симметрично на расстоянии  $x_1$  и  $x_2$  от соответствующего конца начального интервала  $b - a$ :

$$x_{1,2} = a + \frac{(-1)^N \varepsilon + (b-a) F_{N-1}}{F_N}, \quad (6.5)$$

где  $F_n$  — числа Фибоначчи;

$N$  — число вычислений (итераций) функции;

$\varepsilon$  — заданная точность.

Как видно из формулы (6.5), для того чтобы получить начальную точку, необходимо заранее знать число вычислений функции, за которое будет в результате поиска получен оптимум с заданной точностью.

Поиск по методу Фибоначчи является итерационной процедурой. В процессе поиска интервала  $(a, x_2)$  с точкой, уже лежащей в этом интервале, следующая точка  $x_2$  выбирается так, чтобы  $b - x_1 = x_2 - a$  или  $x_1 - a = b - x_2$ , т. е.  $x_2 = a - x_1 + b$ . При этом возможны четыре случая, рассмотренные на рисунке 6.17.

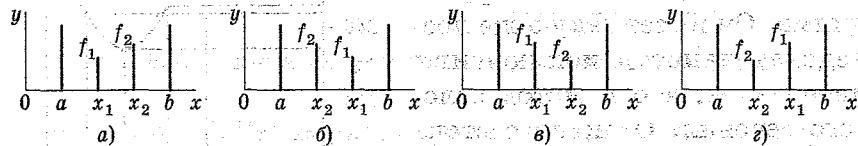


Рис. 6.17. Поиск интервала по методу Фибоначчи:

$a - x_1 < x_2; f_1 < f_2$ : новый интервал  $(a, x_2)$ , содержащий точку  $x_1$ ;

$b - x_1 > x_2; f_1 < f_2$ : новый интервал  $(x_2, b)$ , содержащий точку  $x_1$ ;

$a - x_1 < x_2; f_1 > f_2$ : новый интервал  $(x_1, b)$ , содержащий точку  $x_2$ ;

$a - x_1 > x_2; f_1 > f_2$ : новый интервал  $(a, x_1)$ , содержащий точку  $x_2$ .

В приведённом ниже алгоритме (рис. 6.18) отражены указанные случаи.

**Шаг 1.** Задаются начальными границами отрезка  $a, b$ , точностью вычислений  $\varepsilon$  и числом итераций  $N$ ; рассчитывают начальные точки деления  $x_1, x_2$  по формуле (6.5) и значения в них целевой функции:  $y_1 = f(x_1); y_2 = f(x_2)$ .

**Шаг 2.** Принять  $k = k + 1$ .  
 Если  $y_1 < y_2$ , то  $b = x_2, x_2 = x_1, x_1 = a + (b - x_2)$ .  
 Иначе  $a = x_1, x_1 = x_2, x_2 = b - (x_1 - a)$ .  
**Шаг 3.** Если  $k = N$ , то  $x^* = x_1 = x_2$  и останов.  
 Иначе возврат к шагу 2.

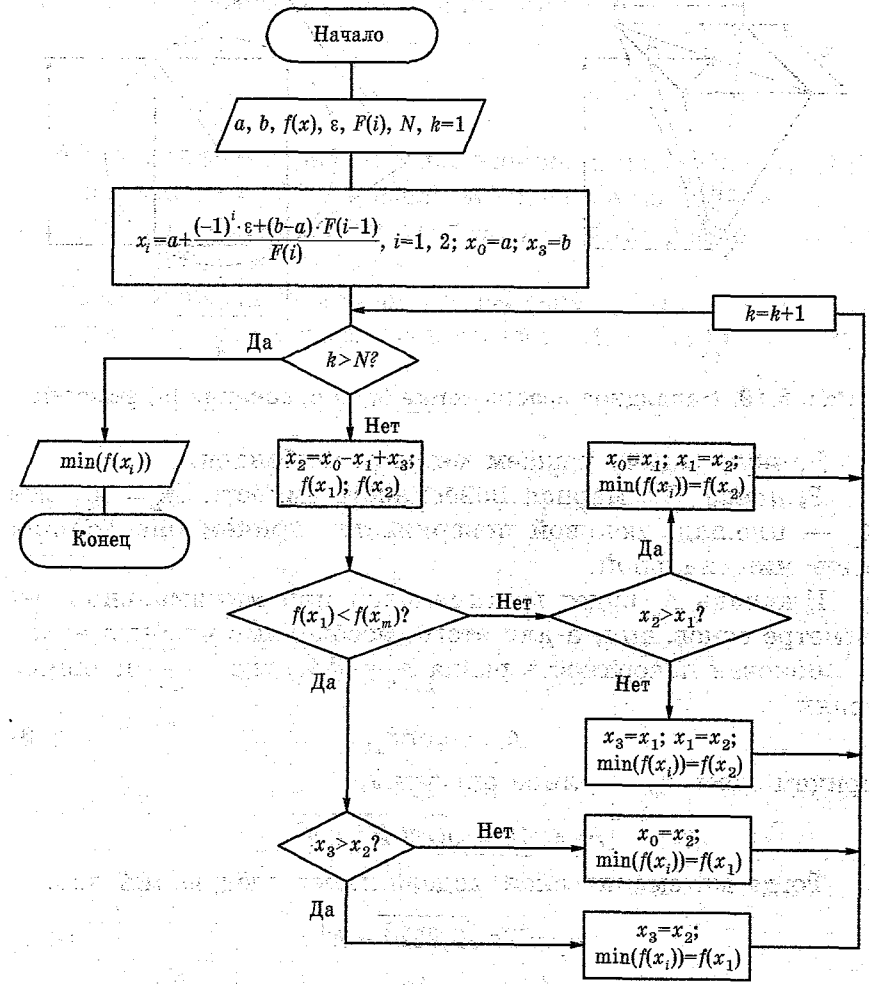


Рис. 6.18. Схема алгоритма метода Фибоначчи

**Пример 6.5.** Завод планирует выпускать ёмкости объёмом  $V = 125 \text{ дм}^3$  в форме поверхности прямой четырёхгранной пирамиды без крышки. Необходимо определить её параметры  $a$ ,  $b$  и  $h$ , при которых расход листового материала будет минимальным (рис. 6.19).

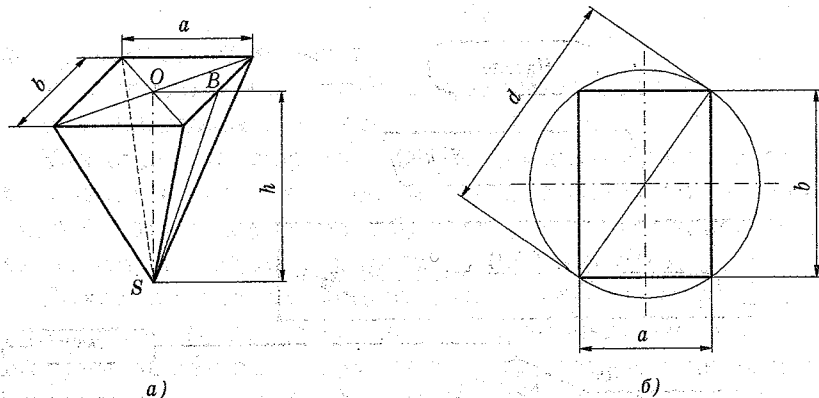


Рис. 6.19. Наглядное изображение (а) и основание (б) ёмкости

Данную задачу решаем методом Фибоначчи.

**Решение.** Суммарная поверхность ёмкости  $A_2 = A_2$ , где  $A_2$  — площадь боковой поверхности, причём она должна быть минимальной.

Площадь  $A_2$  будет минимальной при минимальном периметре основания, а для этого, необходимо чтобы  $a = b$ .

Боковая поверхность равна  $A_2 = 4A_1$ , где  $A_1$  — площадь грани,

$$A_1 = 0,5ah_a, \quad (6.6)$$

причём здесь  $h_a$  — длина апофемы,

$$h_a = SB = \sqrt{0,25a^2 + h^2}.$$

Тогда математическая модель имеет следующий вид:

$$A_2 = 2a\sqrt{0,25a^2 + h^2}, \quad (6.7)$$

$$V = \frac{a^2h}{3}. \quad (6.8)$$

Поскольку в математическую модель входит ограничение в виде равенства, можно снизить размерность задачи.

Из выражения (6.8) имеем

$$h = \frac{3V}{a^2}$$

и с учётом формулы (6.7) можно записать

$$A_2 = 2a\sqrt{0,25a^2 + \left(\frac{3V}{a^2}\right)^2} = \min. \quad (6.9)$$

Принимаем интервал неопределённости параметра  $a$  [3;10]. С точностью  $\varepsilon_x = 10^{-4}$  определяем значение целевой функции  $A_2 = f(a)$  в промежуточных точках, результат расчёта сводим в таблицу 6.8.

Таким образом, площадь минимальна при  $a^* = 8,1064$ . Для наглядности строим график зависимости  $A_2 = f(a)$  (рис. 6.20).

Таблица 6.8

$F_1$	$a_{\min}$	$a_{\max}$	$a_2$	$A_2$	$a_1$	$A_1$
1597	3	10	8,9787	116,0886	5,6738	136,0507
987	5,6738	10	7,3262	115,5892	7,3262	115,5892
610	7,3262	10	8,3475	113,7011	8,3475	113,7011
377	7,3262	8,9787	8,3475	113,7011	7,9574	113,5467
233	7,3262	8,3475	7,9574	113,5467	7,7163	113,9841
144	7,9574	8,3475	8,1985	113,5188	8,1064	113,4819
89	8,1064	8,1985	8,1634	113,4979	8,1415	113,4891
55	8,0495	8,1985	8,1415	113,4891	8,1064	113,4819
34	7,7163	8,3475	8,1064	113,4819	7,9574	113,5467
21	7,9574	8,1985	8,1064	113,4819	8,0495	113,4884
13	8,1064	8,1152	8,1108	113,4824	8,1108	113,4824
8	8,1064	8,1196	8,1152	113,4829	8,1108	113,4824
5	8,1064	8,1284	8,1196	113,4836	8,1152	113,4829
3	8,1064	8,1415	8,1284	113,4854	8,1196	113,4836
2	8,1064	8,1634	8,1415	113,4891	8,1284	113,4854
1	8,1108	8,1108				

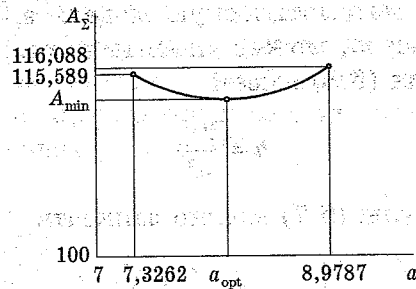


Рис. 6.20. График зависимости  $A_z = f(a)$

#### 6.4. Методы полиномиальной аппроксимации

**Метод квадратичной аппроксимации.** Простейшим вариантом полиномиальной интерполяции является квадратичная аппроксимация, которая основана на том факте, что функция, принимающая минимальное значение во внутренней точке интервала, должна быть, по крайней мере, квадратичной. Если же функция линейная, то её оптимальное значение может достигаться только в одной из двух граничных точек интервала. Таким образом, при реализации метода оценивания с использованием квадратичной аппроксимации предполагается, что в ограниченном интервале можно аппроксимировать функцию квадратичным полиномом, а затем использовать построенную аппроксимирующую схему для оценивания координаты точки истинного минимума функции.

Если задана последовательность точек  $x_1, x_2, x_3$  и известны соответствующие этим точкам значения функции  $f_1, f_2, f_3$ , то можно определить постоянные величины  $a_0, a_1$  и  $V$  таким образом, что значения квадратичной функции

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

совпадут со значениями  $f(x)$  в трёх указанных точках. Перейдём к вычислению  $q(x)$  в каждой из трёх заданных точек. Прежде всего, так как

$$f_1 = f(x_1) = q(x_1) = a_0,$$

имеем

$$a_0 = f_1.$$

Далее, поскольку  $f_2 = f(x_2) = q(x_2) = f_1 + a_1(x_2 - x_1)$ , получаем

$$a_1 = \frac{(f_2 - f_1)}{(x_2 - x_1)}. \quad (6.10)$$

Наконец, при  $x = x_3$

$$f_3 = f(x_3) = q(x_3) = f_1 + \frac{(f_2 - f_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)} + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Разрешая последнее уравнение относительно  $a_2$ , получаем

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left( \frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right). \quad (6.11)$$

Таким образом, по трём заданным точкам и соответствующим значениям функции можно оценить параметры  $a_0, a_1$  и  $a_2$  аппроксимирующего квадратичного полинома с помощью приведённых выше формул.

Если точность аппроксимации исследуемой функции в интервале от  $x_1$  до  $x_2$  с помощью квадратичного полинома оказывается достаточно высокой, то в соответствии с предложенной стратегией поиска построенный полином можно использовать для оценивания координаты точки оптимума. Стационарные точки функции одной переменной определяются путём приравнивания к нулю её первой производной и последующего нахождения корней полученного таким образом уравнения. В данном случае из уравнения

$$\frac{dq}{dx} = a_1 + a_2(x - x_2) + a_2(x - x_1) = 0$$

можно получить

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2 \cdot a_2}. \quad (6.12)$$

Поскольку функция  $f(x)$  на рассматриваемом интервале обладает свойством унимодальности, а аппроксимирующий квадратичный полином также является унимодальной функцией, то можно ожидать, что величина  $\bar{x}$  окажется приемле-

мой оценкой координаты точки истинного оптимума  $x^*$ . Схема алгоритма получения оптимальной точки (рис. 6.21) можно описать следующим образом:

Шаг 1. Положить  $x_1 = a$ ,  $x_3 = b$ ,  $x_2 = (x_3 - x_1)/2$ .

Шаг 2. Вычислить  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ ,  $f(x_3)$ .

Шаг 3. По трём точкам  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  вычислить параметры  $a_1$ ,  $a_2$ , используя формулы (6.10) и (6.11), т. е.

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}; \quad a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left( \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right).$$

Шаг 4. Вычислить оптимум  $\bar{x}$  с помощью параметров  $a_1$  и  $a_2$ , используя формулу (6.12).

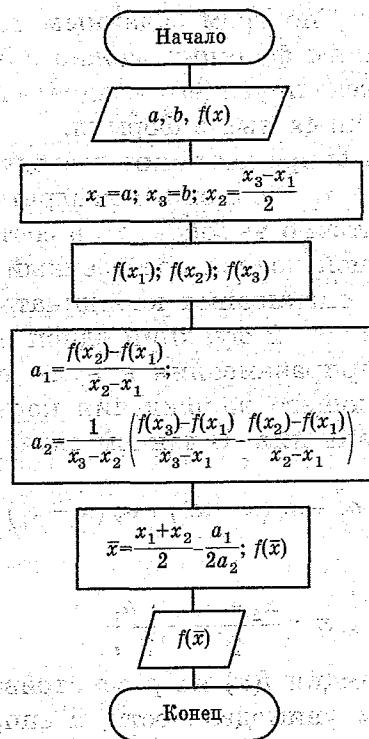


Рис. 6.21. Схема алгоритма метода квадратичной аппроксимации

Пример 6.6. Завод планирует выпускать ёмкости объёмом  $V = 125 \text{ дм}^3$  в форме прямого кругового конуса без крышки (рис. 6.22). Необходимо определить высоту  $h$  и радиус  $r$  основания, при которых расход листового материала будет минимальным.

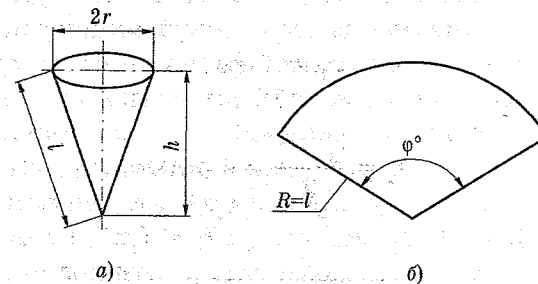


Рис. 6.22. Наглядное изображение (а) и развёртка (б) конуса

Решение. Боковая поверхность конуса

$$A = \pi r l, \quad (6.13)$$

где  $l$  — длина образующей, равная

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}. \quad (6.14)$$

Как видно, варьируемых параметра два:  $r$  и  $h$ . Для уменьшения размерности задачи исключим  $r$ , воспользовавшись формулой объёма конуса

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}, \quad (6.15)$$

откуда

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}. \quad (6.16)$$

Подставив выражение (6.16) в формулу (6.13), с учётом (6.14) получим целевую функцию. Это позволяет сформулировать задачу в стандартной форме:

— проектный параметр  $h$ ;

— целевая функция;

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + \left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2} \quad (6.17)$$

Шаг 1.

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \text{ дм}, \\ r_3 &= 10 \text{ дм}, \\ r_2 &= \frac{r_3 - r_1}{2} = 4,5 \text{ дм}. \end{aligned}$$

Шаг 2.

$$A_1 = 3,14 \cdot 1 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{3 \cdot 125}{3,14 \cdot 1^2}\right)^2} = 375,01 \text{ дм}^2;$$

$$A_2 = 3,14 \cdot 10 \cdot \sqrt{10^2 + \left(\frac{3 \cdot 125}{3,14 \cdot 10^2}\right)^2} = 316,23 \text{ дм}^2;$$

$$A_3 = 3,14 \cdot 4,5 \cdot \sqrt{4,5^2 + \left(\frac{3 \cdot 125}{3,14 \cdot 4,5^2}\right)^2} = 104,82 \text{ дм}^2.$$

Шаг 3.

$$a_1 = \frac{316,23 - 375,01}{10 - 1} = -6,53;$$

$$a_2 = \frac{1}{10 - 1} \left( \frac{104,82 - 375,01}{4,5 - 1} - \frac{316,23 - 375,01}{10 - 1} \right) = -7,85.$$

Шаг 4.

$$r_{\text{опт}} = \frac{1 + 10 \cdot (-6,53)}{2 \cdot (-7,85)} = 5,08 \text{ дм};$$

$$A_{\text{min}} = 3,14 \cdot 5,08 \cdot \sqrt{5,08^2 + \left(\frac{3 \cdot 125}{3,14 \cdot 5,08^2}\right)^2} = 109,61 \text{ дм}^2.$$

Таким образом, площадь минимальна при  $r^* = 5,08$  дм.

**Метод Пауэлла.** Этот метод [8] основан на последовательном применении процедуры оценивания с использованием квадратичной аппроксимации. Схему алгоритма (рис. 6.23) можно описать следующим образом. Пусть  $x_1$  — начальная точка,  $\Delta x$  — выбранная величина шага по оси  $x$ .

Шаг 1. Вычислить  $x_2 = x_1 + \Delta x$ .

Шаг 2. Вычислить  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

Шаг 3. Если  $f(x_1) > f(x_2)$ , положить  $x_3 = x_1 + 2\Delta x$ . Если  $f(x_1) < f(x_2)$ , положить  $x_3 = x_1 - \Delta x$ .

Шаг 4. Вычислить  $f(x_3)$  и найти  $f_{\text{min}} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $x_{\text{min}}$  — точка  $x_i$ , которая соответствует  $f_{\text{min}}$ .

Шаг 5. По трём точкам  $x_1, x_2, x_3$  вычислить  $\bar{x}$ , используя формулы (6.10), (6.11), (6.12).

Шаг 6. Проверка на окончание поиска. Является ли разность  $f_{\text{min}} - f(\bar{x})$ , т.е.  $\min(f(x_2) - f(\bar{x}))$ , достаточно малой? Является ли разность  $x_{\text{min}} - \bar{x}$  достаточно малой? Если оба условия выполняются, закончить поиск. В противном случае перейти к шагу 7.

Шаг 7. Выбрать «наилучшую» точку ( $x_{\text{min}}$  или  $\bar{x}$ ) и две точки по обе стороны от неё. Обозначить эти точки в естественном порядке и перейти к шагу 4.

При первой реализации шага 5 границы интервала, содержащего точку минимума, не обязательно устанавливаются. При этом полученная точка  $\bar{x}$  может находиться за точкой  $x_3$ . Для того чтобы исключить возможность слишком большого экстраполяционного перемещения, следует провести после шага 5 дополнительную проверку и в случае, когда точка  $\bar{x}$  находится слишком далеко от  $x_3$ , заменить  $\bar{x}$  точкой, координата которой вычисляется с учётом заранее установленной длины шага.



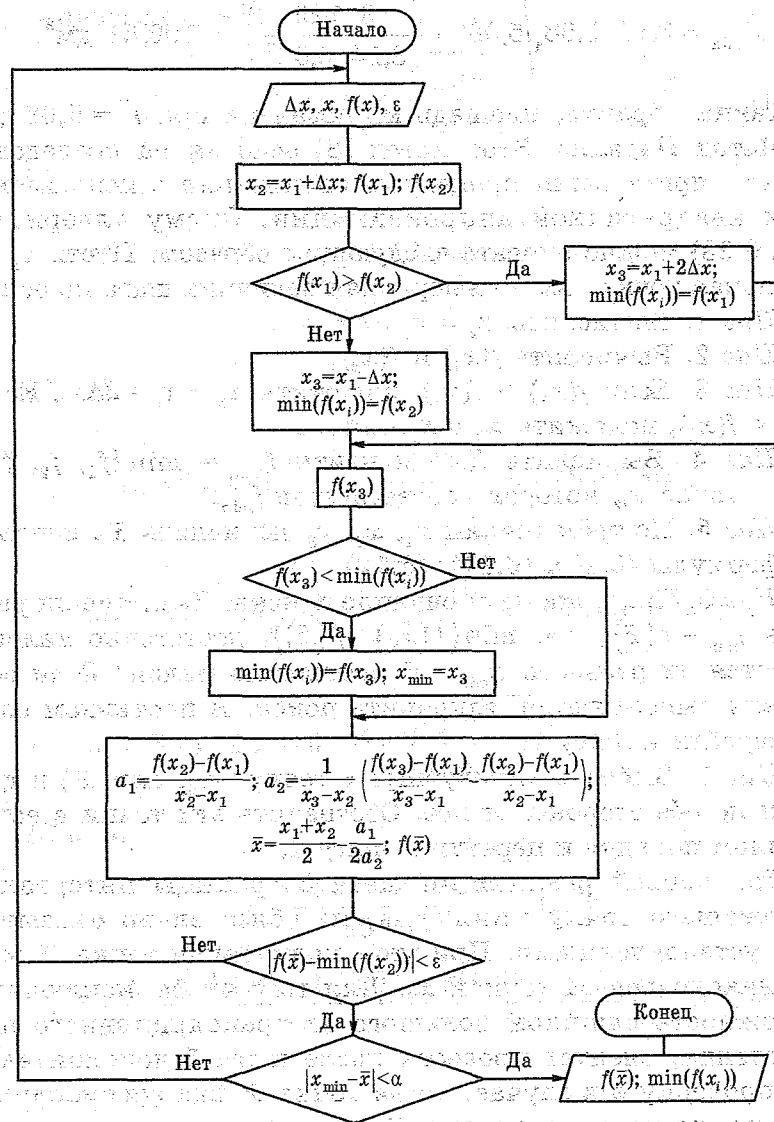


Рис. 6.23. Схема алгоритма метода Пауэлла

**Пример 6.7.** Решим предыдущую задачу методом Пауэлла. В качестве начальных условий принимаем  $r_1 = 1$  дм,  $\Delta r = 3$  дм.

**Шаг 1.**  $r_2 = 1 + 3 = 4$  дм.

**Шаг 2.**  $A_1 = 3,14 \cdot 1 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{3 \cdot 125}{3,14 \cdot 1^2}\right)^2} = 375,01$  дм<sup>2</sup>;

$A_2 = 3,14 \cdot 4 \cdot \sqrt{4^2 + \left(\frac{3 \cdot 125}{3,14 \cdot 4^2}\right)^2} = 106,36$  дм<sup>2</sup>.

**Шаг 3.** Так как  $A_1 > A_2$ , то  $r_3 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$  дм.

Далее решение идёт, как в методе квадратичной аппроксимации.

### 6.5. Метод наименьших квадратов

Если некоторая физическая величина зависит от другой величины, то эту зависимость можно исследовать, измеряя  $y$  при различных значениях  $x$ . В результате измерений получается ряд значений:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n;$$

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n.$$

По данным такого эксперимента можно построить график зависимости  $y = f(x)$ . Полученная кривая даёт возможность судить о виде функции  $f(x)$ . Однако постоянные коэффициенты, которые входят в эту функцию, остаются неизвестными. Определить их позволяет метод наименьших квадратов. Экспериментальные точки, как правило, не ложатся точно на кривую. Метод наименьших квадратов требует, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от кривой, т. е.  $[y_i - f(x_i)]^2$ , была наименьшей.

На практике этот метод наиболее часто (и наиболее просто) используется в случае линейной зависимости, т. е. когда

$$y = kx \text{ или } y = a + bx.$$

Линейная зависимость очень широко распространена в физике. И даже когда зависимость нелинейная, обычно стараются строить график так, чтобы получить прямую линию. Например, если предполагают, что показатель преломления стекла  $n$  связан с длиной  $\lambda$  световой волны соотношением  $n = a + b/\lambda^2$ , то на графике строят зависимость  $n$  от  $\lambda^{-2}$ .

Рассмотрим зависимость  $y = kx$  (прямая, проходящая через начало координат). Составим величину  $\varphi$  — сумму квадратов отклонений наших точек от прямой

$$\varphi = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2.$$

Величина  $\varphi$  всегда положительна и оказывается тем меньше, чем ближе к прямой лежат наши точки. Метод наименьших квадратов утверждает, что для  $k$  следует выбирать такое значение, при котором  $\varphi$  имеет минимум

или

$$\frac{d\varphi}{dk} = -2 \sum x_i (y_i - kx_i) = 0$$

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}. \quad (6.18)$$

Вычисление показывает, что среднеквадратичная ошибка определения величины  $k$  равна при этом

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \cdot \left( \frac{\sum (y_i - kx_i)^2}{\sum x_i^2} \right)}, \quad (6.19)$$

где  $n$  — число измерений.

Рассмотрим теперь несколько более сложный случай, когда точки должны удовлетворить формуле  $y = a + bx$ .

Задача состоит в том, чтобы по имеющемуся набору значений  $x_i, y_i$  найти наилучшие значения  $a$  и  $b$ .

Ещё раз составим квадратичную форму  $\varphi$ , равную сумме квадратов отклонений точек  $x_i, y_i$  от прямой

$$\varphi = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2,$$

и найдём значения  $a$  и  $b$ , при которых  $\varphi$  имеет минимум

$$\frac{d\varphi}{da} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0;$$

$$\frac{d\varphi}{db} = -2 \sum x_i (y_i - a - bx_i) = 0.$$

Совместное решение этих уравнений даёт

$$b = \frac{\sum [(x_i - \bar{x}) y_i]}{\sum (x_i - \bar{x})^2}; \quad (6.20)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (6.21)$$

Среднеквадратичные ошибки определения  $a$  и  $b$  равны

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum (y_i - bx_i - a)^2}{(n-2) \sum (x_i - \bar{x})^2}}; \quad (6.22)$$

$$S_a = \sqrt{\left( \frac{\sum (y_i - bx_i - a)^2}{(n-2)} \right) \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)}. \quad (6.23)$$

При обработке результатов измерения этим методом удобно все данные сводить в таблицу, в которой предварительно подсчитываются все суммы, входящие в формулы (6.18)-(6.23). Формы этих таблиц приведены в рассматриваемых ниже примерах.

**Пример 6.8.** Исследовалось основное уравнение динамики вращательного движения  $\varepsilon = M/I$  (прямая, проходящая через начало координат). При различных значениях момента  $M$  измерялось угловое ускорение  $\varepsilon$  некоторого тела. Требуется определить момент инерции  $I$  этого тела. Результаты измерений момента силы и углового ускорения занесены во второй и третий столбцы таблицы 6.9.

Таблица 6.9

$n$	$M, \text{Н} \cdot \text{м}$	$\varepsilon, \text{рад} \cdot \text{с}^{-2}$	$M^2$	$M\varepsilon$	$\varepsilon - kM$	$(\varepsilon - kM)^2$
1	1,44	0,52	2,0736	0,7488	0,039432	0,001555
2	3,12	1,06	9,7344	3,3072	0,018768	0,000352
3	4,59	1,45	21,0681	6,6555	-0,08181	0,006693
4	5,90	1,92	34,81	11,328	-0,049	0,002401
5	7,45	2,56	55,5025	19,072	0,073725	0,005435
$\Sigma$	-	-	123,1886	41,1115	-	0,016436

По формуле (6.18) определяем

$$\frac{1}{I} = \frac{\sum M\varepsilon}{\sum M^2} = \frac{41,1115}{123,1886} = 0,3337 \text{ кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Отсюда  $I = 2,996 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Для определения среднеквадратичной ошибки воспользуемся формулой (6.19)

$$S_{(1/I)} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{\sum (y_i - kx_i)^2}{\sum x_i^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(5-1)} \cdot \frac{0,016436}{123,1886}} = 0,005775 \text{ кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

С учётом приведённых формул имеем

$$S_I = \bar{I} \sqrt{\left[ \frac{S_{(1/I)}}{(1/I)} \right]^2} = \bar{I} \cdot \frac{S_{(1/I)}}{(1/I)}, \quad (6.24)$$

$$S_I = (2,996 \cdot 0,005775) / 0,3337 = 0,05185 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Задавшись надёжностью  $P = 0,95$ , по таблице коэффициентов Стьюдента для  $n = 5$ , находим  $t = 2,78$  и определяем абсолютную ошибку

$$\Delta I = 2,78 \cdot 0,05185 = 0,1441 \approx 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Результаты запишем в виде:

$$I = (3,0 + 0,2) \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\% = \frac{0,2}{3,2} \cdot 100\% \approx 6\%.$$

**Пример 6.9.** Получена зависимость одной переменной  $b$  от другой переменной  $a$  в виде таблицы 6.10.

Таблица 6.10

$j$	1	2	3	4	5	6	...	$k$
$a_j$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	...	$a_k$
$b_j$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	...	$b_k$

Поставим задачу аппроксимировать табличную зависимость  $b$  от  $a$  аналитически в виде степенного полинома степени  $n$

$$b = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = \sum_{i=0}^n x_i a^i, \quad (6.25)$$

где  $x_i$  — неизвестные коэффициенты полинома (6.25), которые должны быть подобраны так, чтобы аналитическая зависимость  $b = f(a)$  в виде полинома (6.25) в некотором смысле наилучшим образом описывала табличную зависимость  $b_j$  от  $a_j$ .

В качестве критерия наилучшего приближения часто используется так называемый критерий наименьших квадратов. Словесная формулировка этого критерия такова: коэффициенты  $x_i$  полинома (6.25) должны быть подобраны так, чтобы сумма квадратов отклонений аналитической зависимости  $b = f(a)$  в виде полинома (6.25) от значений табличной зависимости по всем точкам  $j$  таблицы ( $j = \overline{1, k}$ ) была минимальной. Математически этот критерий приведёт к следующей целевой функции:

$$I = \sum_{j=1}^k [b_j - f(a_j)]^2 = \min.$$

Подставим сюда вместо  $f(a_j)$  зависимость в виде полинома (6.25) и получим

$$I = \sum_{j=1}^k \left[ b_j - \sum_{i=1}^n x_i a_j^i \right]^2 = \min. \quad (6.26)$$

Полученная по критерию наименьших квадратов целевая функция (6.26) приводит сформулированную задачу к классу линейно-квадратичных задач, целевая функция которых описывается функциями вида (6.21).

Покажем, что решение задачи методом производных приводит к необходимости решения системы из  $n$  линейных уравнений.

При  $n = 2$  целевая функция (6.26) примет вид

$$I = \sum_{j=1}^k (b_j - x_0 - x_1 a_j - x_2 a_j^2)^2 = \min.$$

Неизвестными здесь являются коэффициенты полинома  $x_0$ ,  $x_1$  и  $x_2$ . Возьмём три частных производные

$$\frac{dI}{dx_i}, \quad i = 0, 1, 2$$

и приравняем их нулю:

$$\frac{dI}{dx_0} = 2 \sum_{j=1}^k (b_j - x_0 - x_1 a_j - x_2 a_j^2) \cdot (-1) = 0;$$

$$\frac{dI}{dx_1} = 2 \sum_{j=1}^k (b_j - x_0 - x_1 a_j - x_2 a_j^2) \cdot (-a_j) = 0;$$

$$\frac{dI}{dx_2} = 2 \sum_{j=1}^k (b_j - x_0 - x_1 a_j - x_2 a_j^2) \cdot (-a_j^2) = 0.$$

Разделим левые и правые части уравнений на  $-2$ , раскроем скобки и получим следующую систему линейных уравнений:

$$x_0 k + x_1 \sum_{j=1}^k a_j + x_2 \sum_{j=1}^k a_j^2 = \sum_{j=1}^k b_j;$$

$$x_0 \sum_{j=1}^k a_j + x_1 \sum_{j=1}^k a_j^2 + x_2 \sum_{j=1}^k a_j^3 = \sum_{j=1}^k b_j a_j;$$

$$x_0 \sum_{j=1}^k a_j^2 + x_1 \sum_{j=1}^k a_j^3 + x_2 \sum_{j=1}^k a_j^4 = \sum_{j=1}^k b_j a_j^2.$$

Эту систему линейных уравнений относительно неизвестных  $x_i$  теперь можно интерпретировать для любого значения  $n$  и представить её в матричной форме

$$\bar{X} |A| = \bar{D}, \quad (6.27)$$

где  $\bar{X}$  — вектор-столбец размером  $1 \cdot (n+1)$  неизвестных коэффициентов  $x_i$ ,  $i = 0, n$ ;

$|A|$  — матрица размером  $(n+1) \cdot (n+1)$ , элементы которой определяются из данных таблицы 6.10 по формуле

$$a_{il} = \sum_{j=1}^k a_j^{(i+l)},$$

где  $i = \overline{0, n}$  — номер строки;

$l = \overline{0, n}$  — номер столбца;

$\bar{D}$  — вектор-столбец размером  $1 \cdot (n+1)$  известных величин

$$d_i = \sum_{j=1}^k b_j a_j^i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Решение системы (6.27) найдём в виде

$$\bar{X} = \bar{D} |A|^{-1}, \quad (6.28)$$

где  $|A|^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $|A|$ .

Решение (6.28) даёт искомые коэффициенты  $x_i$  для полинома (6.25), полученные по критерию наименьших квадратов.

**Пример 6.10.** Требуется спроектировать червячную передачу, обеспечивая максимально возможное значение КПД в червячном зацеплении.

**Решение.** При ведущем червяке КПД в червячном зацеплении определяется по известной формуле:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \rho')},$$

где  $\gamma$  — угол подъема линии витка червяка на начальном цилиндре;

$\rho'$  — приведённый угол трения, равный

$$\rho' = \operatorname{arctg} f',$$

здесь  $f'$  — приведённый коэффициент трения, который зависит от скорости скольжения  $V_s$ , состояния поверхности витков червяка, материала венца колеса и условий смазки (табл. 6.11).

Таблица 6.11

$V_s$ , м/с	1	2	3	4	5
$f'$	0,045...0,050	0,035...0,045	0,028...0,035	0,023...0,03	0,018...0,026
$\rho'$	2°30'...3°10'	2°00'...2°30'	1°30'...2°00'	1°20'...1°40'	1°00'...1°30'

Меньшие значения  $f'$  и  $\rho'$  соответствуют твёрдым шлифованным и полированным червякам, работающим в условиях обильной смазки.

Если принять в качестве варьируемого проектного параметра  $x_1 = \gamma_w = \gamma$ , то будем иметь

$$F(x) = \eta(x) = \frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg}(x_1 + \rho')} \rightarrow \max. \quad (6.29)$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемая задача (6.29) относится к задачам одномерного поиска. Определим оптимальное значение угла подъема винтовой линии червяка, при котором обеспечивается максимум КПД.

Задачу решаем классическим методом

$$\frac{d\eta}{d\gamma} = \frac{\operatorname{tg}(\gamma + \rho')/\cos^2 \gamma - \operatorname{tg} \gamma/\cos^2(\gamma + \rho')}{\operatorname{tg}^2(\gamma + \rho')} = 0. \quad (6.30)$$

Следовательно, числитель выражения (6.30) должен быть равен нулю. Тогда

$$\sin(\gamma + \rho') \cos(\gamma + \rho') = \sin \gamma \cos \gamma.$$

Откуда

$$\sin 2(\gamma + \rho') = \sin 2\gamma. \quad (6.31)$$

Уравнение (6.31) будет выполняться при условии, что угол  $2\gamma$  находится в первой четверти, а угол  $2(\gamma + \rho')$  — в первой и во второй четвертях (рис. 6.24).

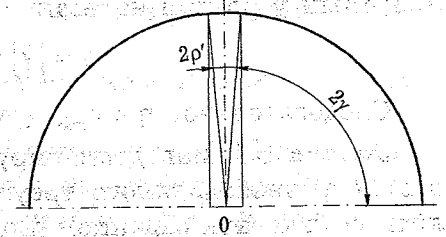


Рис. 6.24. Расчётная схема

Из рисунка следует, что

$$2\gamma = 0,5\pi - \rho'.$$

Окончательно имеем

$$\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho'}{2}. \quad (6.32)$$

На рисунке 6.25 представлены графики зависимости

$$\eta = \eta(\gamma)$$

при фиксированном значении  $f'$  и, следовательно,  $\rho'$ .

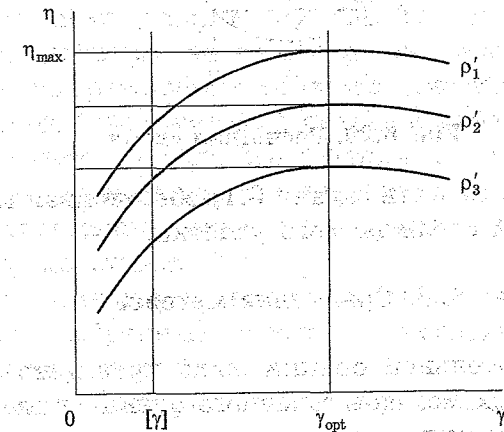


Рис. 6.25. Графики зависимости  $\eta = \eta(\gamma, \rho')$

Максимум целевой функции соответствует оптимальному значению угла  $\gamma$ , равному

$$\gamma^* = 45^\circ - \frac{\rho'}{2}.$$

Однако это значение теоретическое. Практически реализуемый угол при нарезании червяка

$$\gamma = [\gamma] = 27^\circ.$$

Следовательно,  $\eta < \eta_{\max}$  (рис. 6.25).

**Задача 6.1.** Завод планирует оградить забором участок в виде равнобедренного треугольника (рис. 6.26). Определить угол  $\alpha$  при заданном диаметре  $d$  описанной окружности, обеспечивая минимальный периметр, т. е. минимальный расход материала.

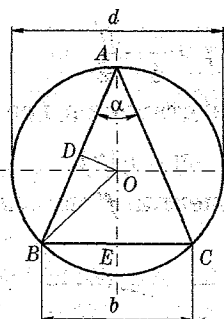


Рис. 6.26. Расчётная схема

**Задача 6.2.** Решить задачу 6.1, обеспечивая максимальную площадь  $A$  ограждаемого участка.

### 6.6. Сравнение методов

Для сравнительной оценки было проведено исследование [11] четырёх методов точечного оценивания, а именно:

- средней точки;
- Пауэлла;

— поиска с использованием кубической или квадратичной аппроксимации;

— золотого сечения как наилучшего из интервальных методов.

Эффективность методов оценивались по трём характеристикам:

- время, затраченное на получение решения;
- точность решения;
- чувствительность к изменениям параметра сходимости.

Результаты численных экспериментов [11] не подтверждают преимущества методов с использованием производных и кубической аппроксимации или интервального метода над остальными методами. Если для вычисления значений целевой функции требуется значительное машинное время, то предпочтительнее использовать стратегию поиска, основанную на модификации метода Пауэлла. Если необходимо получить решение с очень высокой степенью точности, то лучшими оказываются методы поиска на основе полиномиальной аппроксимации. С другой стороны, известно, что при исследовании мультимодальных или быстро изменяющихся функций метод Пауэлла сходится значительно медленнее, чем интервальные методы. Таким образом, если очень важно добиться надёжной работы алгоритма, то целесообразно выбрать метод золотого сечения. Поэтому поисковые методы типа метода Пауэлла следует использовать совместно с методом золотого сечения, переход к алгоритму которого осуществляется в тех случаях, когда реализация соответствующих итераций на ЭВМ связана с определёнными трудностями.

Исследования также показали, что чувствительность всех четырёх выбранных методов к изменениям параметра сходимости минимальна.

**Заключение.** Материал данной главы знакомит пользователя со структурой алгоритмов одномерного поиска и примерами решения задач оптимизации с помощью этих мето-

дов. Заметим, что задачи двумерного поиска, рассматриваемые здесь, могут быть преобразованы в одномерные. Методика такого преобразования и решения задач изложены в п. 7.2.

#### Вопросы для самопроверки

1. Что такое метод одномерного поиска?
2. Назовите классические методы оптимизации.
3. Какие методы оптимизации относятся к интервальным?
4. Каков алгоритм методов общего поиска, деления отрезка пополам, дихотомии золотого сечения?
5. Раскройте сущность методов квадратичной аппроксимации и Пауэлла.

## 7. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОГО ПОИСКА

В данной главе рассматривается структура алгоритмов многомерного поиска, приводятся примеры решения задач оптимизации с помощью этих алгоритмов.

### Основные понятия и определения

**Метод нулевого порядка** — метод, в котором для определения направления поиска и величины шага используется только значение целевой функции.

**Метод первого порядка или градиентный метод** — метод, в котором для определения направления поиска и величины шага используются значения первых производных целевой функции и определяется её градиент.

**Метод второго порядка или метод Ньютона** — метод, в котором для определения направления поиска и величины шага используются значения вторых производных целевой функции.

### 7.1. Классификация методов многомерного поиска

В настоящее время разработано множество численных методов для задач как безусловной, так и условной оптимизации. Естественным является стремление выбрать для решения конкретной задачи наилучший метод, позволяющий за наименьшее время использования ЭВМ получить решение с заданной точностью.

Качество численного метода характеризуется многими факторами: скоростью сходимости, временем выполнения одной итерации, объёмом памяти ЭВМ, необходимым для реализации метода, классом решаемых задач и т.д. Решаемые задачи также весьма разнообразны: они могут иметь высокую и малую размерность, быть унимодальными (обладающими одним экстремумом) и многоэкстремальными и т.д. Один и тот же метод, эффективный для решения за-

дач одного типа, может оказаться совершенно неприемлемым для задач другого типа. Очевидно, что разумное сочетание разнообразных методов, учёт их свойств позволят с наибольшей эффективностью решать поставленные задачи. Многометодный способ решения весьма удобен в диалоговом режиме работы с ЭВМ. Для успешной работы в таком режиме очень полезно знать основные свойства, специфику методов оптимизации. Это обеспечивает способность правильно ориентироваться в различных ситуациях, возникающих в процессе расчётов, и наилучшим образом решить задачу.

Детерминированные алгоритмы безусловной минимизации делят на классы в зависимости от вида используемой информации (рис. 7.1). Если на каждой итерации используются лишь значения минимизируемых функций, то метод называется *методом нулевого порядка*. Если, кроме того, требуется вычисление первых производных минимизируемой функции, то имеют место методы *первого порядка*, при необходимости дополнительного вычисления вторых производных — *методы второго порядка*.

В методах *нулевого порядка* для определения направления спуска не требуется вычислять производные целевой функции. Направление минимизации в данном случае полностью определяется последовательными вычислениями значений функции. Следует отметить, что при решении задач безусловной минимизации методы первого и второго порядков обладают, как правило, более высокой скоростью сходимости, чем методы нулевого порядка. Однако на практике вычисление первых и вторых производных функции большого количества переменных весьма трудоёмко. В ряде случаев они не могут быть получены в виде аналитических функций.

Определение производных с помощью различных численных методов осуществляется с ошибками, которые могут ограничить применение таких методов. Кроме того, на практике встречаются задачи, решение которых возможно лишь с помощью методов нулевого порядка, например задачи минимизации функций с разрывными первыми производными.

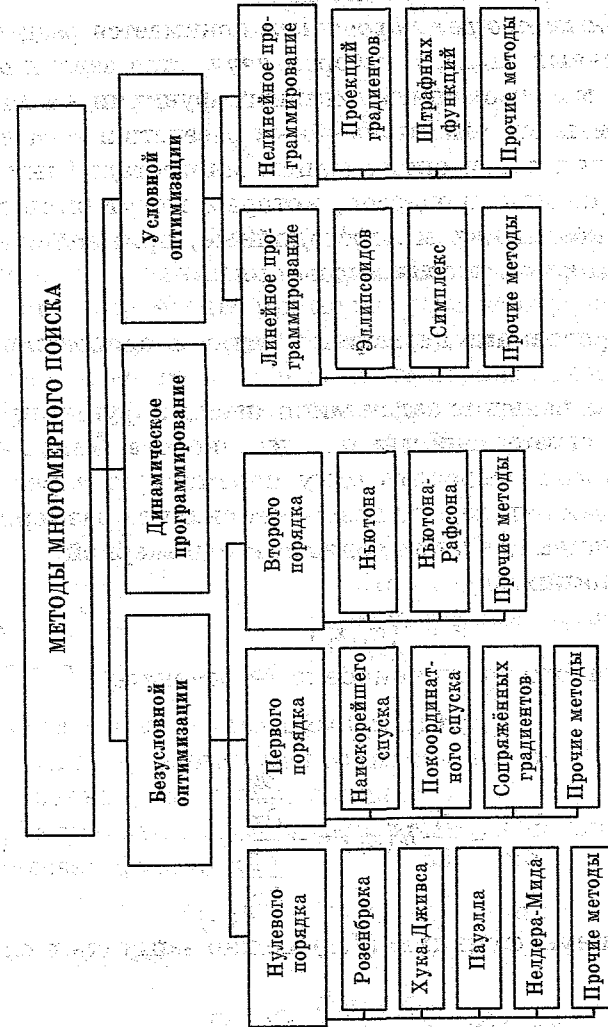


Рис. 7.1. Классификация методов многомерного поиска



Критерий оптимальности может быть задан не в явном виде, а системой уравнений. В этом случае аналитическое или численное определение производных становится очень сложным, а иногда невозможным.

Под *линейным программированием* понимается раздел теории экстремальных задач, в котором изучаются задачи минимизации (или максимизации) линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных равенств и неравенств.

Для решения задач оптимизации многостадийных процессов, а также для процессов, которые могут быть математически описаны как многостадийные, применяется *метод динамического программирования*.

## 7.2. Преобразование двумерных задач в одномерные

Рассмотрим решение задач минимизации функции *двух переменных* с ограничениями в виде равенств. Такое ограничение позволяет выразить одну переменную через другую, как показано ниже, что позволяет снизить размерность задачи, т. е. данная задача сводится к одномерной.

Задана функция

$$z = f(x_1, x_2), \quad (7.1)$$

где на  $x_1, x_2$  наложено ограничение — равенство

$$g(x_1, x_2) = 0.$$

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{d}{dx} h(x_1) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}}. \quad (7.2)$$

Тогда заданную функцию (7.1) можно записать в следующем виде:

$$z = f(x_1, \bar{x}_2) = f[x_1, h(x_2)],$$

т.е. как функцию одной переменной  $x_1$ . Необходимым условием минимума функции  $z$  будет соотношение

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \left( \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0.$$

Соотношения (7.1) и (7.2) могут быть решены с целью получения значений  $x_1^*, x_2^*$  в точке минимума.

Ниже приведены примеры, иллюстрирующие *преобразование двумерных задач в одномерные*, а также задачи для самостоятельного решения рассматриваемым методом.

**Пример 7.1.** Завод планирует оградить забором прямоугольный участок площадью  $A$ . Определить параметры  $x_1$

и  $x_2$  этого участка, при которых расход материала будет минимальным (рис. 7.2).



При заданной высоте  $h$  забора расход материала зависит от его периметра

Рис. 7.2. Расчётная схема

$$p = 2x_1 + 2x_2.$$

Тогда имеем в стандартном виде:

- цель — минимум периметра забора;
- варьируемые параметры  $x_1$  и  $x_2$ ;
- математическая модель имеет следующий вид: целевая функция

$$f(x) = p = 2(x_1 + x_2) \rightarrow \min; \quad (7.3)$$

ограничение

$$A = x_1 x_2. \quad (7.4)$$

**Решение.** Поскольку в математическую модель входит ограничение в виде равенства, можно снизить размерность задачи. Из выражения (7.4) имеем

$$x_2 = \frac{A}{x_1}$$

и с учётом формулы (7.3) можно записать

$$p = 2 \left( x_1 + \frac{A}{x_1} \right) \rightarrow \min. \quad (7.5)$$

Зададим значение исследуемого параметра  $x_1 = 1$  в начальной точке поиска  $i = 1$  и точность вычисления производной  $\varepsilon = 0,001$ . На первом шаге метода возьмём первую и вторую производные

$$f'(p) = \frac{dp}{dx_1} = 2 + \frac{-2A}{x_1^2};$$

$$f''(p) = \frac{4A}{x_1^3}.$$

Так как в начальной точке  $f'(p) > 0$ , то определяем следующее приближение по формуле (6.2). Результаты вычислений сводим в таблицу 7.1.

Из таблицы 7.1 видно, что на шаге  $i = 41$  первая производная становится меньше заданной степени точности  $f'(p) < \varepsilon$ , следовательно, мы определили оптимальные значения  $x_1$  и  $x_2$ .

Таблица 7.1

$i$	1	2	3	4	5	...	40	41
$x_{1i} = x_{1i-1}$								
$\frac{f'(p)}{f''(p)}$	1,0	1,48	1,93	2,361	2,749	...	4,998	4,9989
$x_{2i} = \frac{A}{x_1}$	25	16,89	12,91	10,587	9,091	...	5,001	5,001
$f'(x_2)$	-48,0	-20,82	-11,33	-6,968	-4,613	...	-0,001	-0,0008
$f''(x_2)$	100,0	45,65	26,67	17,936	13,226	...	4,002	4,0016

Решение по данному алгоритму можно проверить, приравняв первую производную к нулю:

$$\frac{dp}{dx_1} = 1 + \frac{-A}{x_1^2} = 0.$$

Отсюда находим оптимальные значения сторон

$$x_1^* = x_{1opt} = \sqrt{A};$$

$$x_2^* = x_{2opt} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}.$$

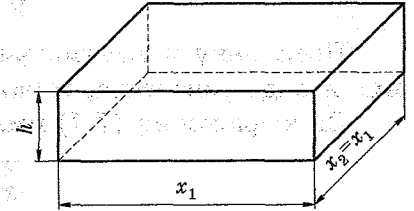


Рис. 7.3. Оптимальное решение

Следовательно, участок должен быть квадратным (рис. 7.3).

**Пример 7.2.** Завод планирует выпускать ёмкости объёмом  $V = 4 \text{ м}^3$  в форме прямой четырёхгранной призмы без крышки. Необходимо определить её параметры  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  (рис. 7.4), при которых расход листового материала будет минимальным.

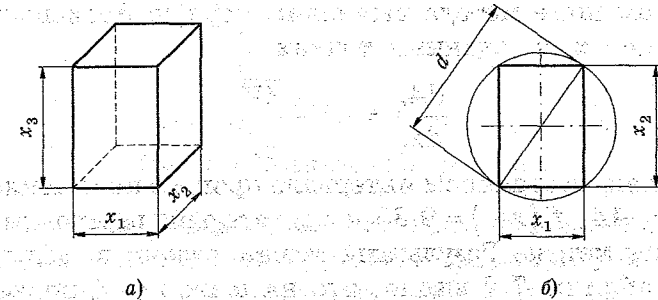


Рис. 7.4. Наглядное изображение (а) и основание (б) призмы

**Решение.** Суммарная поверхность ёмкости

$$A_2 = A_1 + A_2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — площади основания и боковой поверхности, причём они должны быть минимальны.

Площадь  $A_2$  будет минимальной при минимальном периметре основания, а для этого согласно-примеру 7.1, необходимо, чтобы

$$x_1 = x_2 = \sqrt{A_1}.$$

Тогда математическая модель имеет следующий вид:

$$A_2 = x_1^2 + 4x_1x_3; \quad (7.6)$$

$$V = x_1^2x_3. \quad (7.7)$$

Поскольку в математическую модель входит ограничение в виде равенства, можно снизить размерность задачи.

Из выражения (7.7) имеем

$$x_3 = \frac{V}{x_1^2}$$

и с учётом формулы (7.6) можно записать

$$A_2 = x_1^2 + \frac{4V}{x_1} \rightarrow \min. \quad (7.8)$$

Зададим интервал значений исследуемого параметра  $x_{1,1} = 1$ ,  $x_{1,2} = 5$  и точность вычисления производной  $\varepsilon = 0,001$ . На первом шаге метода вычислим первую производную по переменной  $x_1$  в заданных точках

$$\frac{dA_2}{dx_1} = 2x_1 - \frac{4V}{x_1^2}.$$

Так как на заданном интервале производная меняет знак  $f'(x_{1,1}) = -14$ ,  $f'(x_{1,2}) = 9,36$ , следовательно, переходим ко второму шагу метода. Результаты расчёта сводим в таблице 7.2.

Из таблицы 7.2 видно, что на шаге  $i = 4$  первая производная становится меньше заданной степени точности  $f'(p) < \varepsilon$ , следовательно, мы определили оптимальные значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .

Таблица 7.2

$i$	1	2	3	4
$x_1 = x_2$	1	5	$(x_{1,2} + x_{1,1})/2 = 3$	$(x_{1,3} + x_{1,1})/2 = 2$
$x_3$	4	0,16	0,44	1
$f'(x_{1,i})$	-14	9,36	4,22	0

Решение по данному алгоритму можно проверить, приравняв первую производную к нулю.

$$\frac{dA_2}{dx_1} = 2x_1 - \frac{4V}{x_1^2} = 0.$$

Отсюда

$$x_1^3 = \sqrt[3]{2V};$$

тогда

$$x_3 = \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{4}}.$$

Развёртка полной поверхности ёмкости представлена на рисунке 7.5.

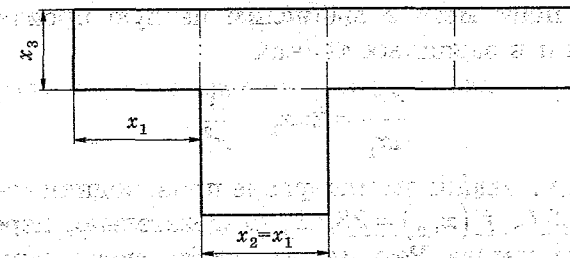


Рис. 7.5. Оптимальное решение

**Пример 7.3.** Завод планирует выпускать ёмкости в форме поверхности прямого кругового цилиндра без крышки объёмом  $V = 100 \text{ см}^3$ . Необходимо определить радиус  $x_1$  основания и высоту  $x_2$ , при которых расход листового материала будет минимальным.

**Решение.** Полная поверхность ёмкости без крышки

$$A = \pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2, \quad (7.9)$$

Как видно, варьируемых параметра два:  $x_1$  и  $x_2$ . Для уменьшения размерности задачи исключим  $x_1$ , воспользовавшись формулой объёма конуса

$$V = \pi x_1^2 x_2, \quad (7.10)$$

откуда

$$x_2 = \frac{V}{\pi x_1^2}. \quad (7.11)$$

Подставив выражение (7.11) в формулу (7.9), с учётом (7.10) получим целевую функцию. Это позволяет сформулировать задачу в стандартной форме:

- проектный параметр  $x_2$ ;
- целевая функция

$$A = \pi x_1^2 + \frac{2V}{x_1}. \quad (7.12)$$

Зададим интервал значений исследуемого параметра  $x_{1,1} = 3$ ,  $x_{1,2} = 5$  и точность вычисления производной  $\varepsilon = 0,001$ . На первом шаге метода вычислим первую производную по переменной  $a$  в заданных точках

$$\frac{dA}{dx_1} = 2\pi x_1 - \frac{2V}{x_1^2}.$$

Так как на заданном интервале производная меняет знак  $f'(x_{1,1}) = -3,37$ ,  $f'(x_{1,2}) = 23,41$ , следовательно, переходим ко второму шагу метода. Результаты расчёта сводим в таблице 7.3.

Из таблицы 7.3 видно, что при  $i = 6$  первая производная становится меньше заданной степени точности  $f'(p) < \varepsilon$ , следовательно, оптимальные значения параметров  $x_1^* = x_2^*$ .

Таблица 7.3

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_{1,i} = x_{1,i-1} \cdot \frac{f'(x_{1,i-1})}{f'(x_{1,i-1}) - f'(x_{1,1})}$	3	5	3,25	3,17	3,1694	3,1692
$f'(x_{1,i})$	-3,37	23,41	1,51	0,08	0,0046	0,0002
$x_2 = V/(\pi x_1^2)$	3,53	1,27	3,01	3,16	3,1687	3,1692

Решение по данному алгоритму можно проверить, приравняв первую производную к нулю

$$\frac{dA}{dx_1} = 0.$$

В результате получим

$$2\pi x_1 - \frac{2V}{x_1^2} = 0.$$

Откуда оптимальное значение радиуса и высоты

$$x_1^* = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

$$x_2^* = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Развёртка поверхности ёмкости представлена на рисунке 7.6.

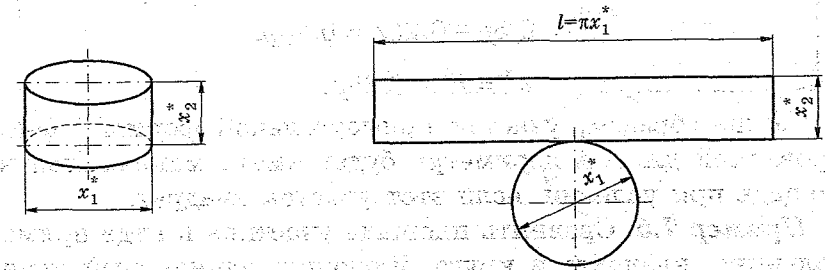


Рис. 7.6. Оптимальное решение

**Пример 7.4.** Необходимо выбрать такое соотношение между длиной и шириной садового участка в виде прямоугольника, чтобы при заданной фиксированной длине изгороди площадь участка была максимальной.

**Решение.** Обозначим длину участка  $a$ , ширину участка  $b$ . Длина изгороди (периметр) участка

$$p = 2(a + b) = \text{const}. \quad (7.13)$$

Площадь участка по условию задачи должна быть максимальной

$$A = ab \rightarrow \max. \quad (7.14)$$

Это целевая функция данной задачи. Выразим из зависимости (7.13) ширину через длину и периметр

$$b = 0,5p - a. \quad (7.15)$$

Подставим это выражение в (7.14) и получим

$$A = ab = 0,5pa - a^2 \rightarrow \max. \quad (7.16)$$

Исследуем (7.16) на экстремум по переменной  $a$ . Для этого возьмём производную

$$\frac{dA}{da} = 0,5p - 2a$$

и приравняем её к нулю. В результате получим

$$a^* = 0,25p.$$

Подставим это значение в выражение (7.15) и получим формулу для ширины

$$b^* = 0,5p - 0,25p = 0,25p,$$

т. е.  $a^* = b^* = 0,25p.$

Таким образом, участок прямоугольной формы с фиксированной длиной периметра будет иметь максимальную площадь при условии, если этот участок квадрат.

**Пример 7.5.** Сравнить площадь участков в виде прямоугольника, квадрата и круга, имеющих одинаковый периметр, т. е. длину изгороди.

**Решение.** Если не задавать ограничения на форму участка, то оптимальной формой, когда площадь максимальна при фиксированной длине изгороди, является окружность. Действительно, при заданной длине изгороди  $l = 4$  м площадь квадрата будет равна  $1 \text{ м}^2$ , а площадь круга с длиной окружности  $l = 2\pi r = 4$  м составит

$$A = \pi r^2 = \pi \left( \frac{l}{2\pi} \right)^2 = \frac{4}{\pi} \cong 1,27 \text{ м}^2.$$

**Пример 7.6.** Завод выпускает ёмкости цилиндрической формы различного назначения. Необходимо определить такое соотношение между высотой и диаметром цилиндра, чтобы при заданном его объёме стоимость материала на его изготовление была минимальной. Цена единицы площади материала, идущего на изготовление основания, равна  $C_0$ , а на изготовление боковых стенок, равна  $C_6$ .

**Решение.** Объём цилиндра диаметром основания  $d$  и высотой  $h$ , которые являются варьируемыми параметрами (рис. 7.7а)

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4} = \text{const.}$$

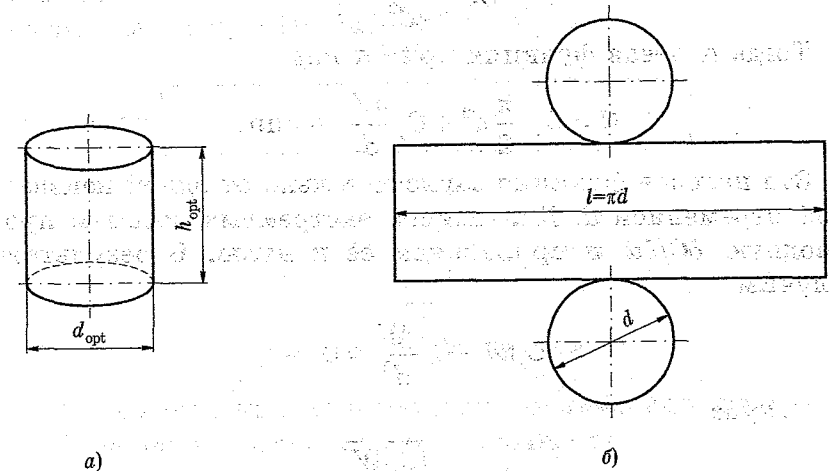


Рис. 7.7. Наглядное изображение (а) и развёртка (б) ёмкости

Площадь боковой поверхности цилиндра (рис. 7.7б)

$$A_6 = lh = \pi dh.$$

Для ёмкости с двумя основаниями (например, консервной банки)

$$A_0 = \pi \frac{d^2}{2}.$$

Тогда стоимость материала, идущего на изготовление ёмкости, будет равна

$$C = C_0 A_0 + C_6 A_6.$$

Подставим сюда выражение для  $A_6$  и  $A_0$  и получим выражение для целевой функции

$$C = C_0 \cdot \pi \frac{d^2}{2} + C_6 \cdot \pi d h \rightarrow \min.$$

Чтобы перейти в целевой функции от двух переменных  $d$  и  $h$  к одной, выразим высоту цилиндра  $h$  через его объём  $V$  и диаметр, в результате получим

$$h = \frac{4V}{\pi d^2}.$$

Тогда целевая функция примет вид

$$C = C_0 \cdot \frac{\pi}{2} d^2 + C_6 \frac{4V}{d} \rightarrow \min.$$

Эта целевая функция зависит только от одной неизвестной переменной  $d$ . Для поиска экстремума возьмём производную  $\partial C / \partial d$  и приравняем её к нулю. В результате получим

$$C_0 \pi d - C_6 \frac{4V}{d^2} = 0.$$

Откуда

$$d_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{C_6 4V}{C_0 \pi}}.$$

Оптимальную высоту ёмкости найдём из выражения

$$h_{\text{opt}} = \frac{4V}{\pi d_{\text{opt}}^2}.$$

Отношение  $d_{\text{opt}} / h_{\text{opt}}$

$$\frac{d_{\text{opt}}}{h_{\text{opt}}} = \frac{C_6}{C_0}.$$

При  $C_0 = C_6$  имеем

$$\frac{d^*}{h^*} = 1.$$

В соответствии с полученными результатами сделаем важный для практики изготовления подобных изделий вывод: у банок для красок это отношение выполняется, а у консервных банок, на изготовление которых расход материала огромен, не выполняется.

**Пример 7.7.** Четырёхгранный стержень получен механической обработкой из круглого диаметром  $d$  (рис. 7.8). Найти размеры поперечного сечения  $x_1 \times x_2$ , обеспечивая максимальную грузоподъёмность стержня при действии на него осевой силы  $F_a$ . Материал стержня Ст3 ГОСТ 380, предел текучести  $\sigma_T = 210$  МПа.

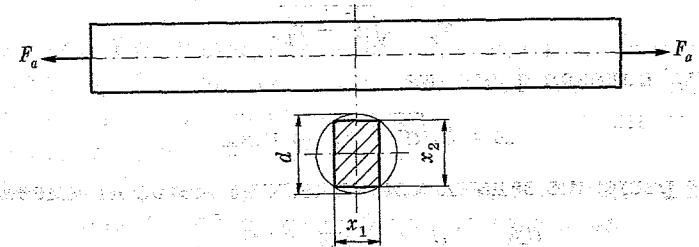


Рис. 7.8. Расчётная схема

Задачу решить всеми методами одномерного поиска.

Решение. Согласно условию прочности

$$\sigma_p = \frac{F_{\text{max}}}{A_{\text{max}}} \leq [\sigma_p]$$

максимальная грузоподъёмность стержня

$$[F]_{\text{max}} = A_{\text{max}} [\sigma_p], \quad (7.17)$$

где  $[\sigma_p]$  — допускаемое напряжение при растяжении

$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{[S]}$ , причём здесь  $[S]$  — допускаемый коэффициент безопасности.

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = x_1 \times x_2,$$

причём

$$x_1^2 + x_2^2 = d^2.$$

Математическая модель для рассматриваемого случая следующая:

целевая функция

$$A(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 \rightarrow \max; \quad (7.18)$$

ограничение

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - d^2 = 0. \quad (7.19)$$

Поскольку ограничение — равенство, можно понизить порядок задачи. Для этого выразим  $x_2$  через  $x_1$

$$x_2 = \sqrt{d^2 - x_1^2}.$$

Тогда целевая функция

$$A = b\sqrt{d^2 - x_1^2} \rightarrow \max.$$

При решении задачи классическим методом имеем

$$\frac{dA}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} (x_1 \sqrt{d^2 - x_1^2}) = 0.$$

Оптимальные значения параметров

$$x_1^* = x_2^* = d/\sqrt{2} \approx 0,707d.$$

При этом имеем

$$A_{\max} \approx 0,5d^2.$$

С учётом приведённых выражений можно записать

$$[F]_{\max} = 0,5d^2 \frac{\sigma_r}{[S]}.$$

Теперь задачу решаем методами одномерного поиска.

Результаты расчёта сводим в таблицу 7.4 при  $d = 10$  мм и в соответствии с ними строим график (рис. 7.9).

Таблица 7.4

$x_1$	3	4	5	6	7,07	8
$x_2$	9,5	9,2	8,7	8	7,07	6
$A$	28,6	36,8	43,5	48	50	48

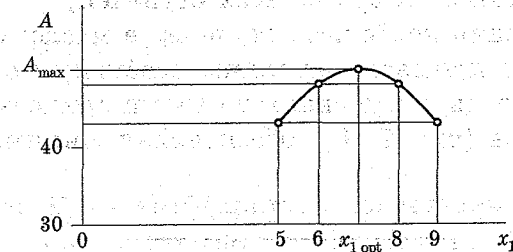


Рис. 7.9. График зависимости  $A = f(x_1)$

**Пример 7.8.** Четырёхгранный стержень получен механической обработкой из круглого диаметром  $d$  (рис. 7.8). Найти размеры поперечного сечения  $x_1 \times x_2$ , обеспечивая минимум станочного времени.

*Решение.* Станочное время зависит от объёма удаляемого металла, который должен быть минимальным

$$\Delta A \rightarrow \min.$$

Из предыдущего примера имеем

$$x_1 = x_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} \approx 0,707d;$$

$$A_{\max} \approx 0,5d^2.$$

При площади круга

$$A = 0,785d^2$$

окончательно получаем

$$\Delta A_{\min} = 0,285d^2.$$

**Пример 7.9.** Выполнить разбивку общего передаточного числа редуктора типа Ц2С между его ступенями.

Как известно [6], разбивку общего передаточного числа редуктора производят, исходя из условий обеспечения:

- минимальных габаритов;
- наименьшей массы;
- равнопрочности зубьев всех ступеней;
- погружения колёс всех ступеней в масляную ванну.

В качестве примера выполним разбивку между ступенями соосного двухступенчатого цилиндрического зубчатого редуктора (рис. 7.10), обеспечивая минимальные габариты.

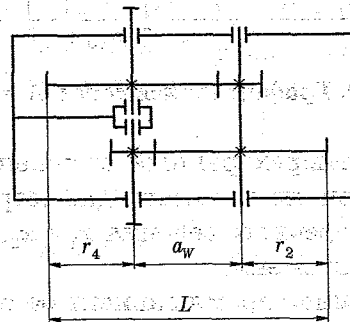


Рис. 7.10. Соосный двухступенчатый цилиндрический зубчатый редуктор

Целевую функцию в соответствии с рисунком 7.10 можно записать в следующем виде

$$L(x) = r_4 + a_w + r_2 \rightarrow \min, \quad (7.20)$$

где  $r_2$  и  $r_4$  — радиусы начальных окружностей колёс первой и второй ступеней редуктора;

$a_w$  — межосевое расстояние этих ступеней, причём

$$a_{w6} = a_{wT}. \quad (7.21)$$

Выразим величины, входящие в формулу (7.20), через известные параметры. При этом учтём, что

$$u_p = u_6 u_T;$$

$$r_4 = 0,5d_4 = a_{wT} u_T (u_T + 1); \quad (7.22)$$

$$r_2 = 0,5d_2 = a_{w6} u_6 (u_6 + 1); \quad (7.23)$$

$$a_{wT \min} = (u_T + 1) \sqrt[3]{\frac{u_6}{u_T A_T}},$$

где введено обозначение

$$A_T = K_a \sqrt[3]{\frac{K_H T_1}{\Psi_{aT} [\sigma_H]_T^2}}, \quad (7.24)$$

причём здесь  $K_a$  — коэффициент, зависящий от типа передачи (прямо- или косозубая);

$K_H$  — коэффициент нагрузки;

$T_1$  — вращающий момент на первом валу редуктора;

$\Psi_{aT}$  — относительная ширина зубчатых венцов зубчатых колёс тихоходной ступени;

$\Psi_{aT} = b_4 / a_{wT}$  ( $b_4$  — ширина зубчатого венца четвёртого колеса);

$[\sigma_H]_T$  — допускаемые контактные напряжения для зубчатых колёс второй (тихоходной) ступени;

$u_6, u_T$  — передаточные числа быстроходной и тихоходной ступеней.

Принимая во внимание приведённые зависимости, окончательно получаем

$$L(x) = A_T (u_T + 1) \sqrt[3]{\frac{u_p}{u_T^2} \left( 1 + \frac{u_p}{u_p + u_T} + \frac{u_T}{u_T + 1} \right)} \rightarrow \min. \quad (7.25)$$

Так как варьируемым параметром является  $u_T$ , то оптимальное решение можно найти классическим методом

$$\frac{dL}{du_T} = \dots = 0. \quad (7.26)$$

Откуда

$$u_T^* = u_{T \text{opt}} = \dots \quad (7.27)$$



Имея  $u_r^*$  и выражение (7.27), строим графики зависимости

$$L(x) = f(u_r, u_p).$$

Такие графики представлены на рисунке 7.11.

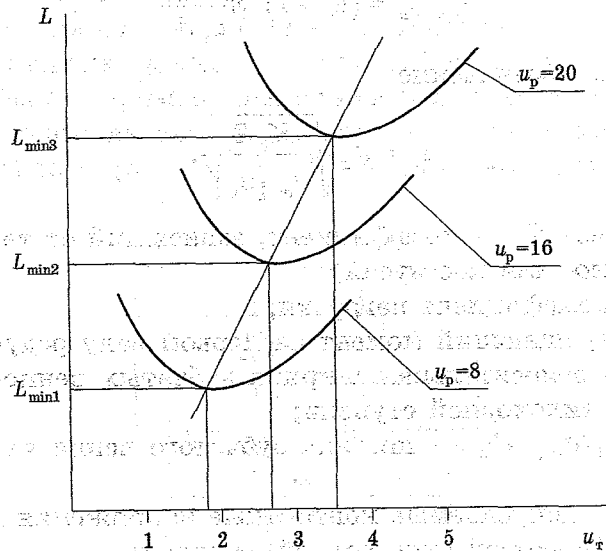


Рис. 7.11. Графики зависимости  $L = f(u_r, u_p)$

**Задача 7.1.** Завод планирует выпускать ёмкости объёмом  $V$  в форме поверхности прямой четырёхгранной пирамиды с крышкой (рис. 6.18). Необходимо определить её параметры  $a$ ,  $b$  и  $h$ , при которых расход листового материала будет минимальным.

**Задача 7.2.** Завод планирует выпускать ёмкости объёмом  $V$  в форме поверхности прямого кругового цилиндра с крышкой. Необходимо определить радиус  $r$  основания и высоту  $h$ , при которых расход листового материала будет минимальным.

**Задача 7.3.** Завод планирует выпускать ёмкости объёмом  $V$  в форме прямого кругового конуса с крышкой. Необходимо определить высоту  $h$  и радиус  $r$  основания,

при которых расход листового материала будет минимальным.

**Указание.** Полная поверхность конуса  $A = \pi r(r+l)$ , где  $l$  — длина образующей

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

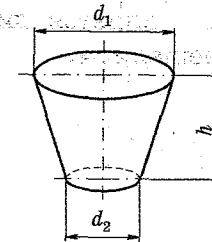


Рис. 7.12. Расчётная схема

**Задача 7.4.** Завод планирует выпускать ёмкости объёмом  $V$  в форме поверхности в виде усечённого прямого кругового конуса без крышки и с крышкой. Необходимо определить её параметры  $d_1$ ,  $d_2$  и  $h$  (рис. 7.12), при которых расход листового материала будет минимальным.

**Задача 7.5.** Завод выпускает ёмкости объёмом  $V$  в форме сферы, прямой четырёхгранной призмы и прямого кругового цилиндра (рис. 7.13), причём последние две ёмкости без крышки и с крышкой.

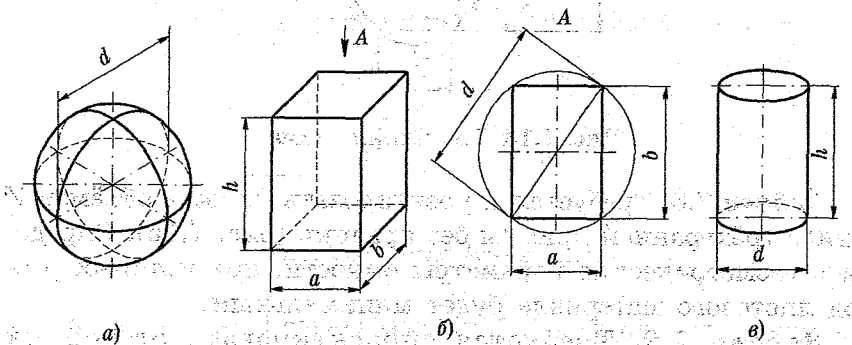


Рис. 7.13. Расчётные схемы:

$a$  — сферы;  $b$  — призмы;  $c$  — цилиндра

Необходимо определить параметры поверхности, при которой расход листового материала будет минимальным.

для изготовления каждой ёмкости. Кроме того, требуется указать ёмкости в порядке увеличения материала.

**Задача 7.6.** Завод выпускает изделие «Ведро» (рис. 7.12), имеющее следующие параметры:  $d_1 = 250$  мм;  $d_2 = 200$  мм и  $h = 250$  мм. Проверить, является ли рассматриваемое изделие оптимальным инженерным решением.

**Задача 7.7.** Завод выпускает изделие «Воронка» (рис. 7.14), имеющее следующие параметры:  $d_1 = 200$  мм;  $d_2 = 50$  мм и  $h_1 = h_2 = 100$  мм. Проверить, является ли данное изделие оптимальным инженерным решением.

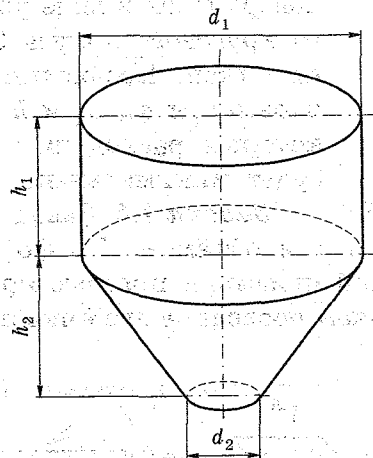


Рис. 7.14. Расчётная схема

**Задача 7.8.** Требуется спроектировать ёмкость объёмом  $V$  в виде трёхгранной призмы без крышки (рис. 7.15). Определить геометрические параметры ёмкости, при которых расход листового материала будет минимальным.

**Задача 7.9.** Требуется спроектировать отстойник (рис. 7.16) для жидких отходов объёмом  $20 \times 10^3$  л. Отстойник будет изготовлен из железобетона толщиной 10 см. Определить геометрические параметры отстойника, при которых для его изготовления пойдёт минимальное количество материала.

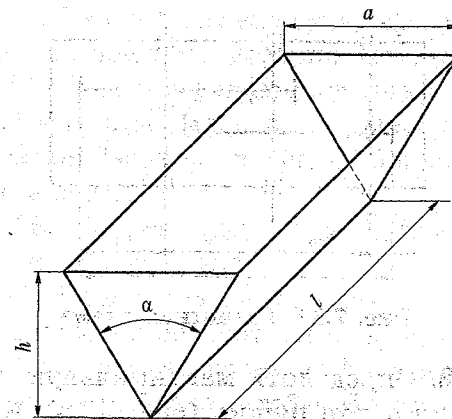


Рис. 7.15. Расчётная схема

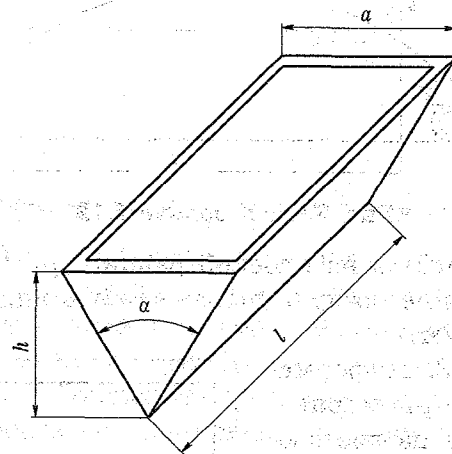


Рис. 7.16. Расчётная схема

**Задача 7.10.** Решить задачу 7.9 для случая, когда отстойник имеет крышку.

**Задача 7.11.** Разбить общее передаточное число между ступенями двухступенчатого цилиндрического зубчатого редуктора, выполненного по развёрнутой схеме (рис. 7.17), обеспечивая минимальную массу.

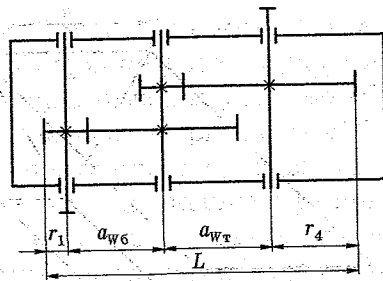


Рис. 7.17. Расчётная схема

**Задача 7.12.** Определить максимальную дальность  $L$  и угол выдвигения  $\alpha$  для пушки (рис. 7.18), если начальная скорость снаряда  $v_0 = 800$  м/с, а его масса  $m = 50$  кг.

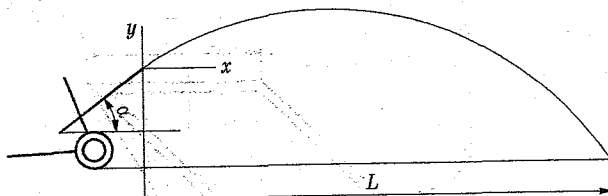


Рис. 7.18. К задаче 7.12

Стрельба ведётся на плоской равнине  $y_0 = y_{\text{конеч}}$ . Сопротивление воздуха выражается в виде  $F_v = cv^2$ , где  $c = 0,015$  Н · с<sup>2</sup>/м.

**Задача 7.13.** Информационный щит размерами  $a \times b$  изготовлен из листового материала постоянной толщины (рис. 7.19). Площадь поля, содержащего информацию, должна составлять  $2$  м<sup>2</sup>. По нижней стороне щит имеет свободное поле  $200$  мм, а по трём остальным —  $100$  мм. Найти  $a$  и  $b$ , при которых для изготовления щита потребуется минимальное количество материала.

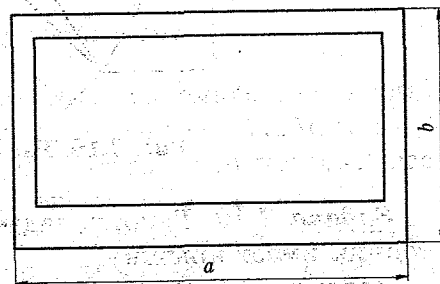


Рис. 7.19. К задаче 7.13

**Задача 7.14.** Как изменится ответ предыдущей задачи, если ввести дополнительное условие  $1,5 \leq a \leq 2,5$  м?

**Задача 7.15.** Спроектировать изделие в форме кругового конуса объёмом  $2$  м<sup>3</sup> (рис. 6.21). Определить высоту и диаметр основания ёмкости, чтобы её боковые поверхности были минимальными.

**Задача 7.16.** Решить задачу 7.15 для случая, когда ёмкость имеет круглую крышку.

**Задача 7.17.** Балка прямоугольного сечения (рис. 7.20) получена механической обработкой из круглого стержня диаметром  $d = 10$  мм. Какие размеры  $b \times h$  поперечного сечения должна иметь эта балка, чтобы её грузоподъёмность  $[F]$  была максимальной.

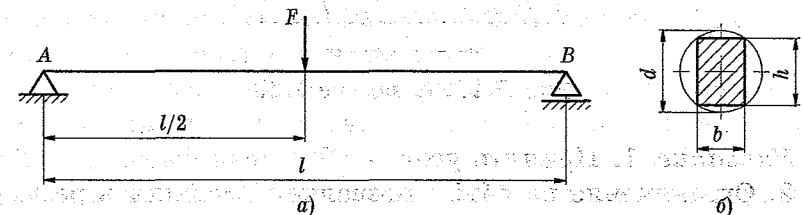


Рис. 7.20. Расчётная схема (а) и поперечное сечение (б) балки

**Задача 7.18.** Пустотелый вал, площадь поперечного сечения которого  $A$ , передаёт только вращающий момент  $T$ . Определить наружный диаметр  $d$  и диаметр отверстия  $d_0$ , обеспечивающие максимум  $T$ .

**Задача 7.19.** Приведите примеры задач, в которых задача оптимизации не имеет решения (или при каких условиях задача оптимизации не имеет решения).

**Задача 7.20.** Из пункта А в пункт В следует перевезти  $500$  м<sup>3</sup> сыпучего груза. Для этого необходимо изготовить контейнер, стоимость материалов которого следующая: дна —  $600$  руб./м<sup>2</sup>, боковых стенок —  $150$  руб./м<sup>2</sup> и крышки —  $600$  руб./м<sup>2</sup>. Известно, что стоимость каждого рейса равна  $150$  руб. Требуется спроектировать контейнер таким образом, чтобы минимизировать полные затраты на транспортировку груза.

**Задача 7.21.** Необходимо спроектировать бункер для хранения зерна (рис. 7.21) объёмом  $V = 10 \text{ м}^3$ , стоимость материалов следующая: дна — 100 руб./ $\text{м}^2$ , боковых стенок — 150 руб./ $\text{м}^2$ . Требуется определить параметры  $h$ ,  $a$  и  $\alpha$ , обеспечивающие минимальную стоимость бункера.

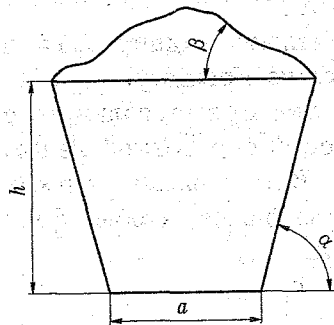


Рис. 7.21. К задаче 7.22

**Указание.** 1. Принять угол  $\beta = 30^\circ$ .

2. Ограничение на объём позволяет уменьшить размерность (число переменных в цифровом формате).

**Задача 7.22.** Решить предыдущую задачу для случая, когда бункер имеет крышку, стоимость металла которой 150 руб./ $\text{м}^2$ .

**Задача 7.23.** Бак объёмом  $V$  (рис. 7.22) имеет вид цилиндра с коническими передним и задним днищами и изготавливается сваркой из трёх листовых заготовок. Определить параметры бака  $d$ ,  $L_1$  и  $L_2$ , при которых расход листового материала будет минимальным.

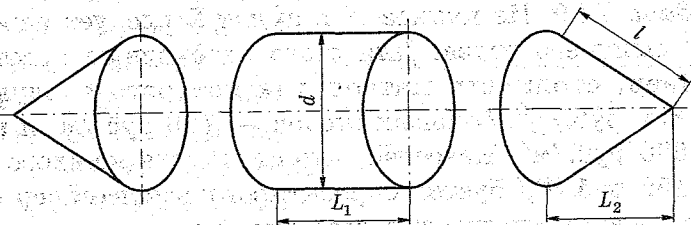


Рис. 7.22. К задаче 7.24

**Задача 7.24.** Решить предыдущую задачу для случая, когда бункер имеет крышку, стоимость материала которой 150 руб./ $\text{м}^2$ .

**Задача 7.25.** Пусть требуется разделить стержень длиной  $L$  на заготовки длиной  $P_1, P_2, P_3, P_4$  с минимизацией отходов.

**Задача 7.26.** Пусть требуется раскроить листовый материал по площади  $A$  на заготовки площадью  $A_1, A_2, A_3$  с минимальными отходами.

**Указание.** Размеры листа, геометрическая форма и размеры заготовок известны.

**Задача 7.27.** В металлургический цех в качестве сырья поступает латунь (сплав меди с цинком) четырёх типов с содержанием цинка 10, 20, 25 и 40 % по цене 10, 30, 40 и 60 ед. за 1 кг соответственно.

В каких пропорциях следует переплавлять это сырьё в цехе, чтобы получить сплав (латунь), содержащий 30 % цинка и самый дешёвый?

**Задача 7.28.** На мебельной фабрике требуется раскроить 5000 прямоугольных листов фанеры, каждый размером 45 м, с тем, чтобы получить два вида прямоугольных деталей: деталь А должна иметь размер  $2 \times 2$  м, деталь Б — размер  $1 \times 3$  м. Необходимо, чтобы количество деталей А оказалось не меньше, чем деталей Б.

Каким образом следует производить раскрой, обеспечивающий минимальное (по площади) количество отходов?

**Задача 7.29.** Для серийного производства некоторого изделия требуются комплекты заготовок профильного проката. Каждый комплект состоит из двух заготовок длиной 1800 мм и пяти заготовок длиной 700 мм.

Как следует раскроить 770 полос проката стандартной длины 6000 мм для получения наибольшего количества указанных комплектов?

**Задача 7.30.** Имеется некоторый материал в виде стандартных листов, которые необходимо раскроить для получения не менее 80 штук деталей типа 1 и не менее 40 штук

деталей типа 2. Известны четыре способа раскроя листа, каждый из которых даёт результат, представленный в таблице 7.5.

Таблица 7.5

Исходные данные для решения задачи

Способы раскроя листа	1	2	3	4
Результат	3 детали типа 1; 1 деталь типа 2	2 детали типа 1; 6 деталей типа 2	1 деталь типа 1; 9 деталей типа 2	0 деталей типа 1; 13 деталей типа 2

Требуется так провести операцию изготовления деталей, чтобы общий расход листов оказался минимальным.

**Задача 7.31.** Имеется  $m$  станков ( $m$  групп станков), на которых могут быть изготовлены  $n$  типов деталей. Трудоемкость обработки  $j$ -ой детали на  $i$ -м станке составляет  $t_{ij}$ , час. Известны фонды времени работы каждого станка (группы станков) —  $B_i$ . Исходные данные для решения задачи представлены в таблице 7.6.

Таблица 7.6

Исходные данные для решения задачи, представленные в общем виде

Станки	Трудоемкость при обработке деталей типа				Фонд времени работы оборудования
	1	2	...	$n$	
1	$t_{11}$	$t_{12}$	...	$t_{1n}$	$B_1$
2	$t_{21}$	$t_{22}$	...	$t_{2n}$	$B_2$
...	...	...	...	...	...
$m$	$t_{m1}$	$t_{m2}$	...	$t_{mn}$	$B_m$

Требуется определить количество деталей каждого наименования ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), при обработке которых достигается максимальная загрузка оборудования участка.

**Задача 7.32.** Имеется  $m$  станков, на которых могут быть изготовлены  $n$  типов деталей. Производительность

$i$ -го станка при изготовлении детали  $j$ -го типа составляет  $c_{ij}$ . Величины плановых заданий  $A_j$  на изготовление  $j$ -ой детали и ресурс времени  $B_i$  работы  $i$ -го станка приведены в таблице 7.7.

Таблица 7.7

Исходные данные для решения задачи

Станки	Тип деталей				Ресурс времени
	1	2	...	$n$	
1	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	$B_1$
2	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$	$B_2$
...	...	...	...	...	...
$m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mn}$	$B_m$
Требуемое количество деталей	$A_1$	$A_2$	...	$A_n$	—

Требуется, учитывая ресурсы времени работы каждого станка, распределить задания между станками таким образом, чтобы общее время работы всех станков было минимальным.

**Задача 7.33.** Пусть некоторая машина состоит из  $k$  различных видов деталей, которые пронумеруем числами 1, 2, ...,  $k$ . Имеется  $m$  типов различных станков, причём количество станков  $i$ -го типа равно  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Детали могут быть изготовлены на станках разного типа. Производительность станка  $i$ -го типа при изготовлении  $j$ -ой детали составляет  $c_{ij}$ . После изготовления детали поступают на сборку. Требуется закрепить станки за деталями так, чтобы в единицу времени получать максимальное количество машин.

**Задача 7.34.** Из  $n$  видов сырья производится  $m$  различных типов продукции. Стоимость реализации изготовленной продукции  $i$ -го типа составляет  $c_i$ ,  $i = 1, m$ . Запас сырья  $j$ -го вида на планируемый период равен  $z_j$ ,  $j = 1, n$ . Потребность в сырье  $i$ -го типа составляет  $p_{ij}$ . Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 7.8.

Таблица 7.8  
Исходные данные для решения задачи

Тип продукции	Вид сырья				Стоимость продукции
	1	2	...	$n$	
1	$p_{11}$	$p_{12}$	...	$p_{1n}$	$c_1$
2	$p_{21}$	$p_{22}$	...	$p_{2n}$	$c_2$
...	...	...	...	...	...
$m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$	...	$p_{mn}$	$c_m$
Запас сырья	$z_1$	$z_2$	...	$z_n$	—

Требуется для каждого типа продукта  $i = 1, 2, \dots, m$  определить такой объём производства  $x_i$ , чтобы обеспечить максимальную стоимость реализации изготовленной продукции при условии, что не будут превышены запасы имеющегося сырья.

**Заключение.** Материал данной главы знакомит пользователя со структурой алгоритмов многомерного поиска и примерами решения задач оптимизации с помощью этих методов.

**Вопросы для самопроверки**

1. Что такое метод многомерного поиска?
2. Назовите классические методы оптимизации.
3. Какими качествами характеризуются численные методы?
4. Какие методы оптимизации относятся к линейному программированию?
5. Каков алгоритм методов случайного поиска?
6. Назовите градиентные методы оптимизации. Каков алгоритм этих методов?

## 8. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. СИМПЛЕКС-МЕТОД

В данной главе рассматриваются задачи линейного программирования (ЛП), включая симплекс-метод, являющийся модификацией ЛП.

### Основные понятия и определения

**Допустимая область** — область, содержащая множество всех допустимых решений.

**Допустимое решение** — решение, удовлетворяющее ограничениям.

**Линейное программирование** — оптимизационная задача, в которой целевая функция и ограничения в виде равенств или неравенств линейны.

**Линии уровня** — прямые, соответствующие различным значениям целевой функции.

**Математическая модель** — совокупность выражений функции (функций) цели и наложенных ограничений на входные и выходные параметры в виде равенств и (или) неравенств.

**Симплекс** —  $N$ -мерная замкнутая геометрическая фигура, рёбра которой представляют собой прямые линии, пересекающиеся в  $N + 1$  вершине.

**Симплекс-метод** — метод решения задач линейного программирования с использованием симплекса.

### 8.1. Общие сведения

К линейному программированию (ЛП) относятся оптимизационные задачи, в которых целевая функция и ограничения в виде равенств или неравенств линейны. Задачи ЛП составляют наиболее простой и хорошо изученный класс задач математического программирования. Поэтому линейное программирование и их многочисленные модификации составляют большинство применяемых оптимизационных методов. Классической задачей линейного про-

граммирования является так называемая «транспортная задача», решение которой приводится в ряде работ [11, 12].

Метод ЛП рассмотрим на простом примере.

**Пример 8.1.** Мебельная фабрика выпускает изделия вида

	A	B
Площадь	3 м <sup>2</sup>	4 м <sup>2</sup>
Время сборки	12 мин	30 мин
Прибыль	3 руб.	4 руб.
Поставка сырья в неделю	1700 м <sup>2</sup>	
Возможность машинного оборудования	160 часов	

Необходимо найти  $x_1$  и  $x_2$  — количество изделий вида A и B, удовлетворяющее всем ограничениям и обеспечивающее максимальную прибыль  $P$ .

Математическая модель для рассматриваемого примера: целевая функция

$$P(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max; \quad (8.1)$$

ограничения:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700; \quad (8.2)$$

$$0,2x_1 + 0,5x_2 \leq 160$$

или

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600. \quad (8.3)$$

Для наглядности решим задачу графически (рис. 8.1).

Многоугольник  $OABC$  — допустимая область, содержащая все допустимые решения. Решение задачи линейного программирования сводится к отысканию оптимального решения в допустимой области. В рассматриваемом примере оптимальное решение будет достигнуто при максимизации целевой функции  $3x_1 + 4x_2$ . Для этого воспользуемся линиями уровня, которые представляют собой прямые, соответствующие различным значениям целевой функции  $P$  и имеющие с допустимой областью хотя бы одну точку:

$$3x_1 + 4x_2 = 0;$$

$$3x_1 + 4x_2 = 600.$$

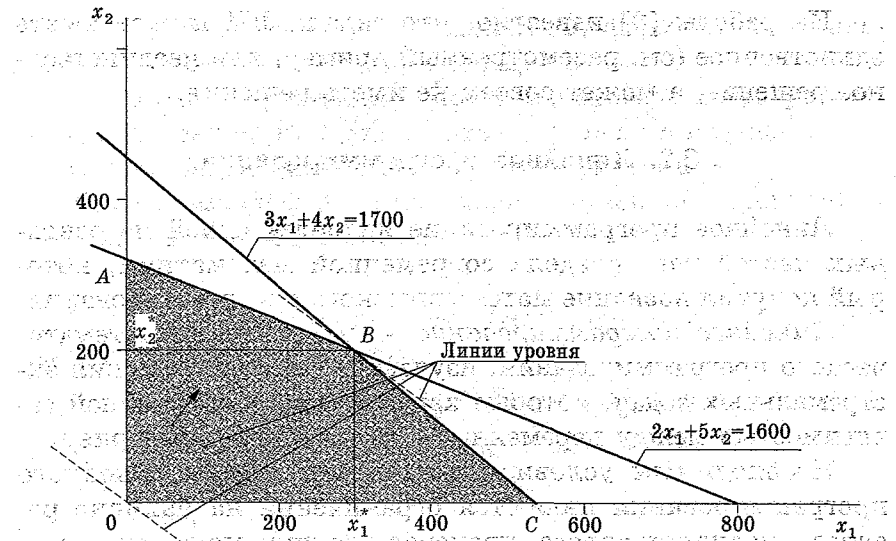


Рис. 8.1. Графическое решение задачи

При удалении прямой уровня от начала координат значение  $P$  увеличивается. Ясно, что предельной является линия уровня, проходящая через точку  $B$  с координатами  $x_1 = 300$ ,  $x_2 = 200$ . Эта точка представляет собой наилучшую допустимую точку, соответствующую максимальному значению, равному  $P_{\max} = 1400$ . Следовательно, указанные значения  $x_1$ ,  $x_2$  — оптимальное решение, а значение  $P$  является оптимальным для рассматриваемой задачи ЛП.

Такие же значения параметров и функций можно получить, решая систему уравнений (8.2), (8.3) и из выражения (8.1) целевой функции.

Как видно, в данном случае задача ЛП имеет единственное решение.

Кроме того, можно сделать важный вывод: если допустимое множество имеет вершины, то среди точек максимума (минимума) линейной функции всегда будет одна из вершин. При этом предполагается, что точки максимума (минимума) существуют.

Из работы [3] известно, что задача ЛП может иметь единственное (см. рассмотренный пример) или неединственное решение, а может совсем не иметь решения.

## 8.2. Линейное программирование

Линейное программирование является одной из основных частей того раздела современной математики, который получил название математического программирования.

*Линейное программирование* — направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

*Основы расчёта.* Общая задача линейного программирования (ЛП) состоит в нахождении экстремального значения (максимума или минимума) линейной функции

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (8.4)$$

от  $n$  вещественных переменных при наложенных ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2; \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq (=, \geq) b_i; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m; \end{cases} \quad (8.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (8.6)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$  и  $c_j$  — заданные постоянные величины.

Формулы (8.4)-(8.6) — стандартная форма записи задачи ЛП в виде математической модели.

В системе ограничений могут одновременно встречаться знаки *меньше или равно*, *равно*, *больше или равно*.

Общая задача имеет несколько форм записи.

*Векторная форма* записи задачи линейного программирования имеет следующий вид:

$$\bar{Z} = \bar{C} \times \bar{X}. \quad (8.7)$$

Требуется минимизировать (максимизировать) эту линейную функцию при ограничениях

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \leq (=, \geq) A_0, X \geq 0, \quad (8.8)$$

где  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ;  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

$CX$  — скалярное произведение.

Векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

*Матричная форма* записи задачи линейного программирования предполагает нахождение минимального (максимального) значения линейной функции

$$Z = CX \quad (8.10)$$

при ограничениях

$$AX \leq (=, \geq) A_0, X \geq 0, \quad (8.11)$$

где  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  — матрица-строка;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец;}$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \\ a_{21} & a_{11} & \dots & a_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{11} \end{pmatrix} \text{ — матрица коэффициентов системы ограничений.}$$

**Пример 8.2.** Для изготовления двух видов изделий А и В завод расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, запас которых ограничен. При изготовлении указанных изделий используются токарные и фрезерные станки в количестве, указанном в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Исходные данные

Затраты на одно изделие		А	В	Ресурсы
Материалы	Сталь, кг	10	70	320
Материалы	Цветные металлы, кг	20	50	420
Оборудование	Токарные станки (станко-ч)	300	100	6200
Оборудование	Фрезерные станки (станко-ч)	200	100	3400
Прибыль на одно изделие, тыс. руб.		3	8	

Необходимо определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль, если время работы фрезерных станков используется полностью.

**Решение.** Составим математическую модель задачи. Обозначим через  $x_1$  число изделий вида А, а через  $x_2$  — число изделий вида В. На изготовление всей продукции уйдет  $(10x_1 + 70x_2)$  кг стали и  $(20x_1 + 50x_2)$  кг цветных металлов. Так как запасы стали не превышают 320 кг, а цветных металлов — 420 кг, то

$$10x_1 + 70x_2 \leq 320;$$

$$20x_1 + 50x_2 \leq 420.$$

Время обработки всех изделий на токарных станках

$$300x_1 + 100x_2 \leq 6200.$$

Для фрезерных станков, используемых полностью, имеем

$$200x_1 + 100x_2 = 3400.$$

Итак, система ограничений этой задачи:

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 320; \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420; \\ 300x_1 + 100x_2 \leq 6200; \\ 200x_1 + 100x_2 = 3400; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Общая прибыль фабрики может быть выражена целевой функцией:

$$F(x) = 3x_1 + 8x_2. \quad (8.13)$$

Выразим  $x_2$  через  $x_1$  из уравнения  $200x_1 + 100x_2 = 3400$  и подставим полученное выражение вместо  $y$  в неравенства и целевую функцию:

$$\begin{cases} x_1 + 7(34 - 2x_1) \leq 32; \\ 2x_1 + 5(34 - 2x_1) \leq 42; \\ 3x_1 + 1(34 - 2x_1) \leq 62; \\ x_2 = 34 - 2x_1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 \geq 206; \\ 8x_1 \geq 128; \\ x_1 \leq 28; \\ x_2 = 34 - 2x_1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 15 \frac{11}{13} \approx 15,846; \\ x_1 \geq 16; \\ x_1 \leq 28; \\ x_2 = 34 - 2x_1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15,846 \leq x_1 \leq 16; \\ x_2 = 34 - 2x_1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases} \quad (8.14)$$

$$F = 3x_1 + 8x_2 = 3x_1 + 8(34 - 2x_1) = 272 - 13x_1. \quad (8.15)$$

Преобразуя систему ограничений (8.14) и учитывая (8.15), получим, что  $F$  принимает наибольшее значение  $F_{\max}$  при  $x = 16$ :

$$F_{\max} = 272 - 13 \cdot 16 = 64 \text{ (тыс. руб.)}$$

**Задача 8.1.** Решить задачу 7.27 симплекс-методом.

**Задача 8.2.** Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на трёх станках. На рисунке 8.2 показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени её обработки на станках.

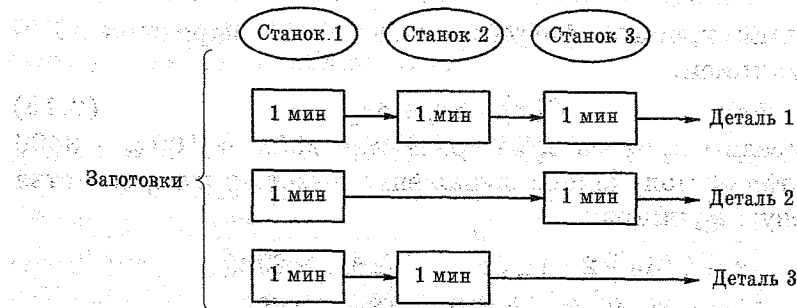


Рис. 8.2. Расчётная схема

Суточный ресурс рабочего времени станков 1, 2 и 3 составляет соответственно 890, 920 и 840 мин. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 равна соответственно 3, 1 и 2 ед.

Требуется составить суточный план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

**Задача 8.3.** Решить задачу 7.29 симплекс-методом.

**Задача 8.4.** Решить задачу 7.30 симплекс-методом.

### 8.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования

**Общие сведения.** Наиболее употребительным численным методом решения задач линейного программирования является *симплекс-метод*, т. е. он является модификацией линейного программирования. В этом методе строится симп-

лекс, являющийся  $N$ -мерной замкнутой геометрической фигурой, рёбра которой представляют собой прямые линии, пересекающиеся в  $N + 1$  вершине. В двумерном случае это треугольник (рис. 8.3), в трёхмерном — тетраэдр.

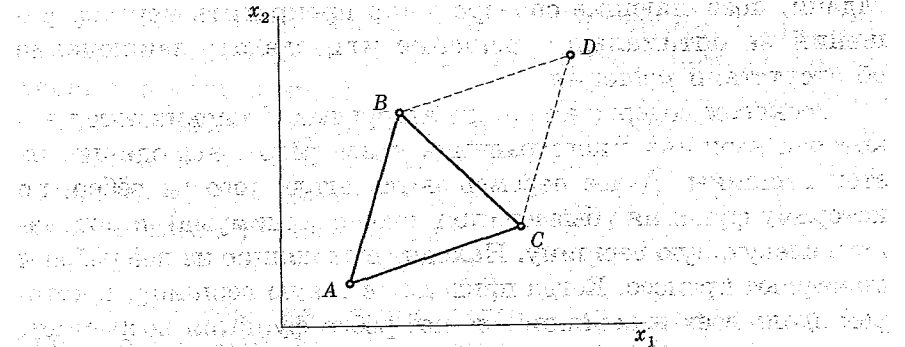


Рис. 8.3. Симплекс-метод в двумерном пространстве:

$ABC$  — симплекс;  $BDC$  — новый симплекс;  
 $A$  — узел с наилучшим значением целевой функции;  
 $D$  — новая точка

Данный метод основывается на следующем:

- область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, т. е. многогранным или многоугольным множеством;
- оптимальным решением задачи линейного программирования является одна из угловых точек области допустимых решений;
- угловые точки области допустимых решений алгебраически представляют некоторые базисные (опорные) решения системы ограничений задачи.

Следовательно, метод заключается в целенаправленном переборе опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов расчёта либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Алгоритм симплексного метода следующий:

- 1) найти начальное опорное решение;

2) осуществить переход от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному;

3) определить критерии завершения процесса решения задачи, позволяющие своевременно прекратить перебор решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии решения.

Раскроем содержание этого алгоритма. Отыскиваются некоторая вершина многогранника и все рёбра, выходящие из этой вершины. Далее перемещаются вдоль того из рёбер, по которому функция убывает (при поиске минимума), и попадают в следующую вершину. Находят выходящие из неё рёбра и повторяют процесс. Когда приходят в такую вершину, в которой вдоль всех выходящих из неё рёбер функция возрастает, то минимум найден. Отметим, что, выбирая одно ребро, исключают из рассмотрения вершины, лежащие на остальных траекториях. В результате количество рассматриваемых вершин резко сокращается, т. е. уменьшается объём решения.

Таким образом, схемы поиска с использованием симплексов основаны на слежении за изменением значений целевой функции в их вершинах. Главным в этих схемах является процесс отражения — нахождение вершины нового симплекса, расположенной симметрично относительно плоскости, проходящей через одну из сторон исходного симплекса. В зависимости от поставленной задачи выбор направления поиска вершины нового симплекса определяется положением той вершины исходного симплекса, в которой целевая функция имеет наименьшее или наибольшее значение (рис. 8.3), т. е. эта точка является «наихудшей».

Новая точка называется «дополнением» наихудшей точки. Если в только что полученной вершине нового симплекса значение целевой функции оказывается худшим, то алгоритм предусматривает возврат в исходную точку — вершину прежнего симплекса. Затем осуществляется переход к той вершине прежнего симплекса, в которой целевая функция имеет следующее по величине значение, и отыскива-

ется точка, являющаяся её дополнением. Такой алгоритм обеспечивает систематическое смещение центра симплекса в направлении экстремума целевой функции. В процессе решения составляется симплекс-таблица для расчёта целевой функции и оптимальных значений параметров [8, 12].

**Метод Нелдера-Мида.** В данном методе помимо поиска вершин новых симплексов производится сжатие или растяжение их рёбер [17]. Этот алгоритм обладает большей общностью и обеспечивает локальное преобразование. Пространство проектирования, при котором достигается минимум унимодальной функции вида

$$M = F(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Схема алгоритма метода Нелдера-Мида представлена на рисунке 8.4. Выполняется он следующим образом [14]. Сначала в пространстве проектирования вводят исходный симплекс и вычисляют значения целевой функции в его вершинах. Из полученных значений выбирают наихудшее  $P_{\text{худ}}$  и наилучшее  $P_{\text{луч}}$ . Затем определяют положение центра симплекса  $\bar{P}$ , исключая наихудшую точку. Отражённую точку  $P^*$  находят по формуле

$$P^* = (1 + \alpha)\bar{P} - \alpha P_{\text{худ}},$$

где  $\alpha$  — положительная постоянная, называемая коэффициентом отражения.

Если точке  $P^*$  соответствует лучшее из найденных значений целевой функции, то следующую точку определяют по выражению

$$P^{**} = \gamma P^* + (1 - \gamma)\bar{P},$$

где  $\gamma$  — заранее выбранная постоянная, называемая коэффициентом расширения ( $\gamma > 1$ ).

Если значение целевой функции в точке  $P^{**}$  лучше её значений во всех предыдущих точках, то его используют вместо прежнего наилучшего значения в точке  $P_{\text{луч}}$  и после проверки сходимости процесс повторяется.

Если же  $P^{**}$  не лучше  $P^*$ , то  $P_{\text{луч}}$  заменяют на  $P^*$  и продолжают поиск.

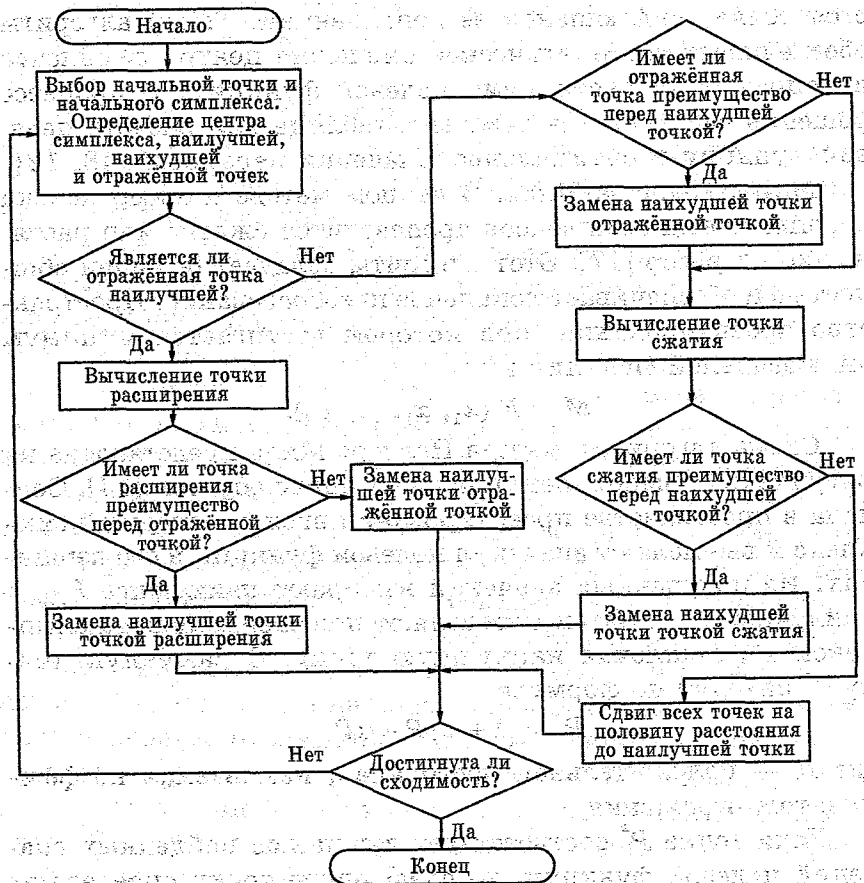


Рис. 8.4. Схема алгоритма метода Нелдера-Мида

Если ранее найденная точка  $P^*$  не лучше  $P_{луч}$ , то  $P_{худ}$  заменяют либо прежней точкой  $P_{худ}$ , либо точкой  $P^*$ , причём выбирают ту из них, в которой целевая функция имеет лучшее значение. После того как выбор сделан, по формуле

$$P^{**} = \beta P_{худ} + (1 - \beta) \bar{P}$$

определяют положение точки сжатия, причём  $\beta$  — коэффициент сжатия, значение которого заключено между нулём и

единицей. Если точка  $P^{**}$  оказывается более удачной, чем  $P_{худ}$ , то в дальнейшем ею заменяют  $P_{худ}$ . В противном случае, прежде чем продолжить итерации все  $P_i$  заменяют на новые:

$$P_{i,нов} = \frac{(P_{i,ст} + P_{луч})}{2}$$

Описанный алгоритм обладает достаточной гибкостью, позволяющей учитывать локальные топологические свойства поверхности, описанной целевой функцией. Симплексы вытягиваются в направлении наклона плоскостей, их оси поворачиваются при встрече с впадиной на поверхности целевой функции, вблизи экстремума они сжимаются. В целом метод симплексов можно охарактеризовать как весьма эффективный и удобный для выполнения на ЭВМ.

#### 8.4. Практическое применение симплексного метода

Пусть поставлена задача линейного программирования в стандартной (канонической) форме (8.4)-(8.6);

$$Z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max(\min), \quad (8.16)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (8.17)$$

$$x_j \geq 0 \forall j, b_i \geq 0 \forall i. \quad (8.18)$$

Будем считать, что правые части всех уравнений системы ограничений неотрицательны. Если в каком-либо уравнении правая часть отрицательна, то это уравнение нужно умножить на  $-1$ .

Опорным решением задачи линейного программирования называется такое допустимое решение  $X = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$ , для которого векторы условий (столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений)  $A_1, A_2, \dots, A_n$

соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга  $r$  системы векторов условий (числа линейно независимых уравнений системы ограничений). В дальнейшем будем считать, что система ограничений состоит из линейно независимых уравнений, т. е.  $r = m$ .

Если число отличных от нуля координат опорного решения равно  $m$ , то решение называется невырожденным, в противном случае (меньше  $m$ ) — вырожденным.

Базисом опорного решения называется базис системы векторов условий задачи, включающий в свой состав векторы, соответствующие от нуля координатам опорного решения.

Базисное решение находится методом Жордана-Гаусса. При этом разрешающие элементы для преобразований Жордана необходимо выбрать из условия, обеспечивающего неотрицательность правых частей уравнений системы:

$$\Theta_{0k} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \frac{b_i}{a_{ik}} \text{ при } a_{ik} > 0. \quad (8.19)$$

Здесь  $k$  — номер вектора условия  $A_k$ , вводимого в базис (номер выбираемого столбца матрицы системы ограничений), а  $i$  — номер вектора  $A_i$ , выводимого из базиса (номер строки матрицы системы, в которой следует выбирать разрешающий элемент для преобразования Жордана).

С помощью данного условия можно выбрать разрешающий элемент в любом столбце  $k$  матрицы системы ограничений, в котором имеется хотя бы один положительный элемент. Если при выборе разрешающего элемента данное условие нарушается, в правой части системы уравнений появляются отрицательные величины.

Используя данное условие, можно получить допустимое базисное решение, которое является начальным опорным решением.

Аналогичное условие используется при переходе от одного опорного решения к другому.

Более подробно решение задач линейного программирования симплексным методом приводится в работах [9, 18].

**Пример 8.3.** Найти начальное опорное решение и путём перебора опорных решений определить оптимальное решение задачи ЛП [11].

$f(x) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$   
при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_i \geq 0, i = 1, 4. \end{cases}$$

**Решение.** Результаты нахождения начального опорного решения и дальнейшего перебора опорных решений приведены в таблице 8.2. В правой части таблицы на каждом шаге вычислений приведены значения параметров  $\Theta_k$  для различных столбцов  $k$ , соответствующее опорное решение  $X_k$  и значение целевой функции  $Z(X_k)$  на этом решении. Номера столбцов для выбора разрешающих элементов принимались произвольно.

Таблица 8.2

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	Нахождение начального опорного решения:
3	2	1	1	7	7/3	7/2	7	7	$X_1 = (0, 0, 3, 4),$
5	3	1	2	11	11/5	11/3	11	11/2	$B_1 = (A_3, A_4),$
3	2	1	1	7	7/3	7/2		7	$Z(X_1) = -1;$
2	1	0	1	4	2	4		4	$X_2 = (0, 3, 0, 1),$
1	1	1	0	3	3	3			$B_2 = (A_2, A_4),$
2	1	0	1	4	2	4			$Z(X_2) = 5;$
1	1	1	0	3	3		3		$X_3 = (1, 2, 0, 0),$
1	0	-1	1	1	1		-		$B_3 = (A_1, A_2),$
0	1	2	-1	2			1	-	$Z(X_3) = 7;$
1	0	-1	1	1			-	1	$X_4 = (2, 0, 1, 4),$
0	1/2	1	-1/2	3					$B_4 = (A_1, A_3),$
1	1/2	0	1/2	1					$Z(X_4) = 7$

Сравниваем значения целевой функции на полученных опорных решениях:  $\min\{-1, 5, 7, 7\} = -1$ . Делаем вывод, что оптимальным решением является  $X_1 = (0, 0, 3, 4)$ .

Ответ:  $\min Z(X) = -1$  при  $X^* = (0, 0, 3, 4)$ .

По аналогии с рассмотренным примером найти начальное опорное решение и путём перебора опорных решений определить оптимальное решение следующих задач.

**Задача 8.5.** Найти максимальное значение функции

$$Z(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

**Задача 8.6.** Найти минимальное значение функции

$$f(x) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 4.$$

**Заключение.** В данной главе рассматриваются задачи линейного программирования (ЛП), включая симплекс-метод, являющийся модификацией ЛП.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи оптимизации относятся к линейному программированию?
2. Что такое линии уровня?
3. Что представляет собой симплекс?
4. Каков алгоритм симплекс-метода?

## 9. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В этой главе рассматриваются численные методы решения задач минимизации (максимизации) нелинейной функции при наличии или отсутствии ограничений, причём решаются задачи многомерного поиска наиболее простыми численными методами, разработанными к настоящему времени.

### Основные понятия и определения

*Градиентный метод* — см. гл. 7.

*Метод Коши* — градиентный метод первого порядка.

*Метод Ньютона* — см. гл. 7.

*Метод покоординатного (ступенчатого) спуска* — метод, в котором последовательно изменяется каждый проектный параметр до тех пор, пока не будет достигнуто экстремальное значение целевой функции.

*Метод случайного поиска* — метод получения решений, приближённых к оптимальным, заключающийся в случайном выборе направления движения на каждом шаге.

*Нелинейное программирование* — направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, в которых целевая функция и (или) ограничения нелинейны от варьируемых параметров.

### 9.1. Методы решения задач нелинейной оптимизации

К нелинейному программированию (НЛП) относятся оптимизационные задачи, в которых сама целевая функция и (или) ограничения в виде равенств или неравенств нелинейны, т. е. переменные содержатся в степенях выше первой. Эти задачи могут быть безусловной и условной оптимизации.

*Задача безусловной оптимизации* состоит в нахождении минимума или максимума функции в отсутствие каких-либо ограничений. Несмотря на то, что большинство практических

задач оптимизации содержит ограничения, изучение методов безусловной оптимизации важно с нескольких точек зрения. Многие алгоритмы решения задачи с ограничениями предполагают сведение её к последовательности задач безусловной оптимизации. Другой класс методов основан на поиске подходящего направления и последующей минимизации вдоль этого направления. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.

Общая задача нелинейного программирования ставится следующим образом: *требуется* найти значения  $n$  переменных  $(x_1, \dots, x_n)$ , которые минимизируют (максимизируют) функцию

$$z = f(x_1, \dots, x_n) \quad (9.1)$$

и удовлетворяют  $m$  уравнениям, соответствующим ограничениям

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) \cdot \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad (9.2)$$

Предполагается, что вид функций  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$  известен, а  $b_i$  — заданные постоянные. Величины  $m, n$  между собой не связаны, так что  $m$  может быть больше, меньше или равно  $n$ . В каждом из ограничений (9.2) сохраняется только один из знаков:  $\leq, =$  или  $\geq$ . Обычно некоторые или все переменные удовлетворяют условию неотрицательности.

В нелинейных задачах, в отличие от линейных, допустимая область может быть невыпуклой, может иметь бесконечное число крайних точек, целевая функция может достигать экстремума не только на границе, но и внутри области и, более того, иметь несколько локальных экстремумов. Этими причинами объясняется отсутствие общих методов, подобных симплекс-методу в линейном программировании и позволяющих решать любые задачи нелинейного программирования. Вместе с тем отдельные специальные типы нелинейных задач достаточно хорошо изучены и имеются определённые методы их решения.

Для задачи нелинейного программирования, в отличие от линейных задач, нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и ограничений разработано несколько специальных методов решения, к которым относятся следующие: *метод линеаризации, множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, ряд приближённых методов решения, графический метод.*

Задачи нелинейной оптимизации с точки зрения методов решения делятся на два класса:

- 1) задачи безусловной оптимизации;
- 2) задачи условной оптимизации.

Задача безусловной оптимизации представляет собой поиск оптимума целевой функции без всяких дополнительных условий, что записывается

$$L = f(x) \rightarrow \max(\min).$$

Задача условной оптимизации в общем случае записывается в известном виде:

$$L = f(x) \rightarrow \max(\min)$$

при заданных ограничениях — равенствах и неравенствах

$$q(x) = , \leq , \geq 0.$$

Следовательно, такая задача оптимизации, кроме целевой функции, включает *дополнительные условия* в виде ограничений и граничных условий.

Для наглядности представим условную задачу нелинейного программирования графически (рис. 9.1).

Защтрихованная область  $ABCD$  — допустимая область, содержащая все допустимые решения. Решение задачи нелинейного программирования сводится к отысканию оптимального решения в допустимой области.

Как видно, экстремальные значения целевая функция принимает в точках  $B$  и  $D$ . В зависимости от условия задачи определяют оптимальные значения параметров  $x_1^*, x_2^*$ , а затем максимум или минимум этой функции.

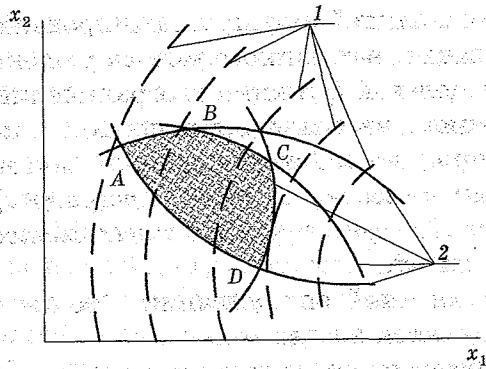


Рис. 9.1. Графическое представление решения нелинейной условной задачи:

1 — линии уровня функции; 2 — ограничения

Задачи безусловной нелинейной оптимизации могут решаться различными методами поиска. Чтобы составить маршрут поиска, нужно, во-первых, знать начальную точку, во-вторых, выбрать путь движения и, наконец, определить, достижение какой точки следует считать достижением цели.

Путь движения можно представить как последовательность шагов, а каждый шаг при этом определяется направлением движения и расстоянием, которое следует пройти в данном направлении.

Алгоритм поиска экстремума следующий:

- задаём начальную точку  $x_{0j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;
- в ней определяем направление движения на первом шаге  $p_1$ ;
- принимаем величину шага  $t_i$ ;
- определяем координаты конца первого шага  $x$ ;
- вычисляем значения признака экстремума на первом шаге;
- проверяем, выполняется ли признак экстремума.

Если условие признака выполняется, то принимается, что экстремум находится в точке  $x_{0j}$ , если нет — аналогич-

но выполняется второй шаг и так далее до выполнения условия, характеризующего достижение экстремума.

Важный вопрос поиска — признак достижения экстремума, т. е. вершины, обычно таким признаком является величина относительного приращения функции на каждой итерации

$$\Delta L_k = L_{k+1} - L_k.$$

Экстремум считается достигнутым, если выполняется условие

$$\Delta L_k \leq \Delta L_0,$$

где  $\Delta L_0$  — точность, назначаемая при решении задачи.

Методы выбора направления и длины шага бывают различных типов, а их порядок определяется порядком производных целевых функций, используемых в них.

Методами нулевого порядка или прямого поиска называются такие методы, которые для определения направления  $p$  и величины шага  $t$  используют только значение целевой функции (поиск по симплексу, метод Хука-Дживса, метод сопряжённых направлений Пауэлла).

Методы первого порядка или градиентные методы — методы, в которых для определения направления  $p$  и шага  $t$  используются значения первых производных целевой функции и определяется её градиент (методы Коши, Ньютона и др.).

Методами второго порядка или методами Ньютона называются такие методы, в которых для определения направления  $p$  и шага  $t$  используются значения вторых производных целевой функции.

Чем выше порядок методов, тем больше вычислений на каждой итерации, но тем меньше требуется итераций и, естественно, наоборот. Наиболее распространёнными являются градиентные методы. Такое положение объясняется тем, что с одной стороны, они не требуют на каждой итерации очень больших вычислений, так как вычисляется только целевая функция и её первые производные, а с другой — у этих методов достаточно хорошая сходимость, то есть они обеспечивают нахождение экстремума за небольшое число итераций.



Методы решения задач условной оптимизации представлены на рисунке 9.2.



Рис. 9.2. Методы решения задач условной оптимизации:

- 1 — классический; 2 — множителей Лагранжа;  
3 — определения седловой точки; 4 — штрафных функций

Сущность этих методов следующая:

— классический метод условной оптимизации с помощью определения стационарных, граничных точек и точек разрыва;

— метод множителей Лагранжа при ограничениях, имеющих вид равенств;

— метод определения седловой точки при ограничениях в виде неравенств;

— метод штрафных функций при ограничениях, имеющих вид неравенств и равенств.

Если число переменных  $n \leq 3$ , возможно графическое решение задачи.

### 9.2. Метод покоординатного спуска

Для решения задачи оптимизации используется метод *покоординатного (ступенчатого) спуска-подъёма*, известный ещё под названием *метода Гаусса-Зайделя*. Его суть заключается в последовательном изменении каждого проектного параметра до тех пор, пока не будет достигнуто экстремальное значение целевой функции, т. е. он является логическим развитием метода одномерного поиска. Отметим, что при поиске минимума функции осуществляется покоординатный спуск, а максимума — подъём (рис. 9.3). В дальнейшем для краткости оставим название, указанное в заголовке.

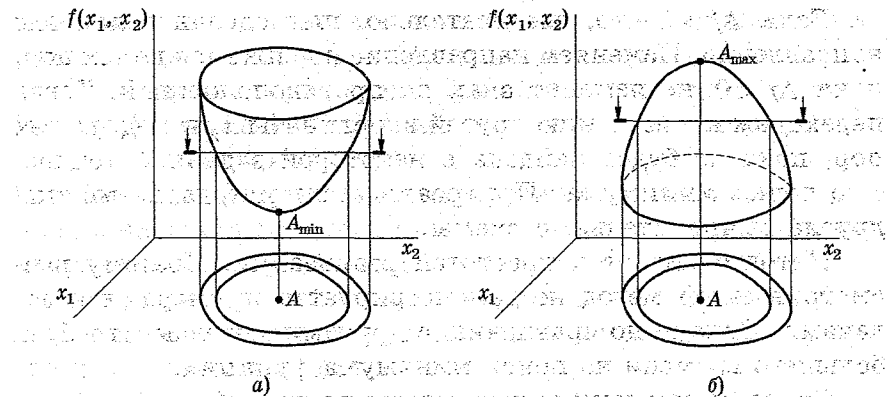


Рис. 9.3. Поиск экстремального значения функции:

- a — спуском; б — подъёмом

Пусть установлена очерёдность изменения координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , совпадающая с очерёдностью их индексов  $1, 2, \dots, n$ . Сначала изменяем одну координату  $x_1$ , сохраняя все остальные координаты постоянными, на некоторую величину  $\Delta x$  и определяем величину приращения  $\Delta f$  (рис. 9.4).

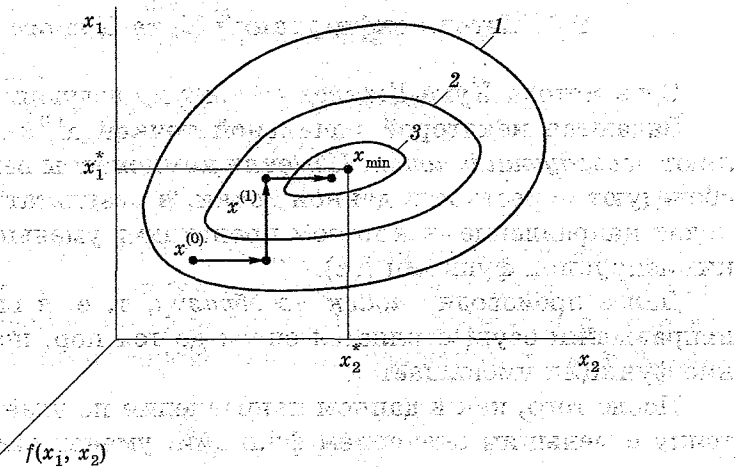


Рис. 9.4. Метод покоординатного спуска:

- 1...3 — линии пересечения поверхности  $f(x_1, x_2)$  плоскостями — линии уровня

Если  $\Delta f > 0$ , то, следовательно, шаг сделан в ложном направлении. Изменяем направление и движемся до тех пор, пока  $\Delta f < 0$  не изменит знак на противоположный. Тогда переходим к изменению другой координаты  $x_2$  и т. д. до тех пор, пока не будет найдена с некоторой заданной точностью точка минимума. При реализации метода возможны другие вычислительные схемы.

Метод отличается простотой реализации. Поэтому рассматриваемый метод не демонстрируется примерами и задачами. Однако по сравнению с другими методами требует большего времени на поиск минимума функции.

Отметим, что метод применяется на первой стадии решения задач, а затем используются более сложные методы. К достоинствам рассматриваемого метода следует отнести возможность применения методов одномерного поиска; например, метода золотого сечения. Кроме того, рассматриваемый метод совершенно неприменим, если целевая функция является «овражной», т. е. её линии уровня имеют *точки излома*. В этом случае используются другие методы (гл. 12).

### 9.3. Метод конфигураций Хука-Дживса

Суть метода Хука-Дживса состоит в следующем [9].

Задаются некоторой начальной точкой  $x^{(0)}$ . Осуществляют *исследующий поиск*. Изменяя компоненты вектора  $x^{(0)}$ , обследуют окрестность данной точки, в результате чего находят направление, в котором происходит уменьшение минимизируемой функции  $f(x)$ .

Далее производят *поиск по образцу*, т. е. в выбранном направлении осуществляется спуск до тех пор, пока значение функции уменьшается.

После того, как в данном направлении не удаётся найти точку с меньшим значением функции, уменьшают величину шага спуска.

Если последовательные дробления шага не приводят к уменьшению функции, от выбранного направления спуска

отказываются и осуществляют новое обследование окрестности точки и т. д.

По существу процедура Хука-Дживса представляет собой комбинацию «исследующего» поиска и «ускоряющегося» поиска по образцу.

*Исследующий поиск* ориентирован на выявление характера локального поведения целевой функции и определение направлений вдоль «оврагов».

Полученная в результате исследующего поиска информация затем используется в процессе поиска по образцу при движении по «оврагам».

Введём обозначения:

- $x^{(k)}$  — текущая базовая точка;
- $x^{(k-1)}$  — предыдущая базовая точка;
- $x_p^{(k+1)}$  — точка, построенная при движении по образцу;
- $x^{(k+1)}$  — следующая (новая) базовая точка.

*Исследующий поиск*. Для проведения исследующего поиска необходимо задать величину шага приращения  $\Delta x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), которая может быть различной для разных координатных направлений.

Исследующий поиск начинается в некоторой точке  $x^{(k-1)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Циклически изменяют на величину  $\Delta x_i$  каждую координату  $x_i^{(k-1)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) точки  $x^{(k-1)}$ , т. е.

$$x_i^{(k-1)} = x_i^{(k-1)} + \Delta x_i. \quad (9.3)$$

Если  $f(x^{(k)}) < f(x^{(k-1)})$ , то шаг поиска рассматривают как успешный, и координата  $x_i$  приобретает новое значение, рассчитываемое по формуле (9.3). В противном случае делают шаг в противоположном направлении, т. е. вычисляют

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} - \Delta x_i. \quad (9.4)$$

Если  $f(x^{(k)}) < f(x^{(k-1)})$ , то шаг поиска рассматривают как успешный, и координата  $x_i$  приобретает новое значение,

рассчитываемое по формуле (9.4). В противном случае, если же соотношение  $f(x^{(k)}) < f(x^{(k-1)})$  снова не выполняется, значение этой координаты остаётся неизменным, т. е.  $x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)}$ .

После перебора всех  $n$  координат исследующий поиск завершается. В результате получаем базовую точку  $x^{(k)}$ .

Поиск минимума целевой функции состоит из последовательности шагов исследующего поиска вокруг базисной точки, за которой в случае успеха следует поиск по образцу.

Эта процедура состоит из следующих шагов (рис. 9.5).

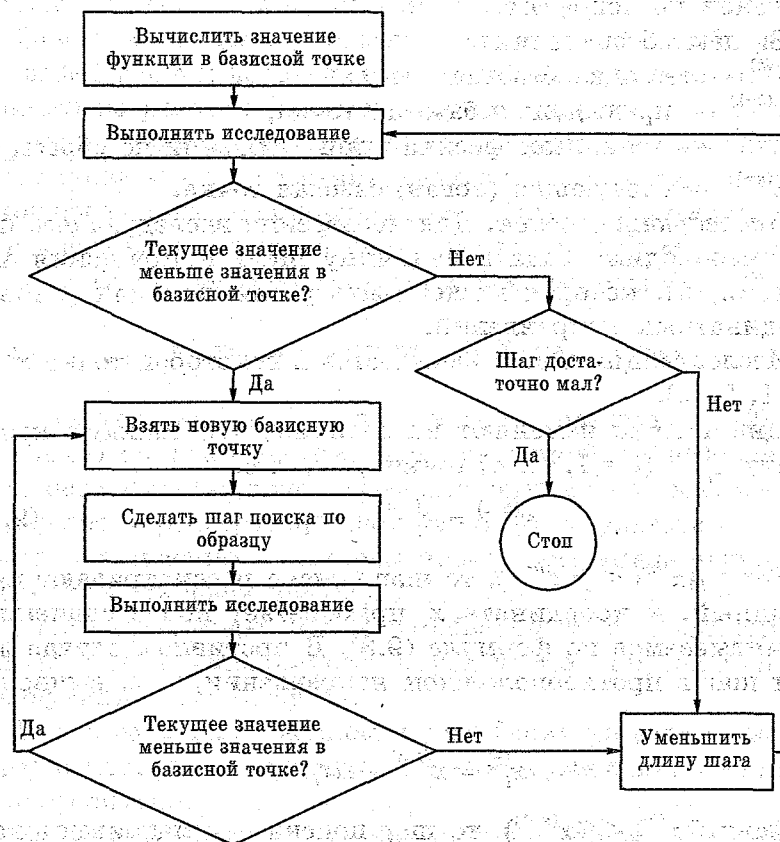


Рис. 9.5. Схема алгоритма метода Хука-Дживса

**Шаг 1.** Выбрать начальную базисную точку  $b_1$  и шаг длиной  $h_j$  для каждой переменной  $x_j, j = 1, 2, \dots, n$  скалярной целевой функции  $f(x)$ .

**Шаг 2.** Вычислить  $f(x)$  в базисной точке  $b_1$  с целью получения сведений о локальном поведении функции  $f(x)$ . Эти сведения будут использоваться для нахождения направления поиска по образцу, с помощью которого можно надеяться достичь большего убывания значения функции  $f(x)$ . Значение функции  $f(x)$  в базисной точке  $b_1$  находится следующим образом:

а) вычисляется значение функции  $f(b_1)$  в базисной точке  $b_1$ ;

б) каждая переменная по очереди изменяется прибавлением длины шага. Таким образом вычисляется значение функции  $f(b_1 + h_1 e_1)$ , где  $e_1$  — единичный вектор в направлении оси  $x_1$ . Если это приводит к уменьшению значения функции, то  $b_1$  заменяется на  $b_1 + h_1 e_1$ . В противном случае вычисляется значение функции  $f(b_1 - h_1 e_1)$ . Если её значение уменьшилось, то  $b_1$  заменяется на  $b_1 - h_1 e_1$ . Если ни один из проделанных шагов не приводит к уменьшению значения функции, то точка  $b_1$  остаётся неизменной и рассматриваются изменения в направлении оси  $x_2$ , т. е. находится значение функции  $f(b_1 + h_2 e_2)$  и т.д. Когда будут рассмотрены все  $n$  переменные, определяется новая базисная точка  $b_2$ ;

в) если  $b_2 = b_1$ , т. е. уменьшение функции  $f(x)$  не было достигнуто, то исследование повторяется вокруг той же базисной точки  $b_1$ , но с уменьшенной длиной шага. Как правило, на практике шаг уменьшают в десять раз от начальной длины;

г) если  $b_2 \neq b_1$ , то производится поиск по образцу.

**Шаг 3.** При поиске по образцу используется информация, полученная в процессе исследования, и минимизация целевой функции завершается поиском в направлении, заданном образцом. Эта процедура производится следующим образом:

а) движение осуществляется из базисной точки  $b_2$  в направлении  $b_2 - b_1$ , поскольку поиск в этом направлении уже привёл к уменьшению значения функции  $f(x)$ . Поэтому вычисляется значение функции в точке образца

$$P_1 = b_2 + (b_2 - b_1).$$

В общем случае

$$P_i = 2b_{i+1} - b_i;$$

б) выполняется исследование вокруг точки  $P_1(P_i)$ ;

в) если наименьшее значение на шаге 3б меньше значения в базисной точке  $b_2$  (в общем случае  $b_{i+1}$ ), то получают новую базисную точку  $b_3(b_{i+2})$ , после чего повторяется шаг 3а. В противном случае не производится поиск по образцу из точки  $b_2(b_{i+1})$ , а продолжают исследование в точке  $b_2(b_{i+1})$ .

**Шаг 4.** Завершается процесс поиска минимума, когда длина шага (длины шагов) будет уменьшена до заданного малого значения.

**Пример 9.1.** Найти точку минимума функции

$$f(x) = 8x_1^2 + 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2,$$

используя начальную точку  $x^{(0)} = (-4, -4)^T$ .

**Решение.** Необходимо задать величины:

$\Delta x = (1, 1)^T$  — векторная величина приращения;

$\alpha = 2$  — коэффициент уменьшения шага;

$\epsilon = 10^{-4}$  — параметр окончания поиска.

Итерации начинаются с исследующего поиска вокруг точки  $x^{(0)}$  (рис. 9.6). Вычисляем значение функции

$$f(x^{(0)}) = f(-3, -4) = 200 < f(x^{(0)}) = 272 \rightarrow \text{успех.}$$

Фиксируем  $x_2$  и даём приращение переменной  $x_1$ :

$$x_2 = -4; x_1 = -4 + 1 = -3.$$

Следовательно, необходимо зафиксировать  $x_1 = -3$  и дать приращение переменной  $x_2$ :  $x_1 = -3; x_2 = -4 + 1 = -3$ .

Вычисляем

$$f(-3, -3) = 153 < f(-3, -4) = 200 \rightarrow \text{успех.}$$

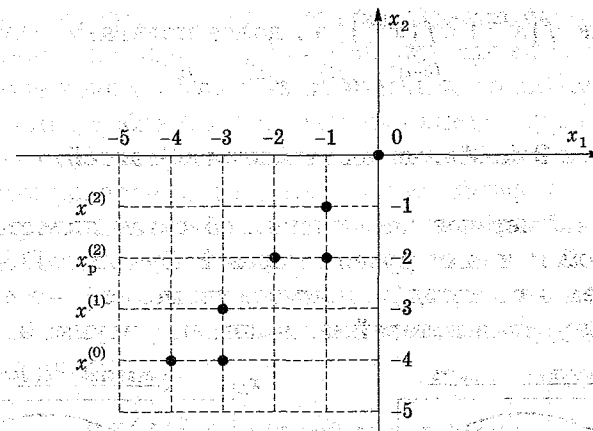


Рис. 9.6. Последовательность поиска

Таким образом, в результате исследующего поиска была найдена точка  $x^{(1)} = (-3, -3)^T$ ,  $f(x^{(1)}) = 153$ .

Так как исследующий поиск был удачным, переходим к поиску по образцу:

$$X_p^{(2)} = x^{(1)} + (x^{(1)} - x^{(0)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} + \left[ \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = [-2, -2]^T.$$

$$f(x_p^{(2)}) = 68.$$

Далее проводится исследующий поиск вокруг точки  $x_p^{(2)}$ , который оказывается удачным при использовании положительных приращений переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

В результате получаем точку  $x^{(2)} = (-1, -1)^T$ ;  $f(x^{(2)}) = 17$ .

Так как  $f(x^{(2)}) < f(x^{(1)})$ , то поиск по образцу следует считать успешным, и  $x^{(2)}$  становится новой базовой точкой при следующем проведении поиска по образцу.

Итерации продолжают до тех пор, пока уменьшение величины шага не укажет на окончание поиска в окрестности точки минимума  $x^* = (0, 0)^T$ .

Так как  $f(x^{(2)}) < f(x^{(1)})$ , то далее полагаем, что  $x^{(k-1)} = x^{(1)}$ ;  $x^{(k)} = x^{(2)}$ .

#### 9.4. Метод исключения областей

Одним из методов исключения областей является *метод касательной* к линии уровня целевой функции [18]. Продемонстрируем этот метод на примере двумерной целевой функции, линии уровня которой показаны на рисунке 9.7а.

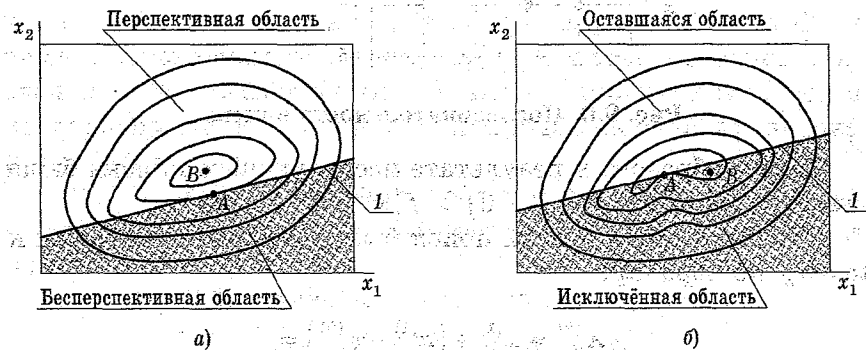


Рис. 9.7. Метод исключения областей в случае выпуклых (а) и вогнутых (б) линий уровня

Выберем произвольную точку  $A$  пространства проектирования, лежащую на линии уровня и проходящую несколько ниже точки  $B$ , которая соответствует оптимальному решению. Проведём через точку  $A$  касательную  $L$  к линии уровня, причём касательная, естественно, должна лежать в плоскости линии уровня и быть перпендикулярной локальному градиенту поверхности целевой функции. Если целевая функция достаточно гладкая и унимодальная, то касательная к линии уровня разделит пространство проектирования на две части, в одной из которых вероятность нахождения оптимума велика, а в другой — мала. Пользуясь этим приёмом в нескольких удачно выбранных точках, для которых известны значения целевой функции, можно

существенно сузить область поиска. Однако осуществление этого алгоритма связано с некоторыми трудностями. Если линии уровня вогнутые, а не выпуклые, то может оказаться исключённой область, содержащая экстремум (рис. 9.7б).

Кроме того, оставшаяся после нескольких исключений область неопределённости может иметь конфигурацию, малоприспособленную для применения других алгоритмов.

Рассматриваемый метод имеет модификацию под названием *метода сеточного поиска* [18]. Приводимые иллюстрации позволяют не демонстрировать данный метод примерами и задачами.

#### 9.5. Метод случайного поиска

Метод случайного поиска является одним из наиболее простых и универсальных методов получения решений, приближённых к оптимальным. Он заключается в случайном выборе направления движения на каждом шаге. Пусть после итерации  $k$  изображающая точка расположена в факторном пространстве в точке  $x^k$ . Проведём пробный эксперимент: прибавив случайный вектор  $o$ , фиксированной длины  $|o| = c$  ( $c$  — величина пробного шага), получим вторую точку  $(x^k + o)$ . Сравним отклики  $f(x^k)$  и  $f(x^k + o)$ , производим рабочий шаг длиной  $a$  в направлении вектора  $o$  в сторону уменьшения целевой функции  $f(x)$ . При этом величина рабочего шага  $a$  превышает величину пробного шага  $a > c$ .

Алгоритм метода (рис. 9.8):

**Шаг 1.** Определяется (или задаётся) начальная точка  $x^0 = x^1$  в факторном пространстве переменных.

**Шаг 2.** Задаётся значение пробного  $c$  и рабочего  $a$  шагов ( $c < a$ ) для случайного вектора  $o$  (предпочтительнее использовать безразмерные величины, т. е. вначале следует переходить к нормированному факторному пространству).

**Шаг 3.** Вычисляются координаты  $o_1, \dots, o_n$  вектора  $o$ , который является случайным вектором длины  $c$ , с равномерным законом распределения. Выбирается равномерно

распределённое на отрезке  $[0; c]$  случайное число, которое принимается за одну составляющую  $o_1$  вектора  $o$ ; по теореме Пифагора вычисляется вторая составляющая:

$$o_2 = \pm \sqrt{c^2 - o_1^2}.$$

Знак  $o_2$  принимается положительным, если предыдущее случайное число было чётным, и отрицательным, если предыдущее случайное число было нечётным. Знак  $o_2$  принимается положительным, если следующее случайное число чётное, и отрицательным, если оно нечётное.

**Шаг 4.** Производятся два пробных эксперимента в точках  $x^k$  и  $(x^k + o)$ , где  $k$  — номер шага. Сравниваются отклики в этих точках и формируется функция

$$I = \text{sign}(f(x^k) - f(x^k + o)).$$

Если  $I > 0$ , то происходит переход на шаги (3-6) (ещё надо задать число попыток поиска, т. е. подобных переходов).

Если  $I < 0$ , то осуществляется переход на шаг 5.

**Шаг 5.** Совершается рабочий шаг длиной  $a$  в направлении убывания уровня целевой функции, т. е.

$$x^{k+1} = x^k + I \frac{a}{p} o,$$

где  $p$  — равномерно распределённая переменная, выбираемая из интервала  $(0; 1)$ .

**Шаг 6.** Точку  $x^{k+1}$  принимают за новую начальную точку и переходят к шагам (3-6), если не выполняется критерий на шаге 7. Если окажется, что  $f(x^k) = f(x^k + o)$ , то вопрос о направлении движения определяется вновь по случайному числу, например:

— в сторону  $x^k + o$  при выпадении чётного случайного числа;

— в сторону  $x^k - o$  при нечётном случайном числе.

**Шаг 7.** Критерием выхода в область минимума является многократное повторение ситуации  $f(x^k) < f(x^k + o)$  (например, 100-кратное повторение, задаваемое в начальных условиях).

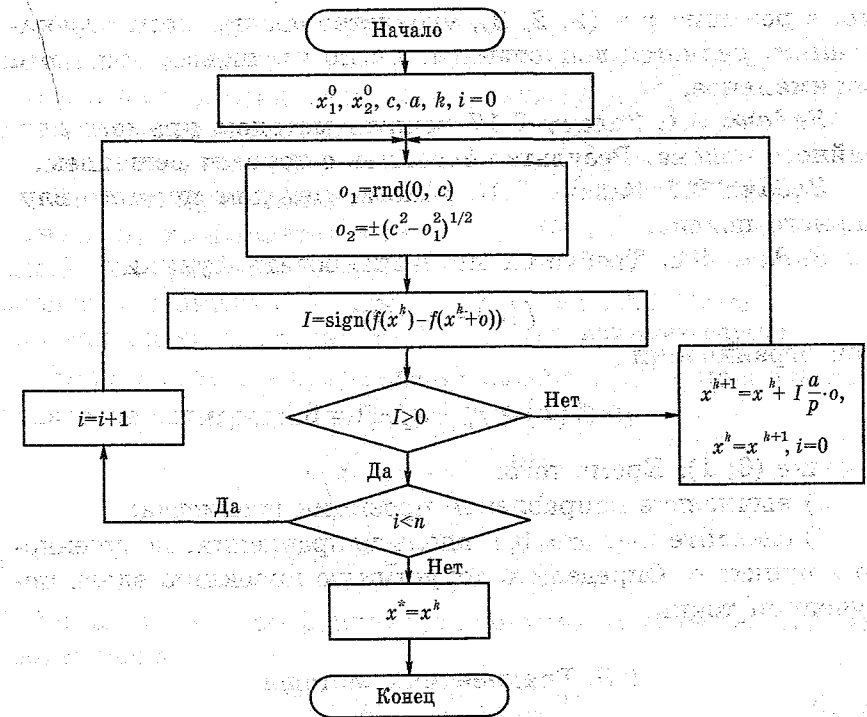


Рис. 9.8. Схема алгоритма метода случайного поиска

**Пример 9.2.** Требуется минимизировать функцию

$$F = x_1 x_2 x_3$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 3x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 3x_2 x_3 &= 36; \\ x_1 > 0; x_2 > 0; x_3 > 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

В данном случае берём любые сочетания решений. Так, взятое наугад решение  $x = (1, 3, 5)$  не является допустимым, так как при  $x_1 = 1, x_2 = 3$  и  $x_3 = 5$  не удовлетворяется ограничение, заданное уравнением (9.3). По понятным причинам и другое решение  $x = (10, -10, 10)$  также недопусти-

мо, а решение  $x = (2, 2, 2)$ , удовлетворяющее всем ограничениям, является допустимым. Легко убедиться, что оно и оптимальное.

**Задача 9.1.** Задачу 7.17 решить методом прямого случайного поиска. Результат сравнить с точным решением.

**Задача 9.2.** Задачу 7.18 решить методом прямого случайного поиска.

**Задача 9.3.** Требуется минимизировать функцию

$$f(x) = x_1 + x_2$$

при ограничении

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

в точке  $(0; 1)$ . Кроме того:

а) вычислите направление проекции градиента;

б) сделайте шаг  $\alpha = 0,1$  вдоль направления, полученного в пункте а. Определите допустимую проекцию вдоль полученной точки.

## 9.6. Градиентные методы

Градиентные методы можно применять к любой задаче нелинейного программирования. Однако они приводят лишь к локальному экстремуму, а поэтому оказываются более эффективными при решении задач выпуклого программирования, в которых всякий локальный экстремум есть одновременно и глобальный.

Градиентные методы в отличие от методов прямого поиска, которые используют в процедурах поиска только значения целевой функции в исследуемых точках, предполагают наличие информации о производных функции. Это позволяет сократить количество необходимых вычислений значений исследуемой функции.

Градиентные методы делят на две группы:

— численные методы в задачах без ограничений: *покоординатного спуска*;

численные методы в задачах с ограничениями: *сопряжённых направлений, условного градиента, барьерных функций* (гл. 13).

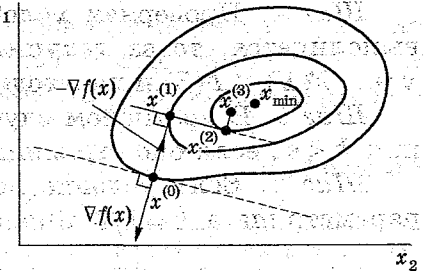


Рис. 9.9. Метод градиентного спуска

Если ищут максимум функции, то делается ход (шаг) в направлении её градиента, а минимум — против направления градиента.

Если в качестве направления поиска  $s(x^{(h)})$  принять направление антиградиента функции (рис. 9.9)

$$s(x^{(h)}) = -\nabla f(x^{(h)}), \quad (9.6)$$

где

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

является градиентом функции, то получим из выражения (9.4) соотношение

$$x^{(h+1)} = x^{(h)} - \alpha^{(h)} \nabla f(x^{(h)}). \quad (9.7)$$

Алгоритм расчёта градиентным методом (рис. 9.10).

**Исходные данные:** функция  $n$  переменных  $f(x)$ , точность  $\varepsilon$ , величина параметра шага  $h$  и точка начального приближения  $x_0$ , расположенная в области поиска экстремума.

**Шаг 1.** За текущее значение вектора приближения принимаем начальное приближение  $\bar{x} = x^0$  и вычисляем значение функции в этой точке  $F(\bar{X}) = f(\bar{x})$ .

**Шаг 2.** Вычисляем вектор градиента

$$\bar{G} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}$$

(единичный вектор градиента).

**Шаг 3.** Делаем шаг в направление антиградиента  $z = \bar{x} - hV$  и вычисляем значение функции в точке  $Z$ :  $F(Z) = f(z)$ .

**Шаг 4.** Проверяем условие  $F(Z) < F(X)$ . Если условие выполняется, то за текущее приближение принимаем  $z$ ,  $x = z$ ,  $F(X) < F(Z)$  и переходим на шаг 3.

**Шаг 5.** В противном случае проверяем условие окончания  $h < \varepsilon$ , если оно выполняется, то выводим  $x$  и  $F(X)$ .

**Шаг 7.** Если условие не выполняется, то уменьшаем параметр шага  $h = h/3$  и переходим на шаг 3.

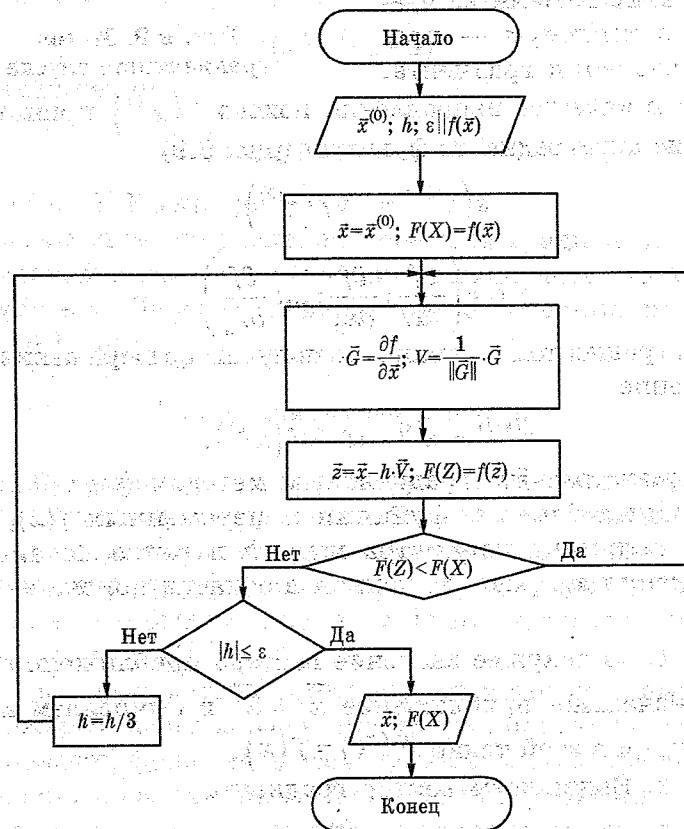


Рис. 9.10. Схема алгоритма градиентного метода

**Пример 9.3.** Предприятие может выпускать два вида изделий. На их изготовление идёт три типа ресурсов. Запас

сы ресурсов на предприятии, плановые нормы их расхода  $a_{ij}$  ( $i = 1, 3; j = 1, 2$ ), плановая себестоимость  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) и оптовые цены указаны в таблице 9.1 (все данные в расчёте на 1 тыс. шт изделий).

Таблица 9.1

Тип ресурса	Запас ресурса	Норма расхода ресурса на изделие вида	
		1	2
I	100	10	20
II	120	20	10
III	150	20	20
Себестоимость, ден. ед.		5	10
Цена, ден. ед.		7	13

Из-за брака в процессе производства расход ресурсов зависит от объёма  $x_j$  ( $j = 1, 2$ ) производства изделий и в первом приближении выражается линейной функцией  $a_{ij} + x_j$ , а себестоимость продукции — функцией  $C_j + 0,1x_j$ .

Изделия могут выпускаться в любых соотношениях, так как их сбыт обеспечен. Составить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

**Решение.** На изготовление планируемых к выпуску  $x_1$  и  $x_2$  единиц изделий 1-го и 2-го видов соответственно (за единицу изделия примем 1 тыс. шт) будет израсходовано  $(10 + x_1)x_1 + (20 + x_2)x_2$  единиц ресурса I типа;  $(10 + x_1) + (20 + x_2)$  — расход ресурса I типа на единицу изделия соответственно 1-го и 2-го видов. По условию

$$(10 + x_1)x_1 + (20 + x_2)x_2 \leq 100 \quad (9.8)$$

нетрудно получить ограничение по I-типу ресурсов:

Аналогичным образом получаем ограничения по другим типам ресурсов.

В результате реализации единицы изделия 1-го вида предприятие получит прибыль  $(7 - (5 + 0,1x_1))$  ден. ед., изделия 2-го вида — прибыль  $(13 - (10 + 0,1x_2))$ .



Общая прибыль предприятия

$$f = (7 - (5 + 0,1x_1))x_1 + (13 - (10 + 0,1x_2))x_2$$

или

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 0,1x_1^2 - 0,1x_2^2. \quad (9.9)$$

Итак, задача свелась к нахождению неотрицательных  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих нелинейным ограничениям и доставляющих максимум нелинейной функции (9.9).

В целевой функции и ограничениях переменные содержатся в степенях выше первой. Это характерный признак задачи нелинейного программирования.

По условиям примера необходимо найти оптимальный план выпуска изделий.

Математически задача сводится к максимизации функции (9.9) при ограничениях:

$$\left. \begin{aligned} 10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 &\leq 100; \\ 20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2 &\leq 120; \\ 20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 &\leq 150; \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Перепишем неравенства в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\bar{x}) &= 100 - (10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2) \geq 0; \\ \varphi_2(\bar{x}) &= 120 - (20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2) \geq 0; \\ \varphi_3(\bar{x}) &= 150 - (20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

В качестве начальной возьмём точку  $\bar{x}_0 = (1; 3)$ . Она принадлежит допустимой области, что легко проверяется подстановкой координат в соотношения (9.10). В этой точке  $f(\bar{x}_0) = 10$  (рис. 9.11).

Координаты градиента  $\nabla f(\bar{x})$  равны  $\partial f/\partial x_1 = 2 - 0,2x_1$ ,  $\partial f/\partial x_2 = 3 - 0,2x_2$ , а в точке  $\bar{x}_0$   $\nabla f(\bar{x}_0) = (1,8; 2,4)$ .

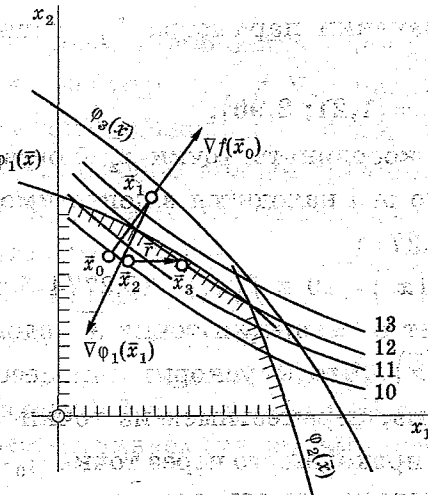


Рис. 9.11. Расчётная схема

Из точки  $\bar{x}_0$  переместимся вдоль градиента  $\nabla f(\bar{x}_0)$  в новую точку  $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \nabla f(\bar{x}_0)\lambda_1 = (1 + 1,8\lambda_1; 3 + 2,4\lambda_1)$ , причём параметру  $\lambda_1$  придадим значение, например, 0,5. Получим  $\bar{x}_1 = (1,9; 4,2)$ .

Проверим, принадлежит ли точка  $\bar{x}_1$  допустимой области:

$$\varphi_1(\bar{x}_1) = -24,25 < 0; \quad \varphi_2(\bar{x}_1) = 18,75 > 0; \quad \varphi_3(\bar{x}_1) = 6,75 > 0.$$

Точка  $\bar{x}_1$  лежит за пределами области допустимых решений, так как нарушено первое ограничение системы (9.10). Необходимо вернуться в допустимую область и при этом сдвинуться в сторону точки максимума. Находим градиент нарушенной граничной функции  $\varphi_1(\bar{x}_1)$  и вычисляем его координаты в точке  $\bar{x}_1$ :

$$\partial \varphi_1/\partial x_1 = -10 - 2x_1, \quad \partial \varphi_1/\partial x_2 = -20 - 2x_2,$$

$$\nabla \varphi_1(\bar{x}_1) = (-13,8; -24,8).$$

Следующую точку

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \nabla \varphi_1(\bar{x}_1)\lambda_2 = (1,9 - 13,8\lambda_2; 4,2 - 24,8\lambda_2)$$

найдем при значении параметра  $\lambda_2$ , равном, например,  $\lambda_2 = 0,05$ .

Получим  $\bar{x}_2 = (1,21; 2,96)$ .

Подставляя координаты точки  $\bar{x}_2$  в ограничения (9.10), убеждаемся, что она находится в допустимой области. При этом  $f(\bar{x}_2) = 10,2774$ .

Значения  $f(\bar{x}_0) = 10$  и  $f(\bar{x}_2) = 10,2774$  близки между собой, что говорит о смещении точки  $\bar{x}_2$  вдоль линии уровня функции  $f(\bar{x})$ . Чтобы ускорить процесс сходимости к точке максимума, переместимся из точки  $\bar{x}_2$  в направлении вектора  $\bar{r}$ , проходящего через точки  $\bar{x}_0$  и  $\bar{x}_2$  (рис. 9.6).

Находим координаты вектора  $\bar{r}$ :

$$\bar{r} = (1,21 - 1; 2,96 - 3) = (0,21; -0,04).$$

Очередную точку

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_2 + \bar{r}\lambda_3 = (1,21 + 0,21\lambda_3; 2,96 - 0,04\lambda_3)$$

найдем, приняв  $\lambda_3$  равным, например, 6,5. Получим  $\bar{x}_3 = (2,5750; 2,7000)$ . Подставляя координаты точки  $\bar{x}_3$  в ограничения (9.10), находим

$$\varphi_1(\bar{x}_3) = 6,3294 > 0, \quad \varphi_2(\bar{x}_3) = 20,2894 > 0,$$

$$\varphi_3(\bar{x}_3) = 30,5794 > 0.$$

Таким образом, точка  $\bar{x}_3$  принадлежит области допустимых решений. При этом  $f(\bar{x}_3) = 11,8579$ .

Найдем градиенты  $\nabla f$  и  $\nabla \varphi_1$  функций  $f$  и  $\varphi_1$  в точке  $\bar{x}_3$ :

$$\nabla f(\bar{x}_3) = (1,4850; 2,4600); \quad \nabla \varphi_1(\bar{x}_3) = (-15,15; -25,40).$$

Вычислим отношения одноименных координат этих векторов:

$$\frac{1,4850}{-15,15} = -0,098; \quad \frac{1,4850}{-15,15} = -0,098; \quad \frac{2,4600}{-25,40} = -0,097.$$

Отношения незначительно отличаются друг от друга по величине. Значит, векторы  $\nabla f$  и  $\nabla \varphi_1$  практически коллинеарные и перемещение вдоль них будет происходить по зигзагообразной траектории вблизи границы с пересечением её. Учитывая, кроме того, что отклонение  $\varphi_1(\bar{x}_3) = 6,3294$  от нуля сравнительно невелико и точка  $\bar{x}_3$  принадлежит допустимой области, задачу можно считать решенной, т. е.  $\bar{x}_3^* \approx (2,5750; 2,7000)$ ,  $f_{\max} = 11,8579$ .

Итак, производить следует 2575 штук изделий 1-го вида и 2700 штук изделий 2-го вида. При этом прибыль предприятия по рассматриваемым видам изделий составит 11857,9 ден. ед.

**Метод наискорейшего спуска или метод Коши.** Выражение (9.7) определяет реализацию данного метода. В нём значение  $\alpha^{(k)}$  на каждой итерации вычисляется путём решения задачи поиска минимума функции  $f(x^{(k+1)})$  вдоль направления  $\nabla f(x^{(k)})$  с помощью того или иного метода одномерного поиска.

Метод обладает высокой надёжностью и устойчивостью. Однако методу свойственны и некоторые недостатки [1].

Приняв в качестве параметра  $\alpha^{(k)}$  в формуле (9.7) некоторое положительное число  $\alpha$ , получим выражение, определяющее вычислительную схему:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}), \quad (9.11)$$

которая определяет реализацию простейшего градиентного метода при поиске минимума многомерной функции. Метод обладает рядом недостатков, из которых следует отметить следующие: *во-первых*, возникает необходимость выбора подходящего значения параметра  $\alpha$ ; *во-вторых*, методу свойственна медленная сходимость к точке минимума вследствие малости градиента  $\nabla f$  в окрестности почти стационарной области.

Алгоритм расчёта методом Коши представлен на рисунке 9.12.

вообще говоря, не может служить приемлемым глобальным направлением поиска точек оптимума нелинейных функций. Метод Коши основывается на последовательной линейной аппроксимации целевой функции и требует вычисления значений функции и её первых производных на каждой итерации.

**Пример 9.4.** Требуется минимизировать функцию

$$f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

и используем метод Коши для решения задачи её минимизации.

**Решение.** Прежде всего, вычислим компоненты градиента

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 16x_1 + 4x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 4x_1.$$

Для применения метода наискорейшего спуска зададим начальное приближение

$$x^{(0)} = [10, 10]^T$$

и с помощью формулы (9.7) построим новое приближение

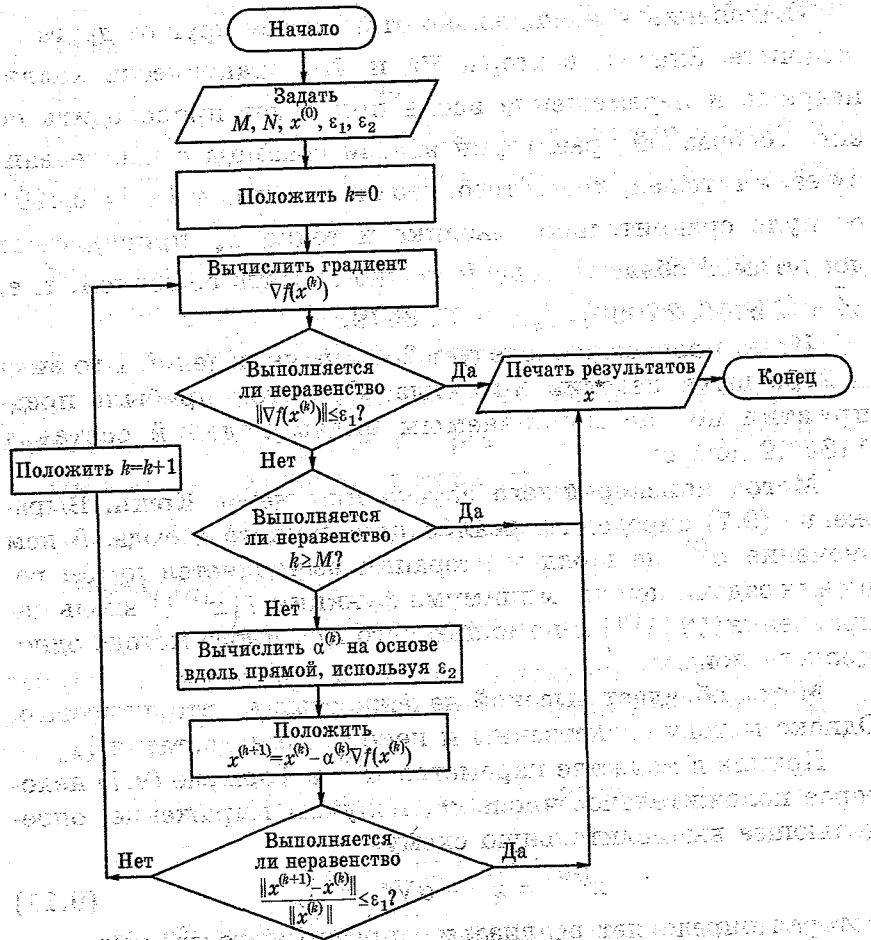
$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha^{(0)} \nabla f(x^{(0)}).$$

Выберем  $\alpha^{(0)}$  таким образом, чтобы  $f(x^{(1)}) \rightarrow \min$ ;  $\alpha^{(0)} = 0,056$ . Следовательно,  $x^{(1)} = [-1, 20, 2, 16]^T$  далее найдём точку

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \alpha^{(1)} \nabla f(x^{(1)}),$$

вычислив градиент в точке  $x^{(1)}$  и проведя поиск вдоль прямой.

В таблице 9.2 представлены данные, полученные при проведении итераций на основе одномерного поиска по методу квадратичной интерполяции [11]. Последовательность полученных точек изображена на рисунке 9.13.



**Рис. 9.12.** Схема алгоритма метода Коши

Видим, что в методе Коши применяется «наилучшая» локальная стратегия поиска с использованием градиента. Однако движение в направлении, противоположном градиенту, приводит в точку минимума лишь в том случае, когда линии уровня функции  $f$  представляют собой окружности. Таким образом, направление, противоположное градиенту,

Таблица 9.2  
Результаты вычислений по методу Коши

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$F(x^{(k)})$
1	-1,2403	2,1181	24,2300
2	0,1441	0,1447	0,3540
3	-0,0181	0,0309	0,0052
4	0,0021	0,0021	0,0000

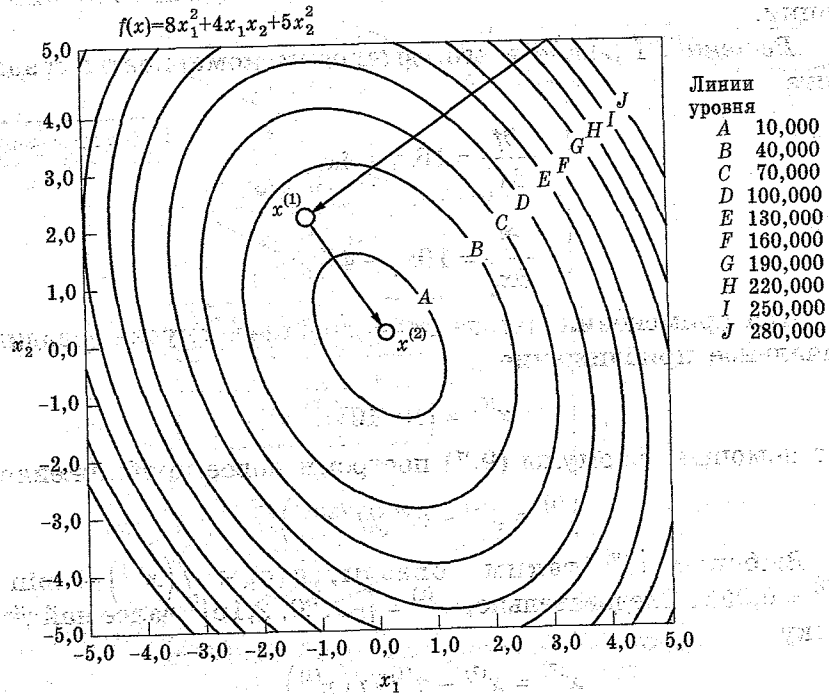


Рис. 9.13. Итерации по методу Коши с использованием метода квадратичной интерполяции

Несмотря на то, что метод Коши не имеет большого практического значения, он реализует важнейшие шаги большинства градиентных методов. Заметим, что работа алго-

ритма завершается, когда модуль градиента или модуль вектора  $\Delta x$  становится достаточно малым.

**Метод Ньютона.** Чтобы построить более общую стратегию оптимизационного поиска, следует воспользоваться второй производной целевой функции.

Для этого разложим целевую функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора и, произведя необходимые преобразования [11], получаем

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x,$$

$$\text{где } \Delta x = -\nabla^2 f(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}).$$

Следовательно, последовательное применение схемы квадратичной аппроксимации приводит к реализации оптимизационного метода Ньютона по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \nabla^2 f(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}). \quad (9.12)$$

Анализ свойств сходимости метода Ньютона выполнен в работе [11].

Использование рассматриваемого метода показано в следующем примере.

**Пример 9.5.** Минимизируем функцию из предыдущего примера:

$$f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2,$$

откуда

$$\nabla f(x) = [16x_1 + 4x_2, 10x_2 + 4x_1]^T,$$

$$\nabla^2 f(x) = H = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

При  $x^{(0)} = [10, 10]^T$  из формулы (9.12) получаем

$$x^{(1)} = [10, 10]^T - \frac{1}{144} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}^T = [200, 140]^T,$$

и, следовательно,

$$x^{(1)} = [10, 10]^T = \frac{1}{144} [1440, 1440]^T = [0, 0]^T,$$

что совпадает с точным решением.

Таким образом, задача минимизации квадратичной функции решается с помощью одной итерации по методу Ньютона (при любой начальной точке).

**Метод сопряжённых градиентов (Флетчера-Ривса).** Этот и последующие методы обладают достоинствами методов Коши и Ньютона и основаны на вычислении значений только первых производных. Они, во-первых, обладают высокой надёжностью и при поиске  $x^*$ , а, во-вторых, быстро сходятся в окрестности точки минимума. Рассматриваемый метод подробно изложен в работе [11] и там же иллюстрируется примером.

**Квазиньютоновские методы (Дэвидона-Флетчера-Пауэлла).** Эти методы называются также методами *переменной метрики*. Они обладают положительными свойствами метода Ньютона и, как показано выше, в них используются лишь первые производные.

Данные методы также изложены в работе [11] с соответствующими примерами.

### 9.7. Сравнение методов

При отборе методов можно руководствоваться следующими принципами:

— методы должны иметь принципиальное значение либо служить средством для иллюстрации определённых фундаментальных идей;

— методы решения оптимизационных задач должны быть естественно реализованы на ЭВМ.

В обзоре результатов сравнения методов и программ указаны следующие методы:

— время работы центрального процессора;

- точность получаемого решения;
- число итераций;
- робастность;
- количество вычислений функций;
- удобство пользователя;
- требования к памяти;
- число основных операций.

Проанализируем различие между проверкой работы алгоритма и проверкой работы программы. Результаты, получаемые в обоих случаях, представляют несомненный интерес, рассмотрим сначала разницу между алгоритмом и его реализацией в виде программы вычислительной машины.

Сравнение алгоритмов можно проводить на основе пошагового принципа. Например, можно подсчитать число операций (т. е. число вычислений функции и градиентов или число сложений, вычитаний, умножений и делений, приходящихся на одну итерацию) или провести другие вычисления, связанные с логикой алгоритма и положенные в основу сравнения. На основе алгоритмов пишется программа для машинной реализации.

Имеющиеся данные позволяют выявить достоинства и недостатки методов, и отсюда область применения:

— достоинства метода Коши и Ньютона: первый из них эффективен при значительных расстояниях от оптимального решения  $x^*$ , а второй — вблизи  $x^*$ ;

— метод сопряжённых градиентов (Флетчера-Ривса) обладает достоинствами методов Коши и Ньютона;

— градиентные методы имеют два недостатка: во-первых, чем ближе к экстремуму, тем меньше должен быть шаг (в данном случае машина может «застопориться»); во-вторых, плохо работает на «овражных» функциях;

— метод Хука-Дживса применим для поверхностей, описываемых целевой функцией, причём поверхности имеют неглубокие впадины [18];

— метод случайного поиска не позволяет непосредственно найти оптимальное решение, однако он создаёт

предпосылки для применения в дальнейшем других методов поиска.

**Заключение.** Материал данной главы знакомит пользователя с численными методами решения задач минимизации (максимизации) нелинейной функции при наличии или отсутствии ограничений, причём решаются задачи многомерного поиска наиболее простыми методами, разработанными к настоящему времени.

#### Вопросы для самопроверки

1. Перечислите методы нелинейного программирования.
2. Опишите метод покоординатного спуска.
3. Продемонстрируйте метод исключения областей.
4. Каков алгоритм градиентных методов?
5. Раскройте алгоритм метода конфигураций Хука-Дживса.
6. В чём заключается сущность метода случайного поиска?

## 10. МЕТОДЫ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

В этой главе рассматриваются численные методы решения задач путём линеаризации, т. е. кусочно-линейной аппроксимации.

### Основные понятия и определения

**Линеаризация** — кусочно-линейная аппроксимация, т. е. замена нелинейной зависимости приближённой линейной с последующим использованием метода линейного программирования.

**Метод линеаризации** — кусочно-линейная аппроксимация целевой функции и ограничений с последующим использованием метода линейного программирования.

### 10.1. Основные положения

В отдельных задачах оптимизации нелинейные функции могут быть аппроксимированы кусочно-линейными с последующим использованием метода линейного программирования, причём целевые функции могут быть одной или нескольких переменных. Кроме того, выполняется кусочно-линейная аппроксимация и нелинейных ограничений.

Один из способов линеаризации выпуклой кривой представлен на рисунке 10.1. Как видно, проводим касательную  $l$  параллельно хорде  $AB$  и полученную точку  $C$  соединяем с точками  $A$  и  $B$ .

Пример кусочно-линейной аппроксимации функции одной переменной показан на рисунке 10.2.

Рассмотрим сущность метода линеаризации, которая заключается в следующем [7]. На каждом шаге ограничения задачи линеаризуют (т. е. вместо исходных ограничений используют их линейные аппроксимации в очередной точке), а целевую функцию также линеаризуют, но, для

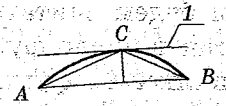


Рис. 10.1. Способ линеаризации

того чтобы получающаяся линейризованная задача имела решение, к целевой функции добавляют некоторое квадратичное слагаемое. Решение этой задачи квадратичного программирования принимают за следующее приближение.

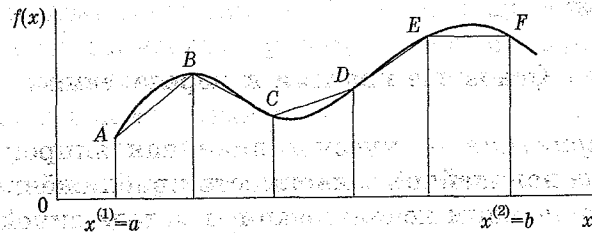


Рис. 10.2. Кусочно-линейная аппроксимация

Будем рассматривать задачу нелинейного программирования

$$f_0(x) \rightarrow \min; f_i(x) \leq 0, i \in I = \{1, 2, \dots, m\},$$

в которой все функции предполагаем дифференцируемыми. Введём функцию

$$F(x) = \max \{f_i(x) \mid i \in I\}$$

и будем считать, что  $F(x) \geq 0$  для всех  $x$  (это допустимо, так в число функций в ограничениях задачи всегда можно включить функцию, тождественно равную нулю). Введём множество

$$I_\delta(x) = \{i \in I \mid f_i(x) \geq F(x) - \delta\}, \delta \geq 0.$$

Пусть  $x^{(0)}$  — начальная точка,  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) — фиксированное число и  $x^{(k)}$  —  $k$ -е приближение. Кроме того, пусть  $N$  — положительная константа, обладающая тем свойством, что множество вида

$$\{x \in R^n \mid f_0(x) + NF(x) \leq f_0(x^{(0)}) + NF(x^{(0)})\}$$

ограничено.

Очередное приближение строят следующим образом. При  $x = x^{(k)}$  решают задачу квадратичного программирования

$$\langle \nabla f_0(x), p \rangle + \frac{1}{2} \|p\|^2 \rightarrow \min_p;$$

$$\langle \nabla f_i(x), p \rangle + f_i(x) \leq 0, i \in I_\delta(x).$$

Проще всего это выполнить, перейдя к соответствующей двойственной задаче, которая в данном случае состоит в максимизации по неотрицательным  $\lambda_i, i \in I_\delta(x)$ , функций вида

$$\min_{p \in R^n} \left[ \langle \nabla f_0(x), p \rangle + \frac{1}{2} \|p\|^2 + \sum_{i \in I_\delta} \lambda_i (\langle \nabla f_i(x), p \rangle + f_i(x)) \right]. \quad (10.1)$$

Вектор  $p$ , реализующий здесь минимум, легко найти, дифференцируя по  $p$  выражение в квадратных скобках и приравнявая полученный результат нулю:

$$p = -\nabla f_0(x) - \sum_{i \in I_\delta(x)} \lambda_i \nabla f_i(x). \quad (10.2)$$

Подставив найденное выражение для  $p$  в (10.1), получим, что двойственная задача сводится к максимизации по неотрицательным  $\lambda_i, i \in I_\delta(x)$ , квадратичной функции

$$-\frac{1}{2} \left\| \nabla f_0(x) + \sum_{i \in I_\delta(x)} \lambda_i \nabla f_i(x) \right\|^2 + \sum_{i \in I_\delta(x)} \lambda_i f_i(x).$$

Это уже простейшая задача квадратичного программирования, и для её решения может быть применён конечный алгоритм предыдущего пункта. Обозначим решение указанной задачи через  $\lambda_i^{(k)}$ .

Подставляя  $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}$  в (10.2), найдём соответствующий вектор  $p = p^{(k)}$ , который определит направление движения из точки. Для установления длины шага последовательно проверяем неравенства

$$f_0(x^{(k)} + 2^{-i} p^{(k)} + NF(x^{(k)} + 2^{-i} p^{(k)})) \leq f_0(x^{(k)}) + NF(x^{(k)}) - 2^{-i} \|p^{(k)}\|^2$$

для  $i = 0, 1, 2, \dots$  и фиксируем первое значение  $i = i_0$ , при котором неравенство выполнится. Окончательно следует положить

$$\alpha_k = 2^{-i_0}, x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}.$$

Константу  $N$  подбирают из условия выполнения неравенства

$$N \geq \gamma = \sum_{i \in I_0(x)} \lambda_i.$$

Слишком большим  $N$  выбирать не следует, поскольку это приводит к весьма малой длине шага  $\alpha_k$ . Если на некотором шаге оказывается  $N \leq \gamma$ , то  $N$  заменяют на  $N = 2\gamma$ . Величину  $\delta$  нужно уменьшать в том случае, если вспомогательная задача квадратичного программирования не имеет решения. Значение  $\delta$  желательно иметь по возможности большим.

Последовательность  $\{x^{(h)}\}$ , построенная методом линеаризации, обладает следующим свойством: каждая её предельная точка удовлетворяет исходным ограничениям  $f_j(x) \leq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , и является стационарной точкой функции Лагранжа  $f_0(x) + \sum_{i \in I_0(x)} \lambda_i f_i(x)$  при некоторых неотрицательных  $\lambda_i$ .

Методы линеаризации универсальны, и их можно использовать при решении задач нелинейного программирования, в которых кроме ограничений-неравенств имеются и ограничения равенства.

## 10.2. Обобщённый метод приведённого градиента

*Алгоритм этого метода следующий.* Пусть даны начальная допустимая точка  $x^0$ , начальное значение параметра поиска  $\alpha = \alpha^0$ , параметры окончания вычислений  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3 > 0$  и параметр уменьшения длины шага  $\gamma, 0 < \gamma < 1$ .

**Шаг 1.** Выбрать разбиение  $x$  на  $\bar{x}$  и  $\hat{x}$  так, чтобы определитель матрицы  $J$  был ненулевым, и вычислить приведённый градиент  $\nabla \bar{f}(x^{(t)})$ .

**Шаг 2.** Если  $\|\nabla \bar{f}\| \leq \varepsilon$ , то закончить вычисления. В противном случае положить

$$\bar{d} = -(\nabla \bar{f})^r, \quad \hat{d} = -J^{-1}C\bar{d}, \quad d = (\hat{d}, \bar{d})^r.$$

**Шаг 3.** Положить  $\alpha = \alpha^0$ . Для  $i = 1, 2, \dots$  выполнить следующие действия:

а) вычислить  $v^{(i)} = x^{(i)} + \alpha d$ . Если

$$\|h_k(v^{(i)})\| \leq \varepsilon_2, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

то перейти к пункту (г). В противном случае продолжить вычисления;

б) пусть

$$\begin{aligned} \hat{v}^{(i+1)} &= \hat{v}^{(i)} - J^{-1}(v^{(i)})h(v^{(i)}), \\ \bar{v}^{(i+1)} &= \bar{v}^{(i)}; \end{aligned}$$

в) если

$$\left\| \hat{v}^{(i+1)} - \hat{v}^{(i)} \right\| > \varepsilon_3,$$

то перейти к пункту (б). В противном случае, если

$$\begin{aligned} \|h_k(v^{(i)})\| &\leq \varepsilon_2, \\ k &= 1, 2, \dots, K, \end{aligned}$$

то перейти к пункту (г), или положить  $\alpha = \gamma\alpha$  и перейти к пункту (а);

г) если

$$f(x^{(t)}) \leq f(v^{(t)}),$$

то положить  $\alpha = \gamma\alpha$  и перейти к пункту (а). В противном случае положить  $x^{(t+1)} = v^{(t)}$  и перейти к шагу 1.

Применение этого алгоритма проиллюстрируем следующим примером.

**Пример 10.1.** Пусть требуется линеаризовать ограничение

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 - x_2 + 1 = 0$$

в точке  $x^{(0)} = (1/2, 7/8)$ .



Линейной аппроксимацией является

$$h(x; x^{(0)}) = 0 + \frac{3}{4} \left( x_1 - \frac{1}{2} \right) - \left( x_2 - \frac{7}{8} \right).$$

Дальнейшее решение примера приведено в работе [11].

### 10.3. Метод проекций градиента

**Алгоритм этого метода.** Пусть требуется вычислить  $P$  в предположении, что векторы  $a^k$  линейно независимы, заданы допустимая точка  $x^{(t)}$  и допустимая погрешность сходимости  $\varepsilon > 0$ .

**Шаг 1.** Вычислить  $s^{(t)} = -P\nabla f$ .

**Шаг 2.** Если  $\|S^{(t)}\| \leq \varepsilon$ , то вычислить  $v$  по формуле

$$v = (AA^T)^{-1} \nabla f,$$

где  $A$  — матрица со строками  $a_k^T$ .

Затем закончить вычисления. В противном случае продолжить вычисления.

**Шаг 3.** Определить максимальную длину шага

$$\alpha_{\max} = \min \left\{ \max \left( 0, \frac{b_k - a_k^T x^{(t)}}{a_k^T s^{(t)}} \text{ или } \infty, \text{ если } a_k^T s^{(t)} = 0 \right), k=1, \dots, K \right\}.$$

**Шаг 4.** Решить задачу одномерного поиска: минимизировать

$$f(x^{(t)} + \alpha s^{(t)}), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}.$$

**Шаг 5.** Положить  $x^{(t+1)} = x^{(t)} + \alpha s^{(t)}$  и перейти к шагу 1.

Этот алгоритм, за исключением процедуры определения вектора поиска, мало отличается от метода приведённого градиента. Отметим, что для вычисления  $P$  требуется, чтобы векторы коэффициента  $a_k$  в ограничениях были линейно независимы. Поскольку зависимые линейные ограничения не влияют на решение и их можно исключить

из рассмотрения, это требование не представляется существенным.

**Пример 10.2.** Рассмотрим применение метода проекций градиента для решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ & \text{при ограничениях } \begin{cases} g_1(x) = x_1 - 2x_2 \geq -2, \\ g_2(x) = -x_1 - x_2 \geq -4, \\ g_3(x) = x_1 \geq 0, \\ g_4(x) = x_2 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где в качестве допустимой начальной точки используется  $x^0 = (0, 0)$ .

Решение примера приведено в работе [11].

**Заключение.** Материал данной главы знакомит пользователя с численными методами линеаризации.

#### Вопросы для самопроверки

1. В чём заключается сущность метода линеаризации?
2. Перечислите методы линеаризации.
3. Раскройте алгоритм обобщённого метода приведённого градиента.
4. В чём заключается сущность метода проекций градиента?

## 11. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В данной главе рассматриваются основы и алгоритм линейного и нелинейного динамического программирования, и приводятся примеры решения задач. Учитывая практическую значимость таких задач, динамическое программирование выделено в отдельную главу. Этот метод оптимизации используется ниже при решении задач оптимального управления, в частности ресурсами.

### Основные понятия и определения

**Динамическое программирование** — метод решения задач оптимизации многостадийных процессов, а также для процессов (в том числе управления), которые могут быть математически описаны как многостадийные.

#### 11.1. Основы и алгоритм динамического программирования

Термин «динамическое программирование» обусловлен тем, что этот метод первоначально применялся к оптимизации динамических систем — систем, меняющихся во времени, эволюция которых может управляться некоторыми переменными управления. Однако, этот метод носит более общий характер и может успешно применяться к задачам, в которых время не участвует, например, к задачам целочисленной оптимизации.

Динамическое программирование обычно придерживается двух подходов к решению задач:

— нисходящее динамическое программирование: задача разбивается на подзадачи меньшего размера, они решаются и затем комбинируются для решения исходной задачи. Используется запоминание для решений часто встречающихся подзадач.

— восходящее динамическое программирование: все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для ре-

шения исходной задачи, просчитываются заранее и затем используются для построения решения исходной задачи. Этот способ лучше нисходящего программирования в смысле размера необходимого стека и количества вызова функций, но иногда бывает нелегко заранее выяснить решение каких подзадач нам потребуется в дальнейшем.

Динамическое программирование — это не алгоритм, а общий принцип решения многих задач оптимизации с линейными или нелинейными ограничениями, с непрерывными или дискретными переменными, но обладающими определённым свойством, называемым аддитивностью или мультипликативностью. Аддитивные и мультипликативные функции описываются выражениями (1.9), (1.10), причём, последняя приводится к аддитивному виду (1.11).

Основная идея динамического программирования состоит в замене решения общей задачи, содержащей  $n$  переменных решением  $n$  простых задач оптимизации, т. е. общий процесс делится на несколько этапов или шагов.

Рассмотрим постановку задачи динамического программирования и общий принцип её решения.

Пусть некоторая физическая управленческая система находится в первоначальном состоянии  $S_0$ . За счёт возможных управлений и с течением времени её состояние меняется, и система приходит в конечное состояние  $S_n$ . При этом меняется определённый численный критерий  $W$ , характеризующий систему. Задача состоит в том, чтобы найти такое управление  $U^x$ , которое позволяет перевести систему из  $S_0$  в  $S_n$  так, что критерий  $W(U)$  принял бы оптимальное значение  $W^k$ . Другими словами, из всех траекторий, принадлежащих области возможных состояний системы и соединяющих области начального и конечного состояния, необходимо выбрать такую, на которой критерий  $W(U)$  принимает оптимальное значение (в этом состоит геометрическая интерпретация задач динамического программирования).

При динамическом программировании оптимизируются последовательно все этапы, причём при принятии решения на каждом шаге, кроме последнего, учитывается будущее системы, т. е. принимая решение на отрицательном этапе, всегда необходимо иметь в виду конечную цель.

Чтобы спланировать  $k$ -й шаг, следует знать состояние системы на  $(k-1)$ -м шаге. Однако это состояние, как правило, неизвестно. Поэтому делают ряд предположений, исходя из характера данного процесса. С учётом каждого предположения на последнем  $n$ -м шаге выбирают управление, позволяющее реализовать наибольший эффект. Такое управление называется условно оптимальным.

Спланировав последний шаг  $n$ , к нему присоединяют предпоследний,  $(n-1)$ -й шаг, к которому, в свою очередь,  $(n-2)$ -й и т. д.

Наконец, приходят в начальное состояние системы, т. е. процесс, как бы, «разворачивается» от конца к началу.

Таким образом, динамическое программирование представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное решение (в экономических задачах — «планирование») многоэтапных управляемых процессов и процессов, зависящих от времени. В экономических задачах выполняют распределение и перераспределение средств на каждом этапе. Причём началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения.

Математическая модель для рассматриваемого случая имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{opt} f(x); \\ \{x_i\}; \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq b; \\ x_i \geq 0, x_i - \text{целое}, i = 1, n, \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

где  $\text{opt} = \max$  или  $\min$ . Ниже возьмём  $\text{opt} = \max$ .

Заметим, что если бы не условие целочисленности, то задачу (11.1) можно было бы отнести к задачам линейного программирования.

Нахождение оптимального решения многоэтапного процесса сводится к решению системы функциональных уравнений.

## 11.2. Классификация задач динамического программирования

Задачи динамического программирования делятся на линейные и нелинейные. В первом случае функции и ограничения линейны, а во втором — ограничение остаётся линейным, а функция является нелинейной. Ниже рассматриваются примеры решения задач линейного динамического программирования.

**Пример 11.1.** Сущность динамического программирования рассмотрим на классической задаче, известной под названием «задача о рюкзаке» или о контейнере, а в общем виде — о ёмкости.

Пусть имеется некоторая ёмкость вместимостью  $A$  и её следует загрузить предметами  $n$  различных типов и различной ценности. Необходимо загрузить ёмкость предметами максимальной ценности при следующих исходных данных: объём одного предмета  $i$ -го типа ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) —  $a_1 = 24$ ,  $a_2 = 22$ ,  $a_3 = 16$ ,  $a_4 = 10$ ; стоимость одного предмета  $i$ -го типа —  $c_1 = 96$ ,  $c_2 = 85$ ,  $c_3 = 50$ ,  $c_4 = 20$ ;  $A = 83$ -ед.

Математическая модель задачи

$$\left. \begin{aligned} W = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max; \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где  $x_i$  — число предметов  $i$ -го типа,  $x_i = 0, 1, 2, \dots$

Здесь можно наглядно показать, как составляются функциональные уравнения.

**Шаг 1.** Если загрузить ёмкость только предметами первого типа, то максимальная стоимость груза

$$f_1(A) = \max \{c_1 x_1\},$$

$$0 \leq x_1 \leq \left[ \frac{A}{a_1} \right]$$

при ограничении  $a_1 x_1 \leq A$  ( $x_1 = 0, 1, 2, \dots$ ).

$$\text{Отсюда } x_1 \leq \frac{A}{a_1} \text{ и } \max f_1(A) = \frac{c_1 A}{a_1}.$$

**Шаг 2.** Если ёмкость загружали предметами первого и второго типов, то максимальная стоимость груза

$$f_2(A) = \max \{c_2 x_2 + f_1(A - a_2 x_2)\}, \quad (11.3)$$

$$0 \leq x_2 \leq \left[ \frac{A}{a_2} \right],$$

где  $x_2$  — число предметов второго типа;

$c_2 x_2$  и  $a_2 x_2$  — стоимость и объём этих предметов;

$A - a_2 x_2$  — объём предметов первого типа.

Наглядно видно, что уравнение одно, а вариантов возможных его решений будет несколько, причём одно из них будет оптимальным.

**Шаг  $n$ .** Продолжая процесс, т. е. добавляя предметы новых типов, через  $n$  шагов приходим к уравнению

$$f_n(A) = \max \{c_n x_n + f_{n-1}(A - a_n x_n)\},$$

$$0 \leq x_n \leq \left[ \frac{A}{a_n} \right].$$

Поскольку для нахождения функции  $f_n(A)$  надо знать значение  $f_{n-1}(A - a_n x_n)$ , при решении потребуются значения функции  $f(A)$  для всех значений  $A$  ( $0 \leq A \leq 83$ ).

Решение системы функциональных уравнений выполняем поэтапно.

**1-й этап.** Загружаем ёмкость только предметами первого типа.

Их можно погрузить в количестве  $A/a_1 = [83/24] = 3$ , поэтому  $x_1 = 0; 1; 2; 3$ . Так как  $a_1 = 24$ , то при  $0 \leq A \leq 23$   $x_1 = 0$ ; при  $24 \leq A \leq 47$   $x_1 = 1$ ; при  $48 \leq A \leq 71$   $x_1 = 2$ ; при  $72 \leq A \leq 83$   $x_1 = 3$ . Найденные значения  $A$ ,  $x_1$  и  $f_1(A)$  заносим в таблицы 11.1 и 11.2.

Таблица 11.1

$A$	$x_1$	$f_1(A)$
0-23	0	0
24-47	1	96
48-71	2	192
72-83	3	288

Таблица 11.2

$A$	$x_2$	$x_1$	$f_2(A)$
0-21	0	0	0
22-23	1	0	85
24-43	0	1	96
44-47	1	1	181
48-69	0	2	192
70-71	1	2	277
72-83	0	3	288

**2-й этап.** Загружаем ёмкость предметами первого и второго типов.

Предметов второго типа может быть в количестве  $A/a_2 = [83/22] = 3$ , поэтому  $x_2 = 0; 1; 2; 3$ .

Ёмкость  $A$  разбиваем на интервалы с учётом  $a_1$  и  $a_2$  (табл. 11.2), при  $0 \leq A \leq 21$   $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ .

На остальных интервалах  $x_1$  и  $x_2$  находим с помощью таблицы 11.2 и функционального уравнения (11.3): при  $22 \leq A \leq 23$  имеем

$$f_2(22) = \max \{85 x_2 + f_1(22 - 22 x_2)\},$$

$$0 \leq x_2 \leq [22/22],$$

где  $x_2 = 0; 1$ ;

$$f_2(22) = \max \left\{ \begin{array}{l} 85 \cdot 0 + f_1(22 - 22 \cdot 0) \\ 85 \cdot 1 + f_1(22 - 22 \cdot 1) \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + f_1(22) \\ 85 + f_1(0) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 85 \end{array} \right\} = 85,$$

т. е. ёмкость целесообразно загружать одним предметом второго типа;

при  $24 \leq A \leq 45$  имеем

$$f_2(24) = \max \{85x_2 + f_1(24 - 22x_2)\},$$

$$0 \leq x_2 \leq [24/22],$$

где  $x_2 = 0; 1$ ;

$$f_2(24) = \max \left\{ \begin{array}{l} 85 \cdot 0 + f_1(24 - 22 \cdot 0) \\ 85 \cdot 1 + f_1(24 - 22 \cdot 1) \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + f_1(24) \\ 85 + f_1(2) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 96 \\ 85 \end{array} \right\} = 96,$$

т. е. ёмкость следует загрузить одним предметом первого типа;

при  $46 \leq A \leq 47$  имеем

$$f_2(46) = \max \{85x_2 + f_1(46 - 22x_2)\},$$

где  $x_2 = 0; 1; 2$ ;

$$0 \leq x_2 \leq [46/22]$$

$$f_2(46) = \max \left\{ \begin{array}{l} 85 \cdot 0 + f_1(46 - 22 \cdot 0) \\ 85 \cdot 1 + f_1(46 - 22 \cdot 1) \\ 85 \cdot 2 + f_1(46 - 22 \cdot 2) \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} f_1(46) \\ 85 + f_1(24) \\ 170 + f_1(2) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 96 \\ 181 \\ 170 \end{array} \right\} = 181.$$

Максимальное значение достигается при  $x_2 = 1$ . При этом остаётся  $46 - 22 = 24$  ед. неиспользованного объёма. Так как согласно таблице 11.1 объёму  $24 \leq A \leq 47$  соответствует  $x_1 = 1$ , следовательно, в ёмкость следует загрузить

по одному предмету первого и второго типа. Полученные результаты заносим в таблицу 11.2.

Подсчитав количество предметов для оставшихся интервалов ёмкости, указанных в таблице 11.2, переходим к 3-му и 4-му этапам, при которых последовательно загружаются предметы первого, второго, третьего и четвёртого типов, соответственно. На 3-м этапе с учётом таблицы 11.2 составляем таблицу 11.3, а на 4-м, используя таблицу 11.3, составляем таблицу 11.4.

Таблица 11.3

A	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f_3(A)$
0-15	0	0	0	0
16-21	1	0	0	50
22-23	0	1	0	85
24-37	0	0	1	96
38-39	1	1	0	135
40-45	1	0	1	146
46-47	0	1	1	181
48-63	0	0	2	192
64-69	1	0	2	242
70-71	0	1	2	277
72-83	0	0	3	288

Таблица 11.4

A	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f_4(A)$
0-9	0	0	0	0	0
10-15	1	0	0	0	20
16-21	0	1	0	0	50
22-23	0	0	1	0	85
24-33	0	0	0	1	96
34-37	1	0	0	1	116
38-39	0	1	1	0	135
40-45	0	1	0	1	146
46-47	0	0	1	1	181
48-57	0	0	0	2	192
58-63	1	0	0	2	212
64-69	0	1	0	2	242
70-71	0	0	1	2	277
72-81	0	0	0	3	288
82-83	1	0	0	3	308

По данным таблицы 11.4 можно заключить, что максимальная ценность груза составляет 308 ед., при этом  $x_1 = 3$  и  $x_4 = 1$ .

Нетрудно видеть, что в задаче найдены оптимальные решения как для ёмкости  $A = 83$  ед., так и для ёмкостей любого объёма  $0 \leq A \leq 83$ , т. е. решено семейство сходных задач.

**Пример 11.2.** Пусть имеется некоторое количество средств  $x$ , которое надо вложить в развитие двух неоднородных предприятий. Необходимо в первое предприятие вло-

жить  $x_1$  таким образом, чтобы общий доход  $W$  был максимальным.

*Решение.* Поставленная цель сводится к аналитической задаче

$$\max W(x_1, x_2) = \max [a(x_1) + h(x_2)]. \quad (11.4)$$

Если функции  $g$  и  $h$  непрерывны при всех конечных  $x \geq 0$ , то максимальное значение функции (11.4) всегда существует.

В многоэтапных процессах с последовательным принятием решений переход системы от этапа к этапу (от состояния к состоянию) описывается системой функциональных уравнений. Поскольку в динамическом программировании процесс «разворачивается» от конца к началу, типичное функциональное уравнение, описывающее дискретную систему, можно записать в следующем виде:

$$f_N(x) = \max [a_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)],$$

где  $f$  — целевая функция;

$N$  — число этапов, которое необходимо пройти в процессе;

$x$  — переменная, характеризующая состояние системы на  $N$ -м этапе;

$f_N(x)$  — результирующее значение целевой функции, которое может быть получено за  $N$  оставшихся этапов процесса, начиная с состояния  $x$ ;

$x_N$  — управляющая переменная, от выбора которой зависит результирующее значение целевой функции;

$a_N(x_N)$  — значение целевой функции, полученное на  $N$ -м этапе при оптимальном выборе  $x_N$  в пределах от 0 до  $x$ ;

$f_{N-1}(x - x_N)$  — результирующее оптимальное значение целевой функции, которое может быть достигнуто после прохождения  $N - 1$  оставшихся этапов, начиная с состояния  $x - x_N$ .

Если на  $N$ -м этапе выбрано оптимальное управление  $x_N = x_N^*$ , состояние системы на  $(N - 1)$ -м этапе описывается функциональным уравнением

$$f_{N-1}(x - x_N^*) = \max [a_{N-1}(x_{N-1}) + f_{N-2}(x - x_N^* - x_{N-1})]; \quad (11.5)$$

$$0 \leq x_{N-1} \leq x - x_N^*$$

где выбор  $(x_{N-1})$  ограничен интервалом значений от 0 до  $x - x_N^*$ , поскольку исходная величина  $x$  уменьшилась до  $x - x_N^*$  за счёт выбора величины  $x_N^*$  на  $N$ -м этапе.

Получим функциональное уравнение для системы, описываемой моделью (11.5).

Поскольку функция  $f(x)$  разложима, согласно работе [7], можно записать

$$\max_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \max_{x_n} \left\{ f_n(x_n) + \max_{x_1 \dots x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) \right\}.$$

**Пример 11.3.** Цепная муфта состоит из трёх последовательно соединённых подсистем: полумуфты 1, роликовой цепи 2 типа ПР и полумуфты 3, для которых вероятность безотказной работы 0,93; 0,95; 0,96. Требуемая вероятность безотказной работы муфты 0,95. Необходимо задать для каждой подсистемы вероятность безотказной работы таким образом, чтобы минимизировать общее количество дополнительных затрат. Зависимость затрат от уровня показателя надёжности подсистем приведена в таблице 11.5. Последовательная блок-схема для данного примера показана на рисунке 11.1.

Таблица 11.5  
Зависимость затрат от уровня показателя надёжности

$y_1$	$G_1(0,93; y_1)$	$y_2$	$G_2(0,95; y_2)$	$y_3$	$G_3(0,96; y_3)$
0,93	0	—	—	—	—
0,94	0,5	—	—	—	—
0,95	1,0	0,95	0	—	—
0,96	1,5	0,96	2	0,96	0
0,97	2,5	0,97	6	0,97	3
0,98	4,5	0,98	12	0,98	9
0,99	20,0	0,99	22	0,99	32
0,995	45,0	0,995	40	0,995	65

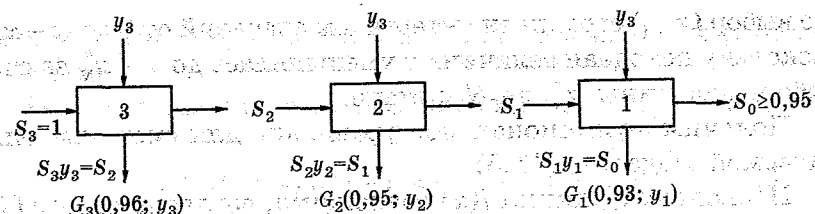


Рис. 11.1. Блок-схема оптимизации надёжности цепных муфт

Рекуррентные уравнения с учётом исходных данных имеют вид:

$$f_1(S_1) = \min [G_1(0,93; y_1)]; \quad y_1 \geq 0,93/S_1$$

$$f_2(S_2) = \min [G_2(0,95; y_2) + f_1(S_1)]; \quad y_2 \geq 0,95/S_2 y_1$$

$$f_3(S_3) = \min [G_3(0,96; y_3) + f_2(S_2)]; \quad y_3 \geq 0,96/S_3 y_2$$

В таблицах 11.6-11.11 приведён набор всех возможных сочетаний значений показателей надёжности для подсистем, обеспечивающих требуемую надёжность. Так как требуемая вероятность безотказной работы системы равна 0,95, то в таблице 11.8 даны значения  $S_0$ , превышающие 0,95.

Таблица 11.6

Значения  $S_2 = S_3 y_3$  (преобразования на третьем этапе)

$y_3$	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995
$S_2$	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995

Таблица 11.7

Значения  $S_1 = S_2 y_2$  (преобразования на втором этапе)

$S_2$	Значения $S_1$ при $y_2$ , равном				
	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995
0,96					0,9552
0,97				0,9603	0,9651
0,98			0,9604	0,9702	0,9751
0,99		0,9603	0,9702	0,9801	0,9850
0,995	0,9552	0,9651	0,9751	0,9850	0,9900

Таблица 11.8  
Значения  $S_0 = S_1 y_1$  (преобразования на первом этапе)

$S_1$	Значения $S_0$ при $y_1$ , равном				
	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995
0,9900	0,9504	0,9603	0,9702	0,9801	0,9805

Таблица 11.9

Значения затрат  $G_1(S_1; y_1)$  и  $f_1(S_1)$

$S_1$	Значения $G_1$ при $y_1$ , равном					$f_1(S_1)$
	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995	
0,9552	—	—	—	—	45	45
0,9603	—	—	—	20	45	20
0,9604	—	—	—	20	45	20
0,9651	—	—	—	20	45	20
0,9702	—	—	4,5	20	45	4,5
0,9751	—	—	4,5	20	45	4,5
0,9801	—	2,5	4,5	20	45	4,5
0,9850	—	2,5	4,5	20	45	2,5
0,9900	1,5	2,5	4,5	20	45	1,5

Таблица 11.10

Значения затрат  $G_2(S_2; y_2) + f_1(S_1)$  и  $f_2(S_2)$

$S_2$	Значения $G_2(S_2; y_2) + f_1(S_1)$ при $y_2$ , равном				$f_2(S_2)$
	0,97	0,98	0,99	0,995	
0,97	—	—	—	40 + 20	60
0,98	—	—	22 + 4,5	40 + 4,5	26,5
0,99	—	12 + 4,5	22 + 2,5	40 + 2,5	16,5
0,995	6 + 20	12 + 4,5	22 + 2,5	40 + 1,5	16,5

Таблица 11.11

Значения затрат  $G_3(S_3; y_3) + f_2(S_2)$  и  $f_3(S_3)$

$S_3$	Значения $G_3(S_3; y_3) + f_2(S_2)$ при $y_3$ , равном				$f_3(S_3)$
	0,97	0,98	0,99	0,995	
1	3 + 60	9 + 26,5	32 + 16,5	65 + 16,5	35,5

Согласно работе [17] можно записать

$$f_1(S_1) = \min [G_1(S_1; y_1) + f_0(S_0)]$$

Поскольку  $f_0(S_0) = 0$ , то окончательно

$$f_1(S_1) = \min [G_1(S_1; y_1)].$$

Для следующего этапа

$$f_2(S_2) = \min [G_2(S_2; y_2) + f_1(S_1)].$$

По аналогии

$$f_3(S_3) = \min [G_3(S_3; y_3) + f_2(S_2)].$$

Значения  $f_1(S_1)$ ,  $f_2(S_2)$  и  $f_3(S_3)$  приведены, соответственно, в таблицах 11.9-11.11. Минимальное значение общих затрат равно 35,5. Это же значение затрат соответствует  $y_3 = 0,98$ . Основываясь на данных таблицы 11.9, можно сделать вывод, что  $y_2^* = 0,99$  при  $f_2(S_2) = 26,5$ . Это означает, что  $f_1(S_1) = 4,5$  и из таблицы  $y_1^* = 0,98$ .

**Задача 11.1.** Техническая система состоит из  $n$  последовательно соединённых подсистем, независимых друг от друга, для которых вероятность безотказной работы 0,94, 0,95 и 0,96. Требуемая вероятность этой системы — 0,95. На практике для подобной системы возникает проблема оптимизации соотношения между надёжностью и затратами ресурсов на её обеспечение. В рассматриваемой задаче необходимо обеспечить требуемую надёжность технической системы с минимальными затратами.

Зависимость затрат от уровня показателя надёжности приведена в таблице 11.12.

Таблица 11.12

Зависимость затрат от уровня показателя надёжности

$y_1$	$G_1(0,94; y_1)$	$y_2$	$G_2(0,95; y_2)$	$y_3$	$G_3(0,96; y_3)$
0,93	0	—	—	—	—
0,94	0,5	—	0	—	—
0,95	1,0	0,95	2	—	—
0,96	1,5	0,96	6	0,96	0
0,97	2,5	0,97	18	0,97	9
0,98	4,5	0,98	38	0,98	32
0,99	20,0	0,99	75	0,99	65
0,995	45,0	0,995	130	0,995	120

*Указание.* Задача решается по аналогии с примером 11.3.

**Задача 11.2.** Используя условия предыдущей задачи, решить задачу обеспечения максимально возможной надёжности системы при ограниченных затратах.

*Указание.* Решение задачи сводится к определению объёма запасных частей, для обеспечения  $\gamma$ -процентного ресурса системы.

**Заключение.** Материал данной главы знакомит пользователя с основами и алгоритмом линейного и нелинейного динамического программирования и примерами решения задач.

### Вопросы для самопроверки

1. Раскройте сущность метода динамического программирования.

2. Для решения каких задач применяется метод динамического программирования?



## 12. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

В данной главе приводятся методы решения многокритериальных задач оптимизации, показаны процедуры структурно-параметрическая оптимизация конструкции и приведён пример решения многокритериальной задачи.

### Основные понятия и определения

*Весовой коэффициент* — множитель при частной (локальной) целевой функции, отражающий относительную важность соответствующего качества.

*Компромиссная кривая* — кривая допустимого выбора конструктивных решений.

*Парето-оптимальная оценка решения* — основа решения многокритериальных задач оптимизации.

*Решение компромиссное* — наиболее предпочтительное решение.

### 12.1. Общие сведения

подавляющее большинство задач оптимизации при проектировании являются многокритериальными. При этом одни целевые функции необходимо минимизировать, а другие — максимизировать. Примеры таких задач приведены в работах [1, 5].

Теоретические основы решения многокритериальных задач оптимизации заложены итальянским экономистом и социологом В. Парето. Они получили дальнейшее развитие в ряде работ, в частности в [11].

### 12.2. Методы решения многокритериальных задач оптимизации

Возможны различные способы (методы) решения данной задачи.

*Первый способ* — традиционный способ проектирования деталей машин, не содержащий формальной оптимизации. В его основе лежит, в лучшем случае, диалог конструктора с ЭВМ. При использовании этого метода конструктору необходимо хорошо понимать и чувствовать задачу. Он должен принять некоторую пробную конструкцию и с помощью ЭВМ (или без неё) рассчитать её характеристики, в которую затем следует вводить изменения до тех пор, пока не будет получено «хорошее» компромиссное решение. Это окончательное решение, однако, даёт лишь слабое представление о том, насколько один критерий был улучшен за счёт другого. Кроме того, полученная конструкция, как правило, далека от оптимальной и возможно её дальнейшее улучшение.

Практически лишь этот метод излагается до настоящего времени в курсе деталей машин и основ конструирования и используется при выполнении курсового проекта по данной дисциплине.

*Второй способ* основан на диалоге конструктора с ЭВМ. Вначале проводят упорядочение (ранжировку) критериев  $F_i(\bar{x})$ ,  $i = 1, m$  по степени их важности в рассматриваемой задаче.

Затем, используя какой-либо алгоритм оптимизации, минимизируется первый (самый важный) из них  $F_1(\mu)$ , без учёта влияния других, и в результате получается  $F_1^*$ . После этого минимизируется второй критерий, не учитывая критерии с номерами 3, 4 и т.д. и приняв  $F_1 \leq F_1^* + \Delta F_1$ , где  $\Delta F_1$  — некоторая, обычно небольшая, уступка по первому критерию. Так продолжают до тех пор, пока не будут минимизированы все критерии, т. е. пока проектировщик не найдёт «хорошую» конструкцию. Преимущества этого метода по сравнению с первым: конструктор непосредственно участвует в оптимизации технической системы и поэтому приобретает более глубокое понимание существа задачи; применяется процедура оптимизации, которая непрерывно направляет проектировщика к оптимальной конст-

рукции. Недостатком данного метода является то, что субъективные суждения и сомнения конструктора могут не позволить ему рассмотреть все возможные компромиссы между критериями.

При третьем способе по определённому правилу составляют новую интегральную (обобщённую) целевую функцию, например, в виде линейной средневзвешенной суммы локальных (частных) целевых функций

$$F(\mu) = \sum_{i=1}^m \omega_i F_i(\mu), \quad \omega_i \in [0, 1],$$

где  $\omega_i$  — неотрицательные весовые коэффициенты (множители), отражающие относительную важность соответствующего критерия качества или оптимальности (подраздел 3.3).

При  $\omega_i = 1$  критерий  $F_i(\mu)$  имеет максимальное значение, при  $\omega_i = 0$  может принимать любое значение.

Интегральный минимаксный критерий

$$F(\mu) = \min \left[ \max \omega_i F_i(\mu) \right], \quad 1 \leq i \leq m$$

минимизируют известными методами.

Преимущество этого метода состоит в том, что рассматривают ряд возможных конструкций, однако при его использовании необходимо обосновать выбор весовых коэффициентов. Если выбор  $\omega_i$  случаен, обобщённый критерий  $F(\mu)$  теряет смысл, а само решение задачи или теряет смысл или, что более опасно, можно привести к ошибочным выводам и заключениям. Значения  $\omega_i$  могут быть выбраны несколькими способами.

Если имеются надёжные сведения о возможном диапазоне значений  $\omega_i$   $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , граничные значения целевой функции определяют по результатам решения следующих оптимизационных задач:

$$\max \min F(\bar{x}, \bar{\omega}), \quad \bar{\omega} \in G_{\omega}, \quad \bar{x} \in G_{\mu},$$

$$\min \max F(\mu, \omega), \quad \omega \in G_{\omega}, \quad \mu \in G_{\mu},$$

где  $\bar{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ ;  $G_{\mu}$ ,  $G_{\omega}$  — области допустимых значений векторов соответственно  $\mu$  и  $\omega$ ;  $\omega_{\min} \leq \omega_i \leq \omega_{\max}$ .

Найденные решения являются содержательными для выбора весовых коэффициентов  $\omega_i$ . Следовательно, прежде чем принять окончательное решение конструктор оценивает несколько вариантов, принимая различные значения весовых коэффициентов и начальных параметров.

Четвёртый способ основан на том, что среди частных функций  $F_i(\mu)$  выбирают одну, считая её итоговой. Для остальных функций на основании тщательного изучения задачи (методов реализации, технологического выполнения, условий эксплуатации, экономических показателей и т.п.) устанавливаются ограничения типа

$$F_i(\mu) \geq (\leq) F_{i\text{доп}}.$$

Таким образом, все частные целевые функции, кроме одной, выводят в ограничения, т. е. задача сводится к однокритериальной с ограничениями. При этом может быть допущена ошибка при назначении  $F_{i\text{доп}}$ . Однако это назначение естественнее и привычнее для конструктора, чем выбор весовых множителей.

В рассмотренных четырёх способах решения многокритериальной задачи такую задачу превращали в однокритериальную, что связано с её огрублением. Эти способы не дают конструктору достаточной информации об имеющихся возможностях выбора варьируемых параметров. Кроме того, при их использовании требуются определённые суждения и решения до того, как станет явным конструктивный компромисс.

Пятый способ заключается в построении компромиссной кривой — кривой допустимого выбора конструктивных решений. Этот метод рассмотрен в работе применительно к двум задачам.

Первая задача — минимизация двух противоречивых целевых функций с двумя конструктивными параметрами  $f_1(u_1, u_2)$  и  $f_2(u_1, u_2)$  без ограничений.

Задачу решаем в два этапа:

1 — минимизация  $f_1(u_1, u_2)$  при ограничениях  $f_2(u_1, u_2) = \text{const}$ ; полученное множество точек решений определит компромиссную кривую;

2 — минимизация  $F = f_1(u_1, u_2) + \omega f_2(u_1, u_2)$  в области значений параметра  $\omega$ :  $0 < \omega < \infty$ ; множество решений также определит компромиссную кривую.

Свойства компромиссной кривой:

— для точек компромиссной кривой градиенты целевых функций направлены в противоположные стороны, т. е.

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = -\omega \frac{\partial f_2}{\partial u_1}; \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_2} = -\omega \frac{\partial f_2}{\partial u_2},$$

что соответствует решению задачи третьим способом;

— наклон компромиссной кривой определяется выражением

$$\frac{\partial f_2}{\partial f_1} = \frac{-1}{\omega};$$

— компромиссная кривая делит пространство целевых функций на две области: область, лежащая над кривой, охватывает все осуществимые конструкции; область, лежащая под кривой, — нереализуемые конструкции;

— каждая конструкция в соответствии с компромиссной кривой с некоторым допущением является оптимальной.

Вторая задача — минимизация двух противоречивых целевых функций с двумя конструктивными параметрами  $f_1(u_1, u_2)$  и  $f_2(u_1, u_2)$  при ограничениях  $F(u_1, u_2) \leq 0$  (другие параметры технической системы приняты постоянными).

Решение задачи выполняют в два этапа:

1 — минимизация  $f_1(u_1, u_2)$  при ограничениях  $f_2(u_1, u_2) = \text{const}$  и  $F(u_1, u_2) \leq 0$ ; полученное множество точек решений определит компромиссную кривую;

2 — минимизация

$$F = f_1(u_1, u_2) + \omega f_2(u_1, u_2) \quad (12.2)$$

при ограничениях

$$\bar{F}(u_1, u_2) \leq 0,$$

где  $\omega$  — положительный весовой коэффициент.

Компромиссную кривую получают решением задачи (12.2) при условии:  $0 < \omega < \infty$ .

По аналогии с первой задачей в рассматриваемом случае необходимо условие существования экстремума:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = -\omega \frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial u_1};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_2} = -\omega \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial u_2}$$

( $\lambda_i$  — множители Лагранжа,  $i = 1, m$ ).

Кроме того, необходимо определить угол  $q$  наклона компромиссной кривой.

$$q = \frac{\partial f_2}{\partial f_1} = -\frac{1}{\omega} \left[ 1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial f_1} \right].$$

Имея компромиссную кривую 1 (рис. 12.1), можно отобрать оптимальные конструкции.

Однако для этого необходим критерий ранжирования возможных решений, полученных на основе компромиссной кривой. В качестве такого критерия может быть некоторая третья целевая функция, экспериментальные данные и т.п. В соответствии с этим критерием строят кривые приемлемых решений (кривые 2 на рисунке 12.1), причём для проектировщика не имеют значения различия в конструкциях, лежащих на одной кривой.

Очевидно, что в случае, когда конечная цель заключается в одновременной минимизации обеих целевых функций, уровень приемлемых решений возрастает по направлению к началу координат. Кривая приемлемых решений, касаю-

щаяся компромиссной кривой, соответствует наивысшему уровню оптимизации, а точка  $O$  касания кривых — оптимальной конструкции.

Если проектировщик устраивает более низкий уровень удовлетворительности, то он может выбрать конструкции, определяемые частью компромиссной кривой, заключённой между точками  $A$  и  $B$  (рис. 12.1).

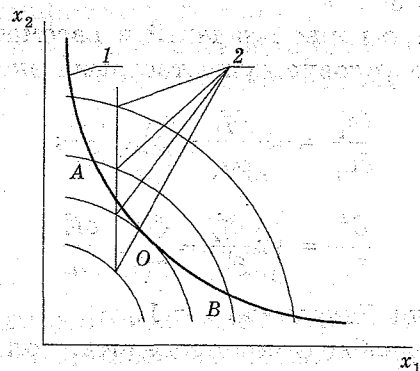


Рис. 12.1. Компромиссная кривая (1) и кривые приемлемых решений (2)

Таким образом, рассмотренные целевые функции зависят от двух варьируемых параметров. Однако в большинстве случаев встречаются  $n$ -мерные задачи. Если целевых функций лишь две,  $n$ -мерную задачу сводят к построению двумерной компромиссной кривой. При этом увеличивается объём вычислений, но не изменяется существо подхода.

Обобщение задачи на случай более чем двух целевых функций обуславливает появление компромиссных поверхностей и поверхностей (тоже гиперповерхностей) удовлетворительности.

Для решения задачи (2.2) необходим эффективный метод нелинейного программирования [11].

**Пример 12.1.** Завод выпускает консервные банки цилиндрической формы заданного объёма  $V$ . Необходимо определить оптимальные размеры банки (рис. 7.7), при кото-

рых расход материалов и затраты трудовых ресурсов на её изготовление были бы минимальными.

*Решение.* Ограничимся постановкой задачи и укажем метод её решения.

В соответствии с условием задачи необходимо обеспечить:

- минимальную поверхность  $S(d, h) = S_{\min}$ ;
- минимальную длину швов  $L(d, h) = L_{\min}$ .

Видно, что данная задача имеет две целевые функции. Выразив функции через варьируемые параметры, дальнейшее решение выполняем дифференциальным методом. Нетрудно установить, что при этом не будет получено общее решение.

Данную задачу можно свести к однокритериальной, используя в качестве целевой функции экономический критерий: суммарные затраты на изготовление банки

$$F(x) = \sum_{i=1}^2 C_i \rightarrow \min,$$

где  $C_1, C_2$  — затраты на материал и выполнение швов соответственно:

$$C_1 = c_m S \text{ и } C_2 = c_{ш} l,$$

причём  $c_m$  — цена единицы площади материала заданной толщины и марки;

$c_{ш}$  — удельные затраты на выполнение швов (на единицу длины шва).

**Пример 12.2.** Рассмотрим постановку задачи оптимального проектирования сварных соединений на двух конкретных примерах, согласно которым можно разрабатывать математические модели и для других типов соединений и (или) схем нагружения.

Пусть требуется спроектировать сварные соединения балки 1 с опорой 2, выполненные в первом случае двумя фланговыми швами и нагруженные в первом случае продольной силой  $F$  (рис. 12.2), а во втором — лобовым швом и нагруженной поперечной силой  $F$  (рис. 12.3), обеспечивая минимальные полные затраты.

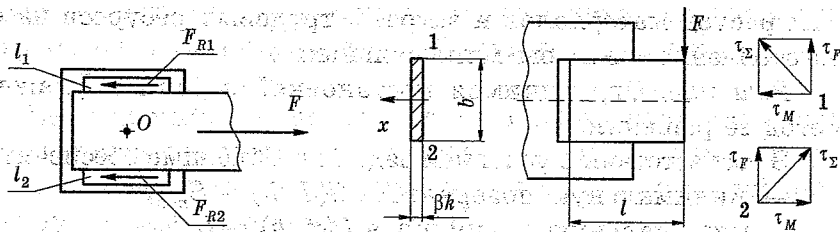


Рис. 12.2. Расчётная схема нахлесточного соединения с фланговыми швами

Рис. 12.3. Расчётная схема нахлесточного соединения, выполненного лобовым швом

В качестве проектных параметров берём:

- катет  $k$  и длину  $l$  швов;
- ширину  $b$  и толщину  $\delta$  балки.

Эти независимые переменные представим как компоненты вектора

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T,$$

где  $x_1 = k$ ;  $x_2 = l$ ;  $x_3 = b$ ;  $x_4 = \delta$ .

Целевой функцией, минимум которой находим в данной задаче, являются полные затраты на выполнение сварного соединения

$$F(x) = \sum_{i=1}^3 C_i \rightarrow \min,$$

где  $C_1, C_2$  — затраты на подготовительные и сварочные работы соответственно;

$C_3$  — стоимость материала.

Будем считать, что у заказчика проекта имеются аппарат и необходимые приспособления для сварки прямолинейными швами. Поэтому при построении модели затраты  $C_1$  можно не учитывать.

Затраты на сварочные работы

$$C_2 = \gamma_c V_{ш},$$

где  $\gamma_c$  — удельные затраты, ед./мм<sup>3</sup>;

$V_{ш}$  — объём сварных швов, мм<sup>3</sup>.

Стоимость материала

$$C_3 = \rho_m (V_{ш} + V_6) C_m,$$

где  $\rho_m$  — плотность материала шва и балки;

$V_6$  — объём балки;

$C_m$  — удельная стоимость материала, ед./кг.

Согласно рисункам 12.2 и 12.3 имеем

$$V_{ш} = 2 \frac{1}{2} k^2 l = k^2 l \text{ и } V_6 = b\delta(L + l).$$

Тогда

$$C_2 = \gamma_c k^2 l \text{ и } C_3 = \rho_m C_m (k^2 l + b\delta(L + l)).$$

В этом случае целевая функция принимает следующий вид:

$$F(x) = \gamma_c k^2 l + \rho_m C_m [k^2 l + b\delta(L + l)] \rightarrow \min.$$

Чтобы установить область допустимых сочетаний значений  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ , определим функциональные ограничения. Учтём, что для обеспечения работоспособности изделия должны выполняться следующие условия:

— условие прочности сварных швов

$$\tau_{cp}(x) = \frac{F}{A_{ш}} \leq [\tau'_{cp}], \quad (12.3)$$

где  $\tau_{cp}(x)$  — расчётное касательное напряжение, возникающее в биссекторной плоскости швов;

$A_{ш}$  — суммарная площадь опасных сечений швов;

$[\tau'_{cp}]$  — допускаемое напряжение для сварного соединения;

— условие прочности балки

$$\sigma_p(x) = \frac{F}{A_6} \leq [\sigma_p], \quad (12.4)$$

где  $\sigma_p$  и  $[\sigma_p]$  — расчётное и допускаемое напряжения растяжения для балки;

$A_6$  — площадь поперечного сечения балки;

— условие жёсткости балки

$$\Delta l = \frac{FL}{EA_0} \leq [\Delta l], \quad (12.5)$$

где  $\Delta l$  и  $[\Delta l]$  — расчётное и допустимое удлинения балки;  
 $EA_0$  — жёсткость балки при растяжении;  
 $E$  — модуль нормальной упругости;  
 — ограничения на длину швов

$$l_{\min} \leq l \leq l_{\max}, \quad (12.6)$$

где  $l_{\min}$  — нижнее ограничение длины шва, обусловленное тем, что необходимо уменьшить влияние начала и конца шва как менее прочных;

$l_{\max}$  — верхнее ограничение, связанное с неравномерным нагружением шва по длине;

— требование неотрицательности величины  $b$

$$b \geq 0; \quad (12.7)$$

— условие технологичности

$$k_{\min} \leq k \leq k_{\max}. \quad (12.8)$$

С учётом выражений (12.3)-(12.8) математическая модель может быть записана в следующем виде:

$$F(x) = (\gamma_c + \rho_m C_m) x_1^2 x_2 + \rho_m C_m x_3 x_4 (L + x_2) \rightarrow \min; \quad (12.9)$$

$$\left. \begin{aligned} q_1(x) &= [\tau'_{cp}] - \tau_{cp}(x) \geq 0; \\ q_2(x) &= [\sigma_p] - \sigma_p(x) \geq 0; \\ q_3(x) &= [\Delta l] - \Delta l \geq 0; \\ q_4(x) &= x_2 - l_{\min} \geq 0; \\ q_5(x) &= l_{\max} - x_2 \geq 0; \\ q_6(x) &= x_3 \geq 0; \\ q_7(x) &= x_1 - k_{\min} \geq 0; \\ q_8(x) &= k_{\max} - x_1 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

В случае нагружения поперечной силой (рис. 12.3) функциональные ограничения (12.10) принимают вид:

$$q_2(x) = [\sigma_x] - \sigma_x(x) \geq 0;$$

$$q_3(x) = [f] - f(x) \geq 0,$$

где  $\sigma_x$ ,  $[\sigma_x]$  — расчётное и допустимое напряжения изгиба для балки;

$f(x)$  и  $[f]$  — расчётный и допустимый прогибы конца балки.

Кроме того, должно удовлетворяться ограничение

$$F \leq F_{\lim}(x),$$

где  $F_{\lim}(x)$  — критическая нагрузка на балку из условия недопустимости потери устойчивости балки, определяемая известным выражением [17].

$$F_{\lim}(x) = \frac{4,013\sqrt{EI\alpha}}{L^2} \left[ 1 - \frac{x^3}{2L} \sqrt{\frac{EI}{\alpha}} \right],$$

причём здесь  $I$  — момент инерции сечения балки,

$$I = \frac{x_3^3 x_4}{12}; \quad \alpha = G x_3^3 x_4,$$

$G$  — модуль сдвига.

Поскольку функциональные ограничения должны соответствовать виду напряженно-деформированного состояния материала швов и балки, при других типах сварных соединений и схемах нагружения в математической модели будут отличаться некоторые из этих ограничений.

**Пример 12.3.** Требуется спроектировать пустотелый вал (рис. 12.4) для передачи вращающего момента  $T$ , имеющий необходимые прочность и устойчивость при минимальной массе.

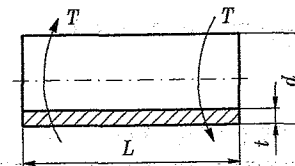


Рис. 12.4. Пустотелый вал

**Примечание.** Данная задача является многокритериальной. Её решаем четвертым, рассмотренным выше, методом.

*Решение.* В данном случае необходимо определить диаметр  $d$  и толщину  $t$  стенки пустотелого вала при следующих исходных данных: длина вала  $L$ , свойства материала — плотность  $\rho$ , модуль упругости  $E$ , предел прочности на сдвиг  $\tau_{\text{lim}}$ ; коэффициент безопасности  $S$ , передаваемый момент  $T$ .

Ограничения по функциональным соображениям  $d \leq d_{\text{max}}$  и по технологическим требованиям  $t \geq t_{\text{min}}$ , причём  $d_{\text{max}}$  и  $t_{\text{min}}$  заданы.

Рассматриваемый вал может разрушиться или под действием напряжений кручения  $\tau_{\text{кр}}$ , или в результате потери устойчивости при кручении.

С учётом изложенного сформулируем задачу в следующей стандартной форме:

- проектные параметры  $d$  и  $t$ ;
- целевая функция, минимум которой требуется найти,

$$m = \pi d \delta l \rho \rightarrow \min; \quad (12.11)$$

- ограничения неравенства:
  - а) по прочности при кручении

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{T}{W_p} \leq \frac{\tau_{\text{lim}}}{S}; \quad (12.12)$$

- б) по устойчивости при кручении

$$\tau_y = \frac{T}{W_p} \leq \frac{\tau_{\text{крит}}}{S}; \quad (12.13)$$

- в) по геометрическим параметрам

$$t_{\text{min}} < t;$$

$$t \leq d \leq d_{\text{max}}.$$

В выражениях (12.12) и (12.13):

$W_p$  — полярный момент сопротивления сечения в виде кольца;

$\tau_{\text{крит}}$  — критическое напряжение сдвига при кручении, зависящее от  $E$ ,  $L$ ,  $t$  и  $d$ .

Полученные формулы (12.11-12.13) представляют собой математическую модель. С учётом известных формул для определения  $\tau_y$  в зависимости от указанных параметров необходимо разработать алгоритм и составить программу решения поставленной задачи. При этом оптимизацию можно осуществить любым из методов прямого поиска. В работе [11] использован метод конфигураций Хука-Дживса.

**Задача 12.1.** При выбранном материале зубчатых колёс назначить твёрдость рабочих поверхностей зубьев, обеспечивая их равнопрочность (равную долговечность или равную нагрузочную способность) по контактным и изгибным напряжениям при минимальной массе.

**Задача 12.2.** Спроектировать червячный редуктор при заданных передаваемой мощности  $P_1$ , частоте вращения червяка  $n_1$  и передаточном числе  $u$ , обеспечивая минимальную массу и ограничение по КПД.

**Задача 12.3.** Спроектировать клиноремённую передачу при заданных передаваемой мощности  $P_1$ , частоте вращения ведущего шкива  $n_1$  и передаточном отношении  $u_{12}$ , обеспечивая нормативную долговечность ремней  $L_h$  при минимальных габаритах.

**Задача 12.4.** Спроектировать цепную передачу при заданных передаваемой мощности  $P_1$ , частоте вращения ведущей звёздочки  $n_1$  и передаточном отношении  $u_{12}$ , обеспечивая минимальные габариты и нормативную долговечность цепи (цепь роликотая или зубчатая в зависимости от  $n_1$ ).

### 12.3. Структурно-параметрическая оптимизация конструкции

Этот вопрос рассмотрим на примере структурно-параметрической оптимизации в процессе проектирования цепных муфт [16].

Вектор проектного решения задачи оптимального синтеза цепных муфт представим в следующем виде

$$m = \{X, Y\}, \quad (12.14)$$

где  $X$  — вектор структурных схем муфт;  
 $Y$  — вектор проектных параметров, причём имеем

$$X = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}; \quad (12.15)$$

$$Y = \{Z, P, \dots\}, \quad (12.16)$$

где  $S_1, S_2, S_3, \dots$  — величины, которым соответствует член специально построенной числовой последовательности;

$Z, P, \dots$  — проектные параметры: число зубьев, шаг цепи и т.д.

Структура цепной муфты, как и любого механизма, обусловлена тем, какие и сколько звеньев входят в состав муфты, какие и сколько кинематических пар они образуют и какова их компоновка. В рассматриваемом случае структура определяется типом и рядностью цепи, количеством, конструкцией, взаимным расположением и способом соединения звёздочек. В связи с этим числовую последовательность  $S$  можно записать в виде

$$S = \{i, j, k, l\}, \quad (12.17)$$

где  $i$  — элемент, определяющий тип цепи (1 — роликсовая; 2 — зубчатая и т.д.);

$j$  — элемент, который определяет рядность цепи (1, 2, ... — одно-, двухрядная и т.д.; для зубчатых цепей  $j = 0$ );

$k$  — элемент, определяющий конструктивное исполнение муфты ( $k = 0, 1, 2, \dots$  соответственно для муфт традиционной конструкции, с промежуточным центрированным валом, с расположением звёздочек в одной плоскости и т.д.);

$l$  — элемент, который определяет, есть ли у муфты данного конструктивного исполнения какая-либо конструктивная особенность ( $l = 0$  или 1 при отсутствии или наличии такой особенности, например,  $l = 1$  для муфты, имеющей упругие элементы).

Разновидности цепных муфт, используемые в машиностроении, и их обозначение приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1

Муфты цепные

Разновидность (тип) муфты	Условное обозначение	Обозначение муфты, как члена числовой последовательности
1. Муфта с однорядной роликсовой цепью	МЦО	1, 1, 1, 0
2. Муфта с двухрядной роликсовой цепью	МЦД	1, 2, 0, 0
3. Муфта с однородной роликсовой цепью и центрированным промежуточным валом	МЦОПВ	1, 1, 1, 0
4. Муфта с двухрядной роликсовой цепью и центрированным промежуточным валом	МЦДПВ	1, 2, 1, 0
5. Муфта с двухрядной роликсовой цепью повышенной компенсирующей способности	МЦДПКС	1, 2, 2, 0
6. Муфта с двухрядной роликсовой цепью повышенной компенсирующей способности с упругими элементами (комбинированная муфта)	МЦДПКСК (МЦК)	1, 2, 2, 1

При неправильном выборе структурной схемы муфты для заданных условий работы в процессе эксплуатации из-за перекосов и изгиба деталей цепи нагрузка распределяется неравномерно. Это обуславливает повышение интенсивности изнашивания и, как следствие, динамичности нагрузки на элементы муфты, что, в свою очередь, предопределяет частые отказы и низкую надёжность конструкции. Отсюда следует, что структурная схема цепной муфты, удовлетворяющая требованиям, во-первых, приспособляемости к неточности изготовления и монтажа, к упругим деформациям валов и их опор и, во-вторых, надёжности и технологичности, может считаться оптимальной.

В связи с этим структурная оптимизация заключается в выборе такой структурной схемы муфты, которая обес-



печивала бы максимально допустимое улучшение выходных параметров конструкции по всем рассматриваемым критериям.

С другой стороны, муфта, как и любой механизм с оптимальной структурой, должна иметь лишь необходимые для обеспечения заданного функционального назначения подвижности звеньев при отсутствии избыточных контурных связей.

Следовательно, для обеспечения оптимальной структуры синтезируемой муфты должно быть обеспечено одно из главных условий — устранение избыточных контурных связей.

Число избыточных связей в конструкции определяется известной формулой

$$q = W + \sigma(p - n) - H,$$

где  $W$  — число основных и местных подвижностей механизма. Эта величина определяется по структурной формуле идеального механизма соответствующего семейства. В рассматриваемом случае  $W = 1$ ;

$p$  — число кинематических пар;

$n$  — число подвижных звеньев;

$H$  — суммарное число степеней свободы кинематических пар.

Разность  $(p - n)$  соответствует числу контуров в механизме.

Основные виды кинематических пар, входящих в структурную схему муфты типа МЦДПВ, и их характеристика приведены на рисунке 12.5.

Математическая модель синтезируемых муфт

$$a \rightarrow \min; \quad (12.18)$$

$$\left. \begin{aligned} [\Delta_r] - \Delta_r &\geq 0; \\ [\delta] - \delta &\geq 0; \\ [\Delta_a] - \Delta_a &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

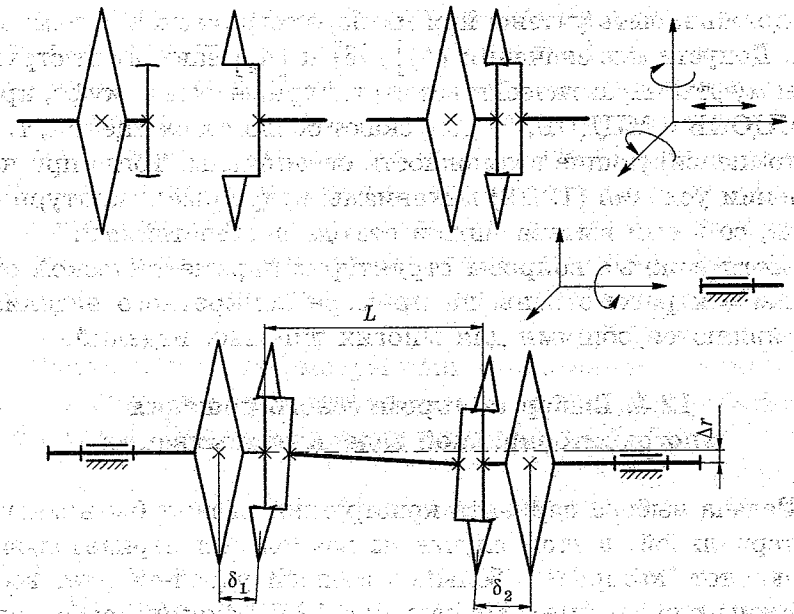


Рис. 12.5. Виды кинематических пар муфты типа МЦДПВ

Для выявления величины  $q$  анализируем, какие движения возможны. Всего должно быть шесть возможных движений: поступательные (или вращательные) вдоль (относительно) осей координат и вращательные вокруг этих осей. Для муфты типа МЦДПВ в соответствии с рисунком 12.5 имеем

$$W = 1; p = 4; n = 3; H = 1 + 3 + 2 + 1 = 7 \text{ и } q = 0.$$

Это свидетельствует о том, что структурная схема данного типа цепной муфты является оптимальной. Однако к недостаткам её конструкции можно отнести то, что относительные перемещения деталей муфты, обусловленные угловыми смещениями  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , происходят при трении скольжения между роликами и зубьями звёздочек или (и) роликами и втулками цепи.

Условия (12.19) — функциональные ограничения. Другие функциональные ограничения, касающиеся, например нагрузочной способности, предельной частоты вращения муфт

ты, должны быть учтены при их параметрической оптимизации. Допустимые значения  $[\Delta_r]$ ,  $[\delta]$  и  $[\Delta_\alpha]$  зависят от структуры муфты. Практически все структурные схемы муфт, кроме МЦОПВ и МЦДПВ, не допускают больших смещений, т. е. их компенсирующие возможности ограничены. Тогда при нарушении условий (12.19) механизмы будут иметь контурные связи, со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Хотя важные вопросы структурно-параметрической оптимизации рассмотрены на примере конкретного изделия, они являются общими для многих типовых изделий.

#### 12.4. Выбор компромиссного решения многокритериальной задачи оптимизации

Задача выбора варианта конструкции может быть многокритериальной, в этом случае из возможных вариантов выбирают тот, который в большей степени удовлетворяет всем требуемым критериям. На рисунке 12.6 показано сравнение редукторов по таким параметрам как удельная масса  $\gamma$ , КПД  $\eta$ , передаточное число  $u$  и приведённые затраты  $C$ .

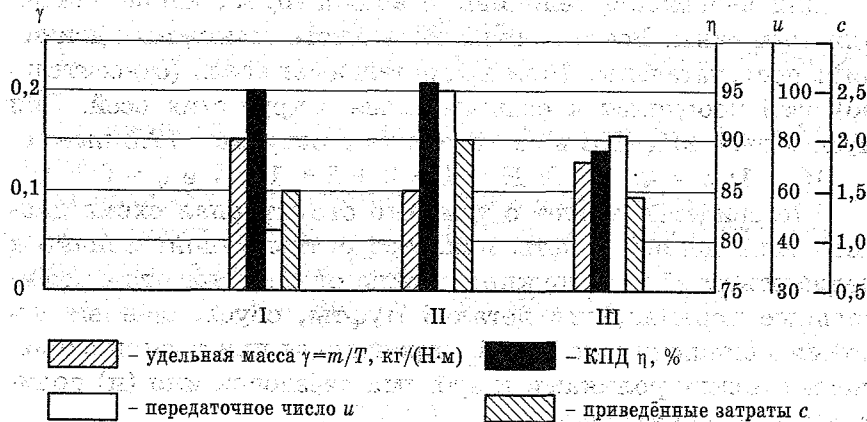


Рис. 12.6. Сравнительные показатели редукторов:

I, II, III — цилиндрического, планетарного двухступенчатого и червячного одноступенчатого

Как видно, разные варианты редукторов имеют различную величину приведённых показателей ( $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $u$ ,  $C$ ). При этом студенту необходимо определить, какой показатель для данной конструкции является наиболее важным, и по этому показателю проводить сравнительную оценку конструкций. Предложенная методика позволяет выбрать тип редуктора (привода), в наибольшей степени отвечающий предъявляемым к нему требованиям. Понятно, что для такой оценки редукторов и приводов необходимо располагать достоверными данными.

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя с задачами многокритериальной оптимизации и методами их решения.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры многокритериальных задач.
2. Назовите методы решения многокритериальных задач оптимизации.
3. Приведите пример структурно-параметрической оптимизации.

### 13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В БЕЗУСЛОВНУЮ

В этой главе приведены общие сведения о методах решения задач безусловной нелинейной оптимизации и рассмотрены основы и алгоритм преобразования исходной задачи условной оптимизации в безусловную методами множителей Лагранжа и штрафных функций.

#### Основные понятия и определения

**Избыточная переменная** — дополнительная переменная, при помощи которой ограничение-неравенство преобразуется в равенство

**Матрица Гессе (гессиан)** — см. гл. 1.

**Множитель Лагранжа** — постоянный множитель, на который умножается ограничение-равенство для образования новой составной целевой функции. Он рассматривается, как дополнительное неизвестное, определяемое в процессе решения.

**Седловая точка** — см. гл. 1.

**Стационарная точка** — точка максимума, минимума, перегиба или седла.

**Функция Лагранжа** — сумма заданной целевой функции и произведений множителей Лагранжа на функции ограничения.

**Штрафная функция** — дополнительная функция, учитывающая ограничения-неравенства и вводимая для образования новой составной целевой функции.

#### 13.1. Методы косвенной оптимизации

Рассмотрение методов поиска экстремумов функций многих переменных нельзя считать полным без обсуждения методов расчёта стационарных точек [11].

Как отмечается в главе 1, необходимым условием существования минимума, максимума или седловой точки функ-

ции многих переменных является равенством нулю всех её первых производных по независимым переменным, т. е. стационарная точка является целевой функцией  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, N;$$

Чтобы выяснить, является эта точка минимумом, максимумом или седлом, приходится исследовать вторые производные функции. Для этого составляется матрица Гессе (1.3).

Необходимым и достаточным условием локального минимума является положительная определённость этой матрицы, т. е. все собственные значения матрицы должны быть положительными. Локальному максимуму соответствует отрицательно определённая данная матрица, для которой все собственные значения отрицательны.

Алгоритм поиска оптимума функции следующий:

1. — решаем систему  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, N;$$

2. — проверяем матрицы Гессе для каждого решения;

3. — отбрасываем решения, не обладающие экстремальными свойствами;

4. — выбираем наилучшее из оставшихся решений.

Согласно алгоритму сначала находят все  $N$  первых частных производных и приравнивают их нулю. Полученную систему уравнений решают относительно всех возможных комбинаций проектных параметров, удовлетворяющих входящим в неё уравнениям. Если уравнения линейные, то задача решается непосредственно, так как в этом случае она имеет одно решение. Если же уравнения нелинейные, как это обычно бывает, то система может иметь несколько решений. Найдя все решения, отбрасывают те из них, которые не соответствуют экстремумам. Для этого во всех найденных точках вычисляют вторые производные, получают

окончательную группу решений, выбирают из неё то, которому соответствует наилучшее значение целевой функции. Это решение и является оптимальным.

Хотя изложенный выше метод с математической точки зрения представляется непосредственно ведущим к решению, в действительности он непрактичен, так как оптимальное решение очень часто соответствует границе пространства проектирования, а не одной из стационарных точек. Кроме того, этот метод требует вычисления собственных значений матриц и решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

### 13.2. Метод множителей Лагранжа

**Общие сведения.** Метод неопределённых множителей Лагранжа применяется для решения задач с аналитическим выражением для критерия оптимальности и при наличии ограничений на независимые переменные типа равенств. Для получения аналитического решения требуется, чтобы ограничения имели аналитический вид. Применение неопределённых множителей Лагранжа позволяет свести задачу оптимизации с ограничениями к задаче, решаемой методами исследования функций классического анализа. В этом случае порядок системы уравнений, решаемой для нахождения экстремума критерия оптимизации, повышается на число ограничений. Применение метода эффективно при количестве переменных три и менее. Если процесс описывается конечными уравнениями, то метод используется и при количестве переменных более трёх.

Метод множителей Лагранжа является разновидностью метода стационарных точек. Он применяется в двух случаях: при ограничениях-равенствах и ограничениях-неравенствах.

Основная идея метода состоит в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой построенной функции Лагранжа.

**Метод множителей Лагранжа при ограничениях-равенствах.** Пусть требуется найти экстремум целевой функции:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \quad (13.1)$$

при заданных ограничениях-равенствах

$$\left. \begin{aligned} q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ q_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ \dots \\ q_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Задача сводится к определению  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  и  $\varphi_{\text{extr}}$ .

Вводим новую целевую функцию Лагранжа, которая представляет собой сумму заданной целевой функции и произведение множителей Лагранжа на функции ограничения

$$L = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1 \dots m$ ) — неопределённые множители Лагранжа.

Теперь необходимые условия экстремума заданной функции при наличии ограничений могут быть записаны в виде системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= q_1(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= q_2(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} &= q_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

Решением этой системы являются значения  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ , ...  $x_n^*$  и  $\lambda_1^*$ ,  $\lambda_2^*$ , ...  $\lambda_m^*$ . Используя оптимальные значения  $x_i^*$ , находим экстремум заданной целевой функции.

Если функция имеет несколько экстремальных точек, то необходимо их исследовать.

Согласно изложенному, метод множителей Лагранжа состоит из следующих шагов, определяющих его алгоритм:

- составляем функцию Лагранжа  $L(x, \lambda)$ ;
- находим частные производные

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j}, j = \overline{1, n}; \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i}, i = \overline{1, m};$$

- решаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j}, j = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = h_i(x) = 0, i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

и отыскиваем точки  $x^*$  и значения коэффициентов  $\lambda$ , удовлетворяющие системе (13.4);

— найденные точки  $x^*$  исследуем на максимум или минимум.

Укажем, что методом Лагранжа получаем точное решение. В этом заключается его достоинство. Однако данный метод имеет и недостатки:

- его можно использовать в случае, когда целевая функция дифференцируема;
- при большой размерности задачи решение системы уравнений представляет определённую трудность.

**Пример 13.1.** Решим задачу, рассмотренную в примере 7.4, методом множителей Лагранжа.

Имея математическую модель (7.8) и (7.9) составляем функцию Лагранжа

$$L = A(x_1, x_2) + \lambda q(x_1, x_2).$$

Для определения  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  и  $\lambda$  составляем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda x_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda x_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - d^2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Решением этой системы являются:

$$\lambda = -0,5; \quad x_1^* = x_2^* = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$A_{\max} = 0,5d^2.$$

**Примечание.** Последующие два примера взяты из работы [6] с некоторым редактированием. Причём, структура изложения материала может считаться, по нашему мнению, классической для решения оптимизационных задач.

**Пример 13.2.** Спроектировать быстровращающийся ступенчатый вал с тяжёлым диском посередине (рис. 13.1) при минимально возможной массе.

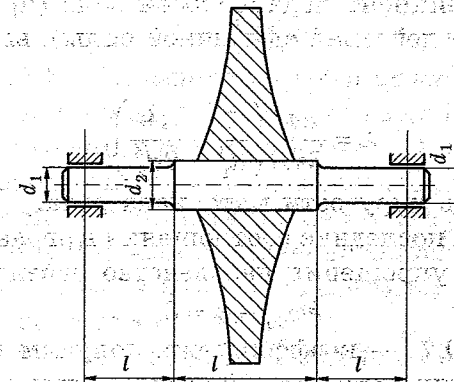


Рис. 13.1. Расчётная схема

**Алгоритм решения:**

— определение переменных проектирования. Из рассмотрения схемы вала следует, что при заданной длине ступеней в распоряжении конструктора будут две переменные проектирования — диаметры  $d_1$  и  $d_2$  ступеней вала;

— построение целевой функции. Примем в качестве критерия оптимальности массу вала. Тогда целевая функция — зависимость

$$g = m \equiv 0,25\rho\pi l(2d_1^2 + d_2^2); \quad (13.5)$$

— формирование системы ограничений. Функциональные ограничения: рабочая угловая скорость вала  $\omega$  во избежание больших поперечных колебаний вала должна удовлетворять условию

$$\omega_{кр} - \omega \geq 0, \quad (13.6)$$

где  $\omega_{кр}$  — критическая угловая скорость.

Для принятой модели вала с массивным (абсолютно жёстким) диском критическая угловая скорость вала, равная частоте собственных колебаний  $p$ , т. е. условие резонанса

$$p = \frac{1}{\sqrt{\lambda m}} = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_{кр},$$

где  $c$  — коэффициент жёсткости вала;

$\lambda$  — коэффициент податливости вала (прогиб среднего сечения вала от действия единичной силы), вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{64l}{6\pi E} \left( \frac{1}{d_1^4} + \frac{19}{8d_2^4} \right),$$

где  $E$  — модуль упругости материала вала.

Подставляя последние соотношения в ограничение (13.6) и заменяя для упрощения неравенство равенством

$$k\omega_{кр} - \omega = 0,$$

в котором  $k \leq 0,7$  — коэффициент, получим условие динамической устойчивости вала (функциональное ограничение) в форме равенства

$$\varphi_1(x) \equiv \frac{1}{d_1^4} + \frac{2,38}{d_2^4} - c = 0, \quad (13.7)$$

где  $c$  — коэффициент жёсткости,  $c = 1/\lambda$ .

Ограничения по знаку

$$\varphi_2 \equiv d_1 \geq 0; \quad \varphi_3 \equiv d_2 \geq 0. \quad (13.8)$$

**Решение.** Для решения задачи применим метод Лагранжа. Функция Лагранжа

$$L = g + \lambda_g \varphi, \quad (13.9)$$

где  $\lambda_g$  — постоянная.

Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial L}{\partial d_1} = \frac{\partial g}{\partial d_1} + \lambda_g \frac{\partial \varphi}{\partial d_1} = \frac{\pi\rho l}{4} 4d_1 - \lambda_g \frac{4}{d_1^5} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_2} = \frac{\partial g}{\partial d_2} + \lambda_g \frac{\partial \varphi}{\partial d_2} = \frac{\pi\rho l}{4} 2d_2 - \lambda_g \frac{4 \cdot 2,38}{d_2^5} = 0; \quad (13.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_g} = \varphi = \frac{1}{d_1^4} + \frac{2,38}{d_2^4} - c = 0.$$

Из условий (13.10) находим оптимальное отношение диаметров  $d_2/d_1 = 1,3$ . Подставляя это значение в последнее равенство получим

$$d_1 = 1,16\sqrt[4]{c}.$$

**Пример 13.3.** Требуется спроектировать двухступенчатый цилиндрический редуктор минимальной массы, выполненный по развёрнутой схеме (рис. 13.2). При этом необходимо решить задачу о разбиении общего передаточного отношения между ступенями. Её можно решать несколькими способами. В качестве косвенного критерия оптимальности в этом случае можно использовать, например, суммарное межосевое расстояние  $a_\Sigma$ .

Определим передаточные отношения в ступенях редуктора, минимизирующие функционал для суммарного межосевого расстояния.

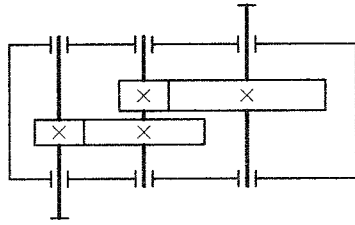


Рис. 13.2. Схема редуктора типа Ц2

*Решение. 1. Определение переменных проектирования.*

Рассмотрим схему редуктора. Межосевое расстояние для  $i$ -й ступени редуктора ( $i = 1, 2$ ),

$$a_i = 0,5m_i(z_{шi} + z_{кi}) = 0,5m_i z_{шi}(1 + u_i),$$

где  $m_i$  — модуль зубчатого зацепления  $i$ -й ступени;

$z_{шi}$  и  $z_{кi}$  — числа зубьев шестерни и колеса;

$u_i$  — передаточное отношение  $i$ -й ступени.

Таким образом, в распоряжении конструктора имеется шесть переменных проектирования: модули  $m_1$  и  $m_2$  зацеплений 1-й и 2-й ступеней, числа зубьев  $z_{ш1}$  и  $z_{ш2}$ .

2. *Построение целевой функции.* Примем в качестве критерия оптимальности суммарное межосевое расстояние; тогда целевая функция

$$f(x) = 0,5m_1 z_{ш1}(1 + u_1) + 0,5m_2 z_{ш2}(1 + u_2). \quad (13.11)$$

3. *Формирование системы ограничений.* Функциональные ограничения:

а) напряжения изгиба в опасном сечении зубьев должны быть не больше допускаемых, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{2T_{ш1} Y_{F1}}{m_1^3 z_{ш1} \Psi_{bd1}} Y_{\beta1} K_{F\alpha1} K_{F\beta1} K_{F\psi1} - [\sigma_{F1}] &\leq 0; \\ \frac{2T_{ш2} Y_{F2}}{m_2^3 z_{ш2} \Psi_{bd2}} Y_{\beta2} K_{F\alpha2} K_{F\beta2} K_{F\psi2} - [\sigma_{F2}] &\leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

где  $T_{ш1}$  и  $T_{ш2}$  — вращающие моменты на шестернях 1-й и 2-й ступеней редуктора;

$Y_{F1}$  и  $Y_{F2}$  — коэффициенты формы зубьев шестерён;  
 $\Psi_{bd1}$  и  $\Psi_{bd2}$  — коэффициенты ширины колёс 1-й и 2-й ступеней;

$[\sigma_{F1}]$  и  $[\sigma_{F2}]$  — допускаемые напряжения при изгибе для зубьев шестерён;

$Y_{\beta1}, \dots, K_{F\psi2}$  — коэффициенты.

*Примечание.* Основным критерием работоспособности закрытых зубчатых передач является, как правило, контактная прочность зубьев, а в отдельных случаях — изгибная [6].

Коэффициенты, входящие в эти ограничения, также являются переменными величинами. Однако их для упрощения задачи можно принять в качестве параметров состояния, однозначно определяемых значениями переменных проектирования. Примем для упрощения, что произведение

$$Y_{\beta1} K_{F\alpha1} K_{F\beta1} K_{F\psi1} = Y_{\beta2} K_{F\alpha2} K_{F\beta2} K_{F\psi2};$$

б) вращающие моменты на шестернях связаны между собой условием

$$T_{ш2} - T_{ш1} u_1 = 0; \quad (13.13)$$

в) общее передаточное отношение  $u_{\Sigma}$  и передаточные отношения  $u_1, u_2$  в ступенях образуют ограничение в форме равенства

$$u_{\Sigma} - u_1 u_2 = 0. \quad (13.14)$$

Параметрические ограничения:

а) коэффициенты ширины колёс

$$\Psi_{bd} \in [0,4; 0,9]; \quad (13.15)$$

б) передаточное отношение в одной ступени

$$u \in [3; 6]; \quad (13.16)$$

в) число зубьев шестерни

$$z_{ш} \in [13; 25]. \quad (13.17)$$

Дискретизирующие ограничения:

а) модули зацеплений

$$m \in \{1,5; 2; \dots; 80\}; \quad (13.18)$$

б) числа зубьев шестерён

$$z \in \{13; 14; \dots; 25\}. \quad (13.19)$$

Ограничения по знаку:

$$m_1 \geq 0; m_2 \geq 0; u_1 \geq 0; u_2 \geq 0; z_{m1} \geq 0; z_{m2} \geq 0. \quad (13.20)$$

Таким образом, задача выбора передаточных чисел  $u_1$  и  $u_2$  ступеней, минимизирующих суммарное межосевое расстояние, сводится к выбору переменных проектирования, минимизирующих целевую функцию (13.11) и удовлетворяющих с учётом принятых упрощений ограничениям (13.12)-(13.20).

Решение задачи в описанной постановке оказывается довольно сложным из-за сравнительно большого числа переменных, ограничений в форме неравенств и равенств, нелинейной зависимости ограничений от параметров проектирования (задача нелинейного программирования).

Для упрощения понизим размерность задачи. Примем, что  $z_{m1} = z_{m2}$ ; тогда функционал (13.11) примет вид

$$f(x) = a_z \equiv 0,5m_1z_{m1} \left[ 1 + u_1 + \frac{m_2}{m_1}(1 + u_2) \right]. \quad (13.21)$$

Положим также, что колёса имеют одинаковую ширину ( $\Psi_{bd1} = \Psi_{bd2}$ ) и изготовлены из одинаковых материалов по одинаковой технологии ( $[\sigma_{F1}] = [\sigma_{F2}]$ ). Тогда, обращая неравенства (13.12) в равенства и учитывая ограничение (13.13), найдём

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt[3]{\frac{T_{m2}\Psi_{bd1}[\sigma_{F1}]}{T_{m1}\Psi_{bd2}[\sigma_{F2}]}]} = \sqrt[3]{u_1}. \quad (13.22)$$

Подставляя полученное соотношение в уравнение (13.21), получим целевую функцию

$$g_a = a_z \equiv 0,5m_1z_{1m} \left[ 1 + u_1 + u_1^{1/3}(1 + u_2) \right]. \quad (13.23)$$

Допустим, что переменные  $m_1$  и  $z_{1m}$  являются параметрами состояния (т. е. неварьируемыми параметрами). При этих допущениях число ограничений сокращается до трёх:

$$\varphi_1(x) \equiv u_2 - u_1u_2; \varphi_2 \equiv u_1 \geq 0; \varphi_3 \equiv u_2 \geq 0. \quad (13.24)$$

Прежде, чем решить сформулированную таким образом задачу, заметим, что первое ограничение в (13.24) не выполняется, если  $u_1$  или  $u_2$  равны нулю. Поэтому следует рассматривать только первое ограничение в (13.24), а второе и третье ограничения используются для проверки решения.

*Решение.* 1. Для решения задачи на базе описанной математической модели применим метод Лагранжа.

Условия экстремальных значений функции (13.9) запишем в виде

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial a_z}{\partial u_i} + \lambda_a \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = 0$$

$$(u = 1, 2).$$

Решение даёт следующую зависимость между передаточными отношениями двух последовательных ступеней:

$$u_2 = \frac{3}{2}u_1^{2/3} + \frac{1}{2}. \quad (13.25)$$

Учитывая, что  $u_2 = u_z/u_1$ , найдём:

$$3u_1^{5/3} + u_1 - 2u_z = 0. \quad (13.26)$$

Решение этого уравнения дано на рисунке 13.3; зависимость суммарного относительного межосевого расстояния от передаточного отношения первой ступени редуктора показана на рисунке 13.4. На этом рисунке виден ярко выраженный минимум относительного межосевого расстояния. Другие расчётные случаи приведены в приложении.



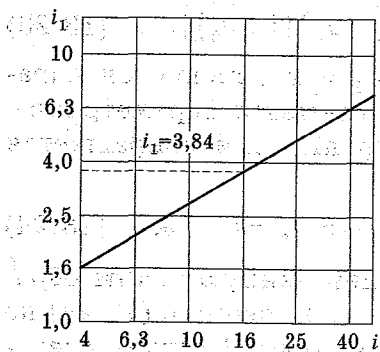


Рис. 13.3. Передаточное число первой ступени

По аналогии с рассмотренной задачей можно определить передаточные числа ступеней при других критериях оптимальности (например, объёме или диаметре колёс) и для других типов редукторов (например, коническо-цилиндрического, зубчато-червячного).

Метод множителей Лагранжа при ограничениях-неравенствах. Сейчас метод множителей Лагранжа распространяем на случай, когда ограничения заданы в виде неравенств.

Рассмотрим общую задачу математического программирования: минимизировать функцию  $f(x)$  при наличии ограничений  $q_i(x) \leq b_i$ ,  $i = 1, m$ .

Если ограничение имеет вид  $h(x) \geq c$ , то можно его представить в виде

$$-h(x) \leq -c.$$

Ограничения в виде неравенств могут быть преобразованы в виде равенств добавлением к каждому из них неотрицательной избыточной (дополнительной) переменной  $u_i^2$ , которая, естественно, всегда положительна.

$$q_i(x) + u_i^2 = b_i$$

или

$$q_i(x) + u_i^2 - b_i = 0. \quad (13.27)$$

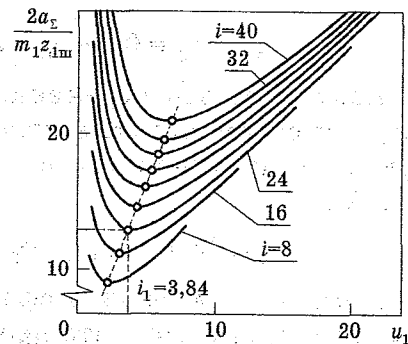


Рис. 13.4. Суммарное относительное межосевое расстояние в зависимости от  $u_1$

Таким образом, задача сводится к минимизации целевой функции  $f(x)$  при наличии  $m$  ограничений в виде равенств (13.5).

Согласно предыдущему подразделу составляем функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(x) + u_i^2 - b_i].$$

Имея эту функцию, дальнейшее решение аналогично первому случаю [1].

### 13.3. Метод барьерных функций

Метод предназначен для решения задач нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами. Этот метод напоминает методы штрафных функций, которые подробно рассмотрены ниже, поэтому по рассматриваемому методу даются краткие сведения.

Пусть требуется минимизировать функцию с ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min; X = [x \in R^n | g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m].$$

Для этого составляем новую функцию

$$F_k(x) = f(x) + r_k B(x), k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (13.28)$$

где  $r_k$  — монотонно убывающая, сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел;

$B(x)$  — барьерная функция.

Дальнейшее изложение метода, его достоинства и недостатки приведены в работе [15].

Для иллюстрации этого метода рассмотрим следующий простейший пример:

$$f(x) \rightarrow \min; X = [x \in R^n | g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m].$$

Здесь  $n = 1$ ,  $m = 1$ ,  $f(x) = x$ ,  $g_1(x) = -x$ ,  $X_1 = \{x | x > 0\}$ ,  $X_2 = \{0\}$ . Очевидно, решением этой задачи служит граничная точка  $x_{\min} = 0$ . В качестве барьерной функции возьмём, например,

$B(x) = -1/x$  при  $x > 0$  и положим  $r_k = k^{-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В этом случае функция (13.28) принимает вид  $F_k(x) = x + (kx)^{-1}$ . Нетрудно найти её точку минимума  $x^{(k)} = 1/\sqrt{k}$  на множестве положительных чисел. Имеем  $\lim x^{(k)} = x_{\min}$ .

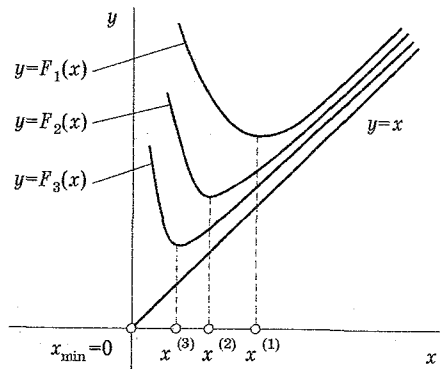


Рис. 13.5. К методу барьерных функций

На рисунке 13.5 дана геометрическая иллюстрация к процессу решения примера при  $k = 1, 2, 3$ . При увеличении  $k$  и приближении точки  $x^{(k)}$  к границе допустимого множества линия графика функции  $F_k(x)$  становится всё более крутой, как бы воздвигая «барьер» и не давая возможности точке  $x^{(k)}$  выйти за пределы допустимого множества.

### 13.4. Методы штрафных функций

**Принципы решения.** Основная идея метода штрафных функций (МШФ) состоит в сведении исходной задачи минимизации с ограничениями в форме неравенств и (или) равенств к последовательности подзадач без ограничений, для решения которых используются соответствующие методы безусловной оптимизации. Внешне этот метод напоминает метод барьерных функций.

Рассматриваемый метод относится к численному решению оптимизационных задач. Задача может быть сформулирована следующим образом: минимизировать

$$f(x), x \in R^N \quad (13.29)$$

при ограничениях:

$$g_j(x) \geq 0, j = 1, 2, \dots, m, \quad (13.30)$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, l. \quad (13.31)$$

Суть метода заключается в преобразовании исходной целевой функции (13.29) путём включения в неё функции от ограничений (13.30) и (13.31), получая таким образом задачу безусловной оптимизации, для решения которой можно использовать известные методы.

Следовательно, новая функция является суммой исходной и штрафной функций и определяется выражением

$$P(x, R) = f(x) + \varphi(R, g(x), h(x)), \quad (13.32)$$

где  $\varphi$  — штрафная функция от ограничений задачи;

$R$  — штрафной параметр.

Необходимо, чтобы при нарушении ограничений она «штрафовала» функцию  $P$ , т. е. увеличивала её значение. В этом случае минимум  $P$  будет находиться внутри области ограничений. Функция  $\varphi$ , удовлетворяющая этому условию, может быть не единственной.

Ниже рассматриваем решения задач нелинейного программирования методом штрафных функций с учётом ограничений — равенств и ограничений — неравенств.

Алгоритм решения оптимизационных задач штрафными методами приведён ниже при рассмотрении метода Фиакко-Маккормика.

**Метод Фиакко-Маккормика.** В нём используется штрафная функция вида

$$\varphi[G_j(x_i)] = r_k G_j^{-1}(x_i), k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $r_k$  — штрафной параметр, а индексом  $k$  обозначены последовательные значения штрафного параметра, соответствующие порядковому номеру рассматриваемой задачи. В результате неограниченная целевая функция принимает вид

$$P(x_i, r_k) = f(x_i) + r_k \sum G_j^{-1}(x_i), k = 0, 1, 2, \dots$$

В соответствии со свойством обратной функции функция  $P$  будет стремиться к бесконечности на границе, соответствующей поставленному условию.

Алгоритм решения этим методом следующий (рис. 13.6):  
 — в пространстве проектирования выбирают какую-либо подходящую точку;  
 — с помощью выбранного метода находят оптимум, соответствующий заданному начальному значению  $r_1$ .

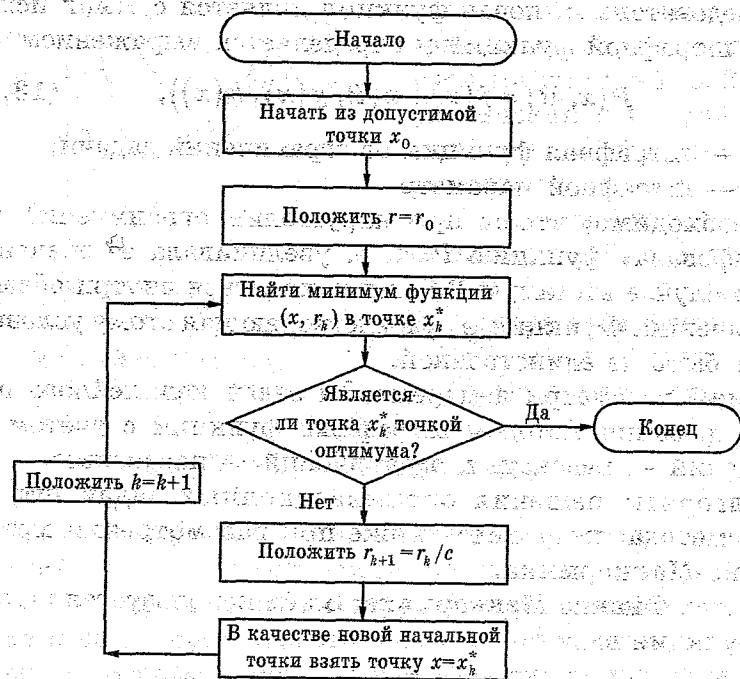


Рис. 13.6. Схема алгоритма метода Фиакко-Маккормика

Поскольку исходная точка расположена в области существования решения, то и найденный оптимум тоже будет находиться в этой области. Никакая траектория наискорейшего спуска, выходящая из точки пространства проектирования, не может пересечь границу, заданную дополнительным условием. При реализации этого этапа может быть использована любая процедура оптимизации: метод Хука-Дживса, поиск по симплексу. Если имеется возможность вычисления  $\partial P / \partial x_i$ , то применимы любые градиентные процедуры поиска:

— найдя минимум, используют его как исходную точку для новой целевой функции с меньшим значением  $r_k$ ;  
 — процедуру оптимизации повторяют, используя убывающие значения  $r_k$ :  $r_0 > r_1 > r_2 \dots > 0$ , причём  $r_k > r_1 > r_2 \dots > 0$ , где  $r_{k+1} = r_k / c$ , где рекомендуется [11] принимать  $c = 12, 16$  и т.п.

По мере того как  $r_k$  стремится к нулю, решение оптимизационной задачи на абсолютный минимум стремится к решению задачи на условный минимум.

**Типы штрафов.** Существуют различные типы штрафов и различные процедуры учёта ограничений при переходе к задаче безусловной оптимизации.

**Квадратичный штраф.** Этот вид штрафа используется для учёта ограничений — равенств и имеет вид 
$$\varphi = R(h(x))^2 \quad (13.33)$$

При минимизации этот штраф препятствует отклонению величины  $h(x)$  от нуля. Легко видеть, что при увеличении  $R$  стационарная точка штрафной функции  $P(x, R)$  приближается к искомому решению  $x^*$ , так как в пределе  $h_t(x^{(t)}) = 0$ , где  $t = 1, 2, \dots, T$ . Функция  $\varphi$  непрерывна и имеет непрерывные производные.

**Логарифмический штраф.** Этот и рассматриваемые далее виды штрафов учитывают ограничения-неравенства. Логарифмический штраф имеет вид

$$\varphi = -R \ln [g(x)] \quad (13.34)$$

Штраф положителен при всех  $x$ , таких, что  $0 < g(x) < 1$ , и отрицателен при  $g(x) > 1$ . В этом случае внутренним точкам области допустимых решений отдаётся предпочтение. **Логарифмический штраф** — барьерная функция, не определённая в недопустимых точках (т. е. для таких, в которых  $g(x) < 0$ ). Поэтому на начальном этапе необходимо обеспечить попадание в допустимую область. Поскольку преоб-

разованная задача решается одним из численных методов, то возможно появление недопустимых точек в процессе решения (например, как результата большого первого шага при одномерном поиске). В связи с этим должны быть предусмотрены специальные меры по предотвращению этой ситуации либо её обнаружению и устранению. Итерационный процесс начинается из допустимой точки при положительном начальном  $R$  ( $R = 10$  или  $R = 100$ ). После решения каждой подзадачи безусловной оптимизации штраф уменьшается и в пределе стремится к нулю.

**Штраф, заданный обратной функцией.** Этот штраф имеет следующий вид:

$$\phi = R \left[ \frac{1}{g(x)} \right], \quad (13.35)$$

причём отрицательные значения в допустимой области отсутствуют. Он, как и предыдущий, является барьерным штрафом. В допустимых точках вблизи границы значения штрафа положительны и быстро убывают при продвижении внутрь допустимой области. На самой границе значение  $P(x, R)$  и её градиент не определены. Как и в предыдущем случае возможно появление недопустимых точек.

**Штраф типа квадрата срезки.** Этот штраф имеет следующий вид:

$$\phi = R \langle g(x) \rangle^2, \quad (13.36)$$

где 
$$\langle a \rangle = \begin{cases} a, & \text{если } a \leq 0, \\ 0, & \text{если } a > 0. \end{cases} \quad (13.37)$$

Заметим, что этот штраф внешний. Недопустимые точки не создают в данном случае сложностей по сравнению с допустимыми. Различие между ними состоит в том, что в допустимых и граничных точках штраф равен нулю. Этот вид штрафа удобен тем, что  $P(x, R)$  непрерывна и определена всюду. Вычисления производятся с положительными  $R$ , увеличивающимися от итерации к итерации.

**Пример 13.4.** Используя штрафную функцию, заданную уравнением (13.35), минимизировать функцию  $f(x) = x$  при ограничениях  $x \geq 2$ , т. е.  $x - 2 \geq 0$ . Минимальным значением функции является 2 при  $x = 2$ . Покажем, как с помощью штрафной функции можно найти решение.

**Решение.** Рассмотрим функцию

$$P(x, r) = x + \frac{r}{(x-2)}.$$

На рисунке 13.7 изображён график функции  $P(x, r)$  и показано положение точек её минимума для различных значений  $r$  (1; 0,25 и 0,01).

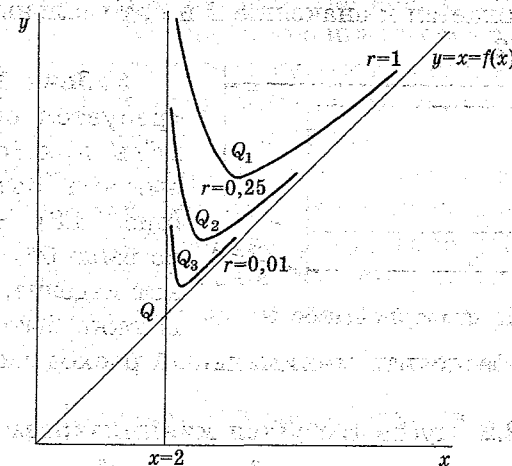


Рис. 13.7. К примеру 13.3

Область ограничений лежит справа от вертикальной прямой  $x = 2$ . Видим, что последовательность точек  $Q_1, Q_2, Q_3$  стремится к точке  $Q$  — минимуму функции при наличии ограничений. Для подтверждения этого найдём минимум функции  $P(x, r)$  классическим методом:

$$\frac{dP}{dx} = 1 - \frac{r}{(x-2)^2}.$$

Поскольку  $dP/dx = 0$  то,  $(x - 2)^2 = r$  и, следовательно,

$$x = 2 \pm \sqrt{r}.$$

При этом

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{2r}{(x - 2)^3}$$

и минимум достигается при  $x = 2 + \sqrt{r}$  внутри области ограничений.

Таким образом, функция  $P(x, r)$  имеет минимум, равный  $2 + 2\sqrt{r}$  при  $x = 2 + \sqrt{r}$ , причём  $Q_1$  является точкой с координатами (3; 4), а координаты точек  $Q_2(2,5; 3)$  и  $Q_3(2,1; 2,2)$ . Видно, что при  $r \rightarrow 0$  минимум без ограничений функции  $P(x, r)$  приближается к значению 2 и оптимальным значением будет  $x^* = 2$ .

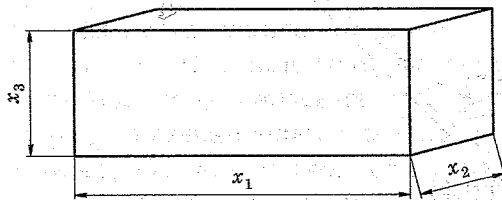


Рис. 13.8. Параметры ёмкости

Необходимо обеспечить минимальный расход листового материала.

**Задача 13.2.** Пусть требуется минимизировать функцию

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2.$$

при ограничениях  $h(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0$ .

**Примечание.** Задачу решить, используя все типы штрафов [6].

**Задача 13.3.** Пусть требуется минимизировать функцию [1]

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + 1)^3}{3} + x_2$$

при ограничениях  $x_1 - 1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

### 13.5. Сравнение методов

Укажем достоинства и недостатки методов, рассмотренных в данной главе:

- метод множителей Лагранжа даёт точное решение;
- методы штрафных функций сводятся к решению ряда подзадач и поэтому характеризуются большим объёмом вычислений.

### 13.6. Понятие о решении задач с седловыми точками

В инженерной практике часто встречаются задачи, в которых целевая функция является «овражной» (имеющей «седло») (рис. 1.7). Её линии уровня имеют *точки излома*. В таком случае производные целевой функции имеют разрывы, и для поиска оптимального решения используется ряд оригинальных алгоритмов [13].

**Заключение.** Материал данной главы знакомит пользователя с общими сведениями о методах решения задач безусловной нелинейной оптимизации, основами и алгоритмом преобразования исходной задачи условной оптимизации в безусловную методами множителей Лагранжа и штрафных функций.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое штрафная функция?
2. Что представляет собой множитель Лагранжа?
3. Каков алгоритм методов стационарных точек?
4. Перечислите методы выбора направления и длины шага при поиске экстремума целевой функции.
5. Каков алгоритм метода множителей Лагранжа?
6. В каких случаях используется метод барьерных функций?
7. Назовите типы штрафных функций?
8. Сформулируйте задачу метода штрафных функций.

## 14. МИНИМАКСНЫЕ И МАКСИМИННЫЕ ЗАДАЧИ

В данной главе рассмотрены основы, указан алгоритм, и приведены примеры решения минимаксных и максиминных задач.

### Основные понятия и определения

**Максиминная задача** — задача, в которой максимизируется минимальное значение некоторой величины на заданном интервале.

**Минимаксная задача** — задача, в которой минимизируется максимальное значение некоторой величины на заданном интервале.

### 14.1. Основные положения

Рассмотрим основы решения минимаксных и максиминных задач.

Задача минимизации сводится к определению максимального значения некоторой величины на заданном интервале. Такая задача часто встречается в инженерной практике и называется минимаксной задачей или задачей на «минимакс». В данном случае целевая функция имеет вид

$$\max F(x) \rightarrow \min \quad (14.1)$$

или 
$$\max F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min, \quad (14.2)$$

т. е. максимальное значение этой функции должно быть минимальным.

По аналогии для максиминных задач можно записать

$$\min F(x) \rightarrow \max \quad (14.3)$$

или 
$$\min F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max, \quad (14.4)$$

т. е. минимальное значение целевой функции должно быть максимальным.

Следовательно, решение минимаксных и максиминных задач сводится к одно- или многомерному поиску, алгоритмы которых рассмотрены в предыдущих главах.

### 14.2. Примеры решения минимаксных и максиминных задач

**Пример 14.1.** Винтовое соединение кронштейна с основанием (рис. 14.1) нагружено сдвигающей  $F'_2$  и отрывающей  $F_1$  силами, а также опрокидывающим моментом  $M$  пары сил  $F_2$  и  $F'_2$ , причём

$$M = F_2 h,$$

где  $h$  — плечо силы  $F_2$ .

При проектировании соединения необходимо:

1) определить требуемую начальную затяжку из двух условий: во-первых, отсутствия сдвига деталей; во-вторых, нераскрытия стыка;

2) определить диаметр винтов;

3) проверить прочность основания.

Условие отсутствия сдвига:

$$F_f > F_2 \quad (14.5)$$

или, вводя коэффициент запаса сцепления  $K_{s,2}$ , получим

$$F_f > K_{s,2} F_2,$$

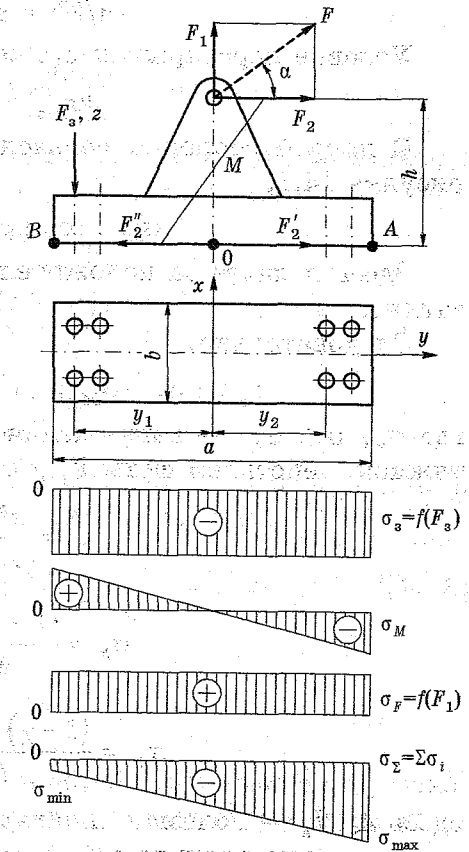


Рис. 14.1. Расчётная модель с эпюрами напряжений в стыке для соединения кронштейна с основанием (без учёта выборки)

где  $F_f$  — суммарная сила трения в стыке, обусловленная затяжкой  $z$  винтов.

Так как  $F_2 = F \cos \alpha$ ,  $F_1 = F \sin \alpha$  и  $F_f = f F_N = f(F_2 \pm F_1)$ , то

$$F_{2,2} = \frac{F}{z} \left( \frac{K_{2,2}}{f} \cos \alpha \pm \sin \alpha \right), \quad (14.6)$$

причём

$$-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2.$$

Условие нераскрытия стыка:

$$|\sigma_{\min}| > 0.$$

С другой стороны, согласно эпюрам, показанным на рисунке 14.1,

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 \pm \sigma_F - \sigma_M.$$

Здесь и далее за положительные приняты напряжения затяжки в  $\sigma_3$ .

Следовательно,

$$\sigma_3 > \pm \sigma_F + \sigma_M \text{ или } \sigma_3 = K_{3,1} (\sigma_M \pm \sigma_F), \quad (14.7)$$

где  $\sigma_3$ ,  $\sigma_F$ ,  $\sigma_M$  — напряжения в стыке, обусловленные затяжкой, действием силы  $F_1$  и момента  $M$ .

$$\sigma_3 = \frac{z F_2}{A_n};$$

$$\sigma_F = \frac{(1 - \chi) F_1}{A_n};$$

$$\sigma_M = \frac{(1 - \chi) F_2 h y_{\max}}{I_n},$$

здесь  $A_n$ ,  $I_n$  — полезная площадь (нетто стыка) и её момент инерции относительно оси  $x - x$ ;

$\chi$  — коэффициент внешней нагрузки;

$(1 - \chi) F_1$  и  $(1 - \chi) F_2 h$  — величина уменьшения начальной затяжки стыка при действии силы  $F_1$  и момента  $M = F_2 h$  соответственно.

В дальнейшем не будем оценивать влияние жёсткости винтов  $C_v$  и соединяемых деталей (фланцев)  $C_\phi$  на решение задачи, причём будем считать, что

$$C_\phi \gg C_v.$$

Тогда можно записать

$$\sigma_F = \frac{F \sin \alpha}{A_n};$$

$$\sigma_M = \frac{F h y_{\max}}{I_n},$$

где  $A_n$ ,  $I_n$  — величины, определяемые без учёта площади отверстий под винты:

$$A_n = (a - a_0) b;$$

$$I_n = \frac{(a^3 - a_0^3) b}{12};$$

$$y_{\max} = \frac{a}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в условия (14.7), после преобразований окончательно получим

$$F_{2,1} = \frac{K_{3,1} F}{z} \left( \sin \alpha + \frac{6h}{a} \cdot \frac{1}{1 + C + C^2} \cos \alpha \right), \quad (14.8)$$

где

$$C = \frac{a_0}{a},$$

причём размер  $a_0$  может быть обусловлен выборкой у основания кронштейна (рис. 14.5) или платиками у рамы (плиты), к которой крепится кронштейн.

В дальнейшем расчёте используют большее значение силы затяжки из условий (14.6) и (14.8). Кстати, приравняв выражения (14.6) и (14.8), получим минимальное значение угла  $\alpha$ , при котором

$$F_{a.1} = F_{a.2},$$

$$\alpha_{\min} = \arctg \left\{ \frac{K_{a.2}}{fb(K_{a.1} \pm 1)} \right\}; b = \frac{6h}{a} \cdot \frac{1}{1+C+C^2}, \quad (14.9)$$

причём знак «-» для  $\alpha > 0$  и «+» для  $\alpha < 0$ .

Если  $|\alpha| > |\alpha_{\min}|$ ,  $F_{a.1} > F_{a.2}$ . В противном случае  $F_{a.1} < F_{a.2}$ , при этом при больших сдвигающих нагрузках ( $F'_2 \geq 4$  кН) целесообразно применять специальные конструктивные решения [6], позволяющие разгрузить крепёжные детали от действия силы, т. е. в таких конструкциях винты, поставленные с зазором, воспринимают только нагрузку ( $F_1$  и  $M$ ), раскрывающую стык деталей.

В таблице 14.1 приведены значения  $\alpha_{\min}$  при различных сочетаниях параметров.

В таблице 14.1 принято:  $f = 0,15$  — сталь по чугуну (по стали);  $f = 0,30$  — сталь (чугун) по бетону.

Расчёт выполнен при  $K_{a.1} = K_{a.2} = 1,5$ .

Данные таблицы 14.1 свидетельствуют о том, что в подавляющем большинстве случаев (особенно при  $\alpha > 0$ )  $F_{a.2} > F_{a.1}$ .

Однако в дальнейшем будем считать, что имеются устройства, разрушающие соединение от действия сдвигающей силы  $F'_2$ .

Таблица 14.1

Значения  $\alpha_{\min}$  при различных сочетаниях параметров

C = 0									
a/h = 1,5	A = 4	f	0,15	0,30	a/h = 2	A = 3	f	0,15	0,30
		$\alpha_{\min}$	78,7°	68°			$\alpha_{\min}$	81,5°	73,3°
			-45°	-26,6°				-53°	-33,7°
C = 0,5									
a/h = 1,5	A = 2,29	f	0,15	0,30	a/h = 2	A = 1,7	f	0,15	0,30
		$\alpha_{\min}$	83,5°	77°			$\alpha_{\min}$	85°	80,4°
			-60°	-41°				-67°	-50°

Если материал основания, к которому крепится кронштейн, малопрочен (например, бетон) по сравнению с материалом винтов, необходима такая проверка

$$\sigma_{\max} = \sigma_a \pm \sigma_F + \sigma_M \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где  $[\sigma_{\text{см}}]$  — допускаемые напряжения смятия для материала основания.

Расчёт винтов на прочность выполняют в соответствии с расчётной схемой, представленной на рисунке 14.2.

Считая, что сила  $F = \text{const}$ , для наиболее нагруженных винтов первого ряда условие прочности записать в следующем виде:

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{\gamma F_2}{A_B} + \frac{F_B}{zA_B} + \frac{M_B y_1}{I_B} \leq [\sigma], \quad (14.10)$$

где  $\gamma = 1,3$ ;  $F_B = \chi F_2$ ;  $M_B = \chi M$ ;  $\chi = 0,2 \dots 0,3$ ;

$A_B$  — площадь винта;

$I_B$  — момент инерции сечений всех винтов относительно оси  $x - x$ .

$$I_B \approx \sum_{i=1}^n A_B z_i y_i^2 = A_B z_1 \sum y_i^2,$$

где  $y_i$  — расстояние от оси  $i$ -го ряда винтов;

$z_1$  — число винтов в одном ряду.

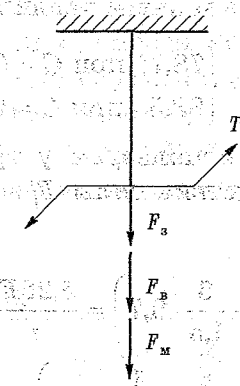


Рис. 14.2. Расчётная схема винта



При проектировочном расчёте условие прочности (14.10) решаем относительно  $A_b$  и далее определяем диаметр винтов

$$d = \sqrt{\frac{\gamma F_s + \frac{\chi F \sin \alpha}{z} + \frac{\chi F h y_1 \cos \alpha}{z_1 \sum y_i^2}}{0,545 [\sigma]}} \quad (14.11)$$

Прежде чем приступить к постановке оптимизационной задачи, касающейся рассматриваемого вида винтового соединения, решим частный пример, который позволит оценить долю каждого слагаемого в суммарном напряжении, возникающем в винте,

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_E + \sigma_{BF} + \sigma_{BM},$$

где  $\sigma_E$  — эквивалентное напряжение в момент затяжки;

$\sigma_{BF}$ ,  $\sigma_{BM}$  — напряжение в винте от действия силы  $F_1$  и момента  $M$ , причём

$$\sigma_E = \frac{\gamma F_s}{A_b}; \quad \sigma_{BF} = \frac{\chi F \sin \alpha}{A_b z}; \quad \sigma_{BM} = \frac{\chi F h y_1 \cos \alpha}{A_b z_1 \sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Возьмём следующие исходные данные:  $\chi = 0,2$  и  $0,3$ ;  $K_{s,1} = K_{s,2} = 1,5$ ;  $f = 0,15$ ;  $a/h = 1,5$ ;  $h/y_1 = 2,0$ ;  $C = 0$  и  $0,5$ ; число рядов винтов  $n = 2$ ;  $z_1 = 2$ ;  $\alpha = 45^\circ$ .

При этом, согласно данным таблицы 14.1

$$\alpha_{\min} = \begin{cases} 78,7^\circ & \text{при } C = 0; \\ 83,5^\circ & \text{при } C = 0,5. \end{cases}$$

Так как  $\alpha < \alpha_{\min}$ , используем устройства, разгружающие соединение от действия силы  $F'_1$ .

Тогда

$$F_s = \begin{cases} F_{s,1} = \frac{1,5F}{z} \left( 0,7 + \frac{6}{1,5} \cdot 0,7 \right) = \frac{5,25F}{z}, & \text{при } C = 0; \\ F_{s,1} = \frac{1,5F}{z} \left( 0,7 + \frac{6}{1,5} \cdot \frac{1}{1,75} \cdot 0,7 \right) = \frac{3,45F}{z}, & \text{при } C = 0,5; \end{cases}$$

$$\sigma_E = \begin{cases} \frac{6,825F}{A_b z}, & \text{при } C = 0; \\ \frac{4,485F}{A_b z}, & \text{при } C = 0,5; \end{cases}$$

$$\sigma_{BF} = \frac{(0,14 \dots 0,21) F}{A_b z};$$

$$\sigma_{BM} = \frac{(0,28 \dots 0,42) F}{A_b z};$$

$$\sigma_{\Sigma} = \begin{cases} \frac{(7,2 \dots 7,4) F}{A_b z}, & \text{при } C = 0; \\ \frac{(4,9 \dots 5,1) F}{A_b z}, & \text{при } C = 0,5. \end{cases}$$

Полученные данные позволяют сделать следующие выводы:

- 1) на уровень напряжений в винте наибольшее влияние оказывает напряжение  $\sigma_E$  ( $\sigma_E$  составляет более 90 %  $\sigma_{\Sigma}$ );
- 2) сила затяжки  $F_s$  и напряжения в винте  $\sigma_{\Sigma}$  существенно зависят от формы стыка.

В связи с изложенным в качестве целевой функции возьмём силу затяжки  $F_s$  определяемую формулой (14.8).

Введём независимые переменные, влияющие на  $F_s$ , как компоненты независимого вектора  $x$ :

$$x_1 = z; \quad x_2 = \alpha; \quad x_3 = h; \quad x_4 = a; \quad x_5 = a_0.$$

Тогда математическую модель можно записать в следующем виде

$$F_s = \frac{K_s F}{x_1} \left( \sin x_2 + \frac{6x_3}{x_4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_5}{x_4} + \left(\frac{x_5}{x_4}\right)^2} \cos x_2 \right) \rightarrow \min \quad (14.12)$$

при ограничениях:

$$q_1(x) = x_1 - 2 \geq 0 \text{ или } q_1(x) = x_1 = 2i, i = 1, 2, \dots;$$

$$q_2(x) = \frac{\pi}{2} - x_2 \geq 0;$$

$$q_3(x) = x_2 + \frac{\pi}{2} \geq 0;$$

$$q_4(x) = x_3 - h_{\min} \geq 0;$$

$$q_5(x) = x_4 - x_3 \geq 0;$$

$$q_6(x) = x_5 \geq 0;$$

$$q_7(x) = 0,5(x_4 - x_3) - 20 \text{ мм} \geq 0;$$

$$q_8(x) = [\sigma_{\text{см}}] - \sigma_{\text{max}} \geq 0.$$

**Пример 14.2.** Пусть требуется спроектировать механизм (рис. 14.3) погрузочной машины грузоподъемностью  $F_G$ , имеющий силовой гидроцилиндр и стрелу длиной  $L$ , которая могла бы занимать начальное и конечное положения, определяемые углом  $\varphi$ .

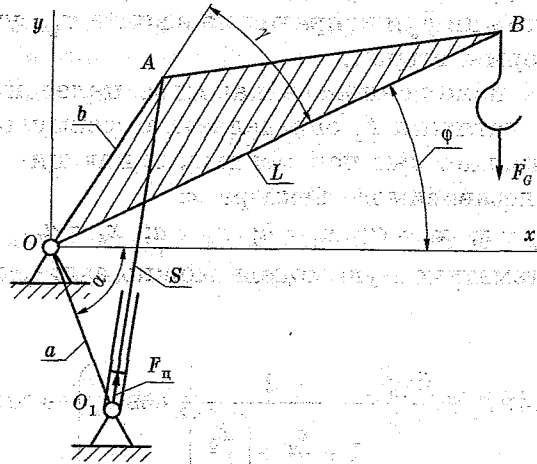


Рис. 14.3. Схема механизма погрузочной машины

Поскольку гидроцилиндр является самым дорогим звеном механизма, для надёжной его работы надо обеспечить минимальное значение давления в нём во всём диапазоне движения стрелы  $\varphi_{\text{нач}} \leq \varphi \leq \varphi_{\text{кон}}$ .

**Указание.** В рассматриваемом случае ограничимся получением формулы целевой функции

$$\max F_{\pi}(\varphi) \rightarrow \min. \quad (14.13)$$

Исходные данные для проектирования:

$$F_G = 20 \text{ кН};$$

$$L = 3 \text{ м};$$

$$\varphi_{\min} = -20^\circ;$$

$$\varphi_{\max} = 80^\circ.$$

Ограничения на амплитуду движения:

$$O_1A = S_i = S_{\min} = 1 \text{ м при } \varphi_{\text{нач}} = \varphi_{\min};$$

$$O_1A = S_i = S_{\max} = 1,8 \text{ м при } \varphi_{\text{кон}} = \varphi_{\max}.$$

**Решение.** Введём обозначение  $\beta = \alpha + \gamma$ . Тогда задачу определения проектных параметров  $a$ ,  $b$  и  $\beta$  будем решать из условия минимума нагрузки (14.13).

Размерность задачи можно уменьшить, если найти соотношение между линейными геометрическими параметрами  $a$ ,  $b$ ,  $S$  и соответствующими углами, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$S^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta + \varphi). \quad (14.14)$$

Введём обозначения

$$C_1 = 2ab; C_2 = a^2 + b^2 \quad (14.15)$$

и будем иметь

$$-S^2 = -C_2 + C_1 \cos(\beta + \varphi). \quad (14.16)$$

Пренебрегая силой тяжести металлоконструкции, из условия равновесия системы сил  $F$  находим

$$F_{\pi}(\varphi) = \frac{2F_G L \sqrt{C_2 - C_1 \cos(\beta + \varphi)} \cos \varphi}{C_1 \sin(\beta + \varphi)} \rightarrow \min. \quad (14.17)$$

При этом задача оптимизации принимает следующую стандартную форму:

— проектные параметры  $a$ ,  $b$  и  $\beta$ ;

— целевая функция

$$F_{\pi}(\varphi) \rightarrow \min;$$

— ограничения равенства:

$$\begin{aligned} C_1 \cos(\beta + \varphi_{\min}) - C_2 &= -S_{\min}^2; \\ C_1 \cos(\beta + \varphi_{\max}) - C_2 &= -S_{\max}^2. \end{aligned} \quad (14.18)$$

С учётом выражений (14.18) имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{S_{\min}^2 - S_{\max}^2}{\cos(\beta + \varphi_{\max}) - \cos(\beta + \varphi_{\min})}; \\ C_2 &= C_1 \cos(\beta + \varphi_{\max}) + S_{\min}^2. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Принимая во внимание формулы (14.15), окончательно получим

$$a = \frac{C_1}{2b}; \quad b = \left[ \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - C_1^2}}{2} \right]^{1/2}. \quad (14.20)$$

Следовательно, проектным параметром является одна величина  $\beta$ , т. е. приходим к задаче одномерного поиска, и максимальное значение  $F_{\pi}(\varphi)$  в интервале от  $\varphi_{\min}$  до  $\varphi_{\max}$  можно найти одним из таких методов. Тогда задача сводится к поиску оптимальной конструкции (размеров  $a_{\text{opt}}$  и  $b_{\text{opt}}$ ) и величины  $F_{\pi}(\varphi)_{\max}$ .

Предполагаем, что в рассматриваемом случае функция  $F_{\pi}(\varphi)$  является мультимодальной, причём при  $\sin(\beta + \varphi) = 0$  её значение обращается в бесконечность. Поскольку это создаёт дополнительные трудности, необходимо, чтобы

$$0 < \beta + \varphi < \pi,$$

где  $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ .

Тогда параметр  $\beta$  должен быть заключён в интервале

$$-\varphi_{\max} \leq \beta \leq \pi - \varphi_{\min}.$$

Отметим, что компьютерная реализация данной задачи приведена в работе [18].

**Пример 14.3.** Совершенствование конструкций цепного привода тесно связано с выполнением структурно-параметрической оптимизации его основных деталей: приводной цепи и звёздочек. В настоящем примере рассматривается вопрос, касающийся параметрической оптимизации звёздочек с вогнутым профилем зубьев, имеющим наибольшее применение в связи с его преимуществами перед другими.

**Постановка задачи.** В цепных передачах, содержащих звёздочки со стандартным вогнутым профилем (по ГОСТ 591), шарниры новой цепи контактируют либо с впадинами зубьев, либо с вогнутой частью рабочего участка их профиля. При этом нормальная составляющая скорости удара шарниров о зубья изменяется в диапазоне

$$V_{y \min}^n \leq V_y^n \leq V_{y \max}^n,$$

причём

$$V_{y \max}^n = \omega P_{\text{сн}}; \quad V_{y \min}^n = \omega P_{\text{сн}} \sin(\alpha_0 + \tau),$$

где  $V_y^n$ ,  $V_{y \min}^n$ ,  $V_{y \max}^n$  — текущее, минимальное и максимальное значения нормальной составляющей скорости удара шарниров цепи о зубья звёздочки;

$\omega$  — угловая скорость звёздочки;

$P_{\text{сн}}$  — номинальный шаг цепи;

$\alpha_0$  — первоначальный угол профиля зубьев, соответствующий точке  $E$  (рис. 14.4);

$\tau$  — угловой шаг звёздочки;

$\tau = 360^\circ/z$  ( $z$  — число зубьев звёздочки).

Так как угол  $\alpha_0$  является максимальным, то скорость и зависящая от неё сила ударов шарниров цепи о зубья звёздочки также максимальны.

Кроме того, известно [6], что ресурс цепи в закрытых скоростных цепных передачах обусловлен сопротивлением усталости её деталей. При этом относительное увеличение среднего шага может составлять не более 2% и рабочий участок  $EF$  профиля зуба используется далеко неполностью.

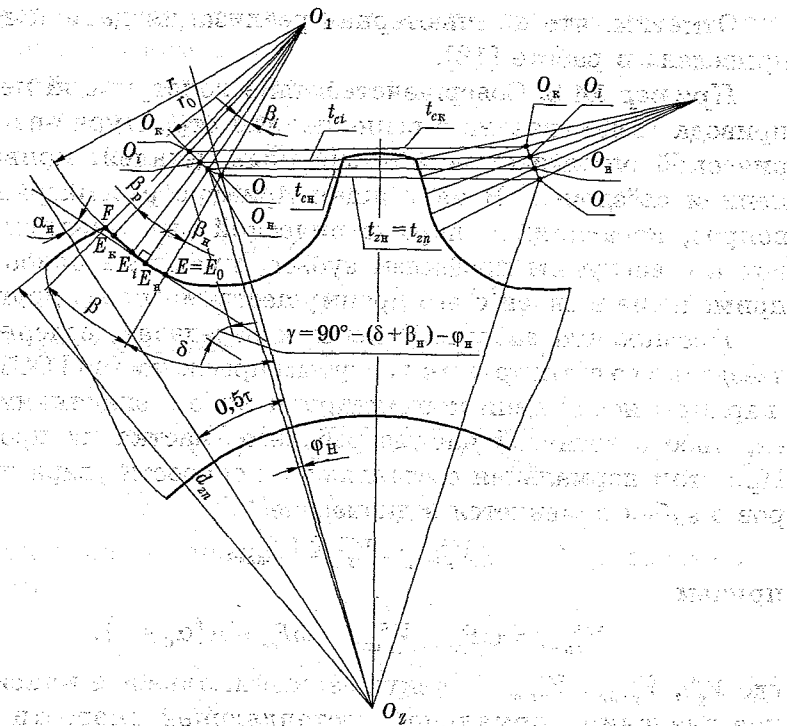


Рис. 14.4. Звёздочка с вогнутым профилем зубьев

В связи с изложенным ставится следующая задача: спроектировать звёздочку с вогнутым профилем зубьев для закрытой скоростной передачи роликковой цепью шага  $P_{cn}$ , обеспечивая заданное предельно допустимое увеличение (вследствие износа) шага цепи  $[\Delta P_c]$  и минимизацию максимальной скорости удара шарнира о зубья, т. е. необходимо обеспечивать первоначальное зацепление шарниров цепи с зубьями звёздочки в определённом (в зависимости от величины  $[\Delta P_c]$ ) месте вогнутой части рабочего участка профиля, для которого удовлетворяется условие

$$\alpha_n < \alpha_0, \quad (14.21)$$

где  $\alpha_n$  — угол профиля, соответствующий начальной точке  $E_n$  контакта шарнира с рабочим участком профиля зуба.

За счёт уменьшения величины  $\alpha_n$  по сравнению с  $\alpha_0$  снижается скорость удара, определяемая формулой

$$\max V_y^n = \omega P_{cn} \sin(\alpha_n + \tau) \rightarrow \min. \quad (14.22)$$

Благодаря этому снижаются сила ударов и шум, обусловленный этими ударами. Всё это позволяет повысить нагрузочную способность и улучшить виброакустические качества ценной передачи.

*Математическая модель.* Данная минимаксная задача сводится к определению диаметра окружности расположения центров дуг впадин профилей зубьев по следующей формуле:

$$d_c = P_{zn} \sin 0,5\tau, \quad (14.23)$$

где  $P_{zn}$  — первоначальный шаг звёздочки.

Величина  $P_{zn}$  определяется из соотношений:

$$P_{zn} = \frac{P_{cn} \cos(\varphi_n + 0,5\beta_n + \delta)}{\cos(0,5\beta_n + \delta)}; \quad (14.24)$$

$$\varphi_n = \arcsin \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin 0,5\beta_n \cos(0,5\beta_n + \delta) \sin 0,5\tau \right];$$

$$\lambda_1 = \frac{r_3}{d_1}; \quad r_3 = r_1 - 0,5d_1;$$

$$\lambda_2 = \frac{P_{cn}}{d_1}; \quad (14.25)$$

$$\beta_n = \psi_1 \beta; \quad 0 < \psi_1 < 0,8,$$

где  $\varphi_n$  — угол, определяющий первоначальное положение радиус-вектора центра шарнира цепи;

$\beta_n$  — угол, определяющий первоначальное положение центра шарнира цепи на эквидистанте вогнутой части рабочего участка профиля зуба;

$\delta$  — половина угла впадины зуба;

$\lambda_1$  — коэффициент, с помощью которого радиус эквидистанты  $r_3$  вогнутой части рабочего участка профиля зуба выражается через диаметр ролика  $d_1$ ;

$\lambda_2$  — коэффициент, с помощью которого шаг цепи выражается через  $d_1$ ;

$r_1$  — радиус кривизны вогнутой части рабочего участка профиля зуба;

$\beta$  — угол, определяющий размер вогнутой части рабочего участка профиля;

$\psi_1$  — коэффициент, с помощью которого определяется первоначальное положение центра шарнира на эквидистанте.

Величины  $\delta$  и  $\beta$  находятся по формулам:

$$\delta = 55^\circ - \frac{60^\circ}{z} \quad \text{и} \quad \beta = 18^\circ - \frac{56^\circ}{z}.$$

При известных значениях  $\varphi_n$  и  $\beta_n$  текущее значение шага цепи

$$P_c = d_1 \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1^2 \sin^2 0,5\beta_p + 4\lambda_1\lambda_2 \sin 0,5\beta_p \cos\left(\delta - \frac{180^\circ}{z} + 0,5\beta_p + \varphi_n + \beta_n\right)}, \quad (14.26)$$

где  $\beta_p$  — текущее значение угла, определяющее часть рабочего участка профиля зуба, в пределах которой шарниры цепи контактируют с зубьями при обеспечении условия (14.22):

$$\beta_p = (\psi_2 - \psi_1)\beta,$$

здесь  $\psi_2$  — коэффициент, с помощью которого определяется конечное положение центра шарнира цепи на эквидистанте.

Коэффициент  $\psi_2$  зависит от точности изготовления цепи и звёздочки и выбирается из диапазона

$$0,90 < \psi_2 < 0,95.$$

Максимальное значение  $P_{ci}$  должно удовлетворять условию

$$|P_{c \max} - [P_c]| \leq \varepsilon;$$

$$[P_c] = P_{cн} + [\Delta P_c],$$

где  $[P_c]$  — предельно допустимый шаг цепи;

$\varepsilon$  — наперёд заданная малая величина.

*Варианты решения задачи.* В зависимости от числа варьируемых параметров рассмотрим три варианта решения данной задачи.

По *первому варианту* в качестве проектного параметра принимаем одну величину  $\beta_n = x_1$  и минимизируем максимальное значение скорости удара шарниров цепи о зубья ведущей звёздочки:

$$\max V_y^n(x) = V_{yн}^n(x) = \omega P_{cн} \cos(\delta + 0,5\tau + x_1) \rightarrow \min \quad (14.27)$$

при функциональных ограничениях

$$\left. \begin{aligned} P_{ck} - [P_c] &\leq \varepsilon; \\ 0 \leq x_1 &\leq \psi_1\beta, \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

где  $P_{ck}$  — конечное значение шага цепи

$$P_{ck} = d_1 \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1^2 \sin^2 0,5\beta_p + 4\lambda_1\lambda_2 \sin 0,5\beta_p \cos(\delta - 0,5\tau + 0,5\beta_p + \varphi_n + x_1)}; \quad (14.29)$$

$$\beta_p = \psi_2\beta - x_1;$$

$$\lambda_1 = 0,8025 + \frac{0,05}{d_1};$$

$$\varphi_n = \arcsin \left[ \frac{4\lambda_1}{\lambda_2} \sin 0,5x_1 \cos(\delta + 0,5x_1) \sin 0,5\tau \right].$$

Задачу решаем по следующему алгоритму:

- 1) задаёмся величиной  $\psi_2$ ;
- 2) выбираем первое приближение  $\psi_1^1$ ;
- 3) по соответствующим формулам вычисляем первое приближение  $\beta_n^1$ ,  $\varphi_n^1$ ,  $\beta_p^1$ ,  $P_{ck}^1$ ;
- 4) производим проверку (14.20).

Если условие (14.28) не выполняется, то выбираем второе приближение  $\psi_1^2$  и т. д. При этом используем один из методов одномерного поиска.

Оценку эффективности оптимизации, заключающейся в снижении скорости удара, выполняем по формуле

$$\Delta V_{y \max}^n = \left[ 1 - \cos \left( \delta + \beta_n - \frac{180^\circ}{z} + \varphi_n \right) \right] \cdot 100\%,$$

где  $\beta_n$  — оптимальное значение варьируемой величины.

В соответствии с указанным алгоритмом составлена программа, которая реализована на ЭВМ.

По *второму варианту* в качестве проектируемых параметров принимаем следующие управляемые переменные:

$$\beta_n = x_1; z_1 = x_2; u = x_3,$$

где  $z_1$  — число зубьев ведущей звёздочки;

$u$  — передаточное число передачи.

Функция цели для данного случая имеет вид (14.27), а функциональные ограничения можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} P_{ch} - [P_c] &\leq \varepsilon; \\ 0 &\leq x_1 \leq \psi_1 \beta; \\ z_{1 \min} &\leq x_2 \leq z_{1 \max}; \\ u &\leq x_3 \leq 5, \end{aligned} \right\} \quad (14.30)$$

где

$$\beta = 18^\circ - \frac{56^\circ}{x_2};$$

$$[P_c] = P_{ch} \left[ 1 + \frac{A}{(x_2 - x_3)} \right];$$

$$z_{1 \max} = \frac{z_{2 \lim}}{x_3}; A = 2,$$

здесь  $z_{2 \lim}$  — предельное число зубьев ведомой звёздочки.

Формулы для определения остальных величин, входящих в математическую модель, приведены выше.

Рассматриваемая оптимизационная задача может быть решена несколькими методами. В настоящей работе использован метод простого случайного поиска.

Формула для оценки эффективности оптимизации в данном случае имеет следующий вид:

$$\Delta V_{y \max}^n = \left[ 1 - \cos \left( \delta + \beta_n^* - \frac{180^\circ}{z_1^*} + \varphi_n \right) \right] \cdot 100\%, \quad (14.31)$$

где  $\beta_n^*$ ,  $z_1^*$  — оптимальные значения варьируемых величин.

Согласно алгоритму метода случайного поиска разработана программа на ЭВМ. Расчёт, выполненный при следующих исходных данных:

$P_{ch} = 25,4$  мм;  $d_1 = 15,88$  мм;  $z_{1 \min} = 19$ ;  $z_{2 \lim} = 120$ ;  $\varepsilon = 0,0002$ ;  $\psi_2 = 0,95$ ;  $A = 2$ , даёт такие результаты:

$$z_1^* = 25; \beta_n^* = 8,78^\circ; \Delta V_{y \max}^n = 40\%.$$

Данный эффект может быть реализован при условии, что в процессе проектирования и изготовления звёздочки обеспечивается её диаметр, определяемый формулой (14.23) при оптимальных значениях величин:  $z = z_1^*$  и  $P_{ch} = P_{ch}^*$ .

По *третьему варианту* решения задачи в качестве проектных параметров принимаем следующие управляемые величины:

$$\beta_n = x_1; z_1 = x_2; u = x_3; \delta = x_4.$$

При этом функция цели имеет вид (14.22), а дополнительно к функциональным ограничениям (14.28) необходимо добавить три условия:

— *во-первых*, ограничение угла профиля по условию свободного выхода шарниров из зацепления со звёздочкой;

— *во-вторых*, ограничения по условию обеспечения требуемого закона распределения нагрузки между зубьями в пределах зоны зацепления;

— *в-третьих*, ограничение по условию исключения зацепления в режиме двойного шага.

**Задача 14.1.** Как изменится сила затяжки, рассмотренной в примере 14.1, если увеличить размер выборки основания (рис. 14.5).

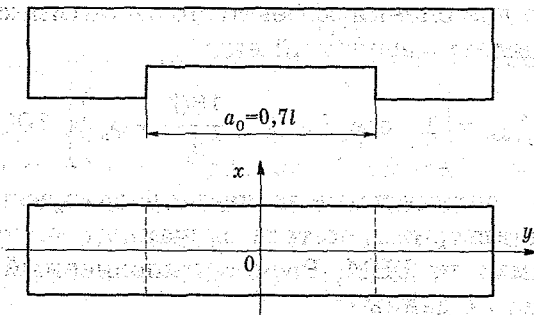


Рис. 14.5. К задаче 14.1

**Задача 14.2.** Требуется найти соотношение между длиной  $r$  кривошипа и  $l$  шатуна рычажного механизма (рис. 14.6), обеспечивая минимизацию максимальной силы реакций в кинематических парах.

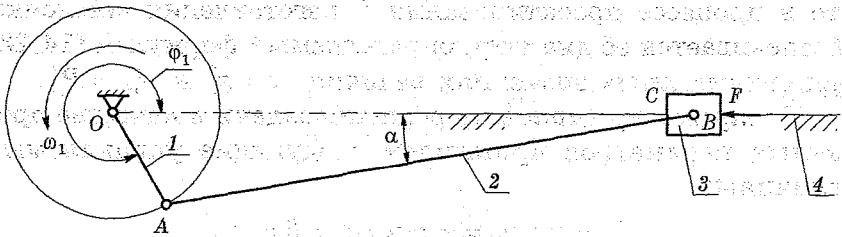


Рис. 14.6. Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма:

1 — кривошип; 2 — шатун; 3 — ползун; 4 — стойка

**Указание.** Необходимые для решения данные выбрать самостоятельно.

**Задача 14.3.** Требуется спроектировать кулачковый механизм (рис. 14.7), обеспечивая минимизацию максимальной силы реакций в кинематических парах.

**Указание.** Необходимые для решения данные выбрать самостоятельно.

**Задача 14.4.** Требуется определить крутильную жёсткость  $C_\varphi$  упругой муфты, обеспечивая минимизацию максимального значения коэффициента резонанса (рис. 14.8).

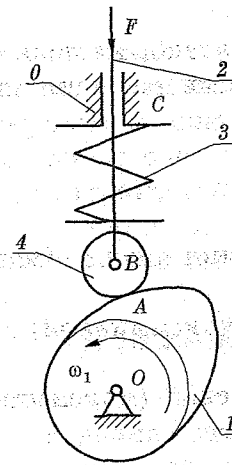


Рис. 14.7. Кинематическая схема кулачкового механизма:  
0 — стойка; 1 — кулачок;  
2 — толкатель;  
3 — пружина; 4 — ролик

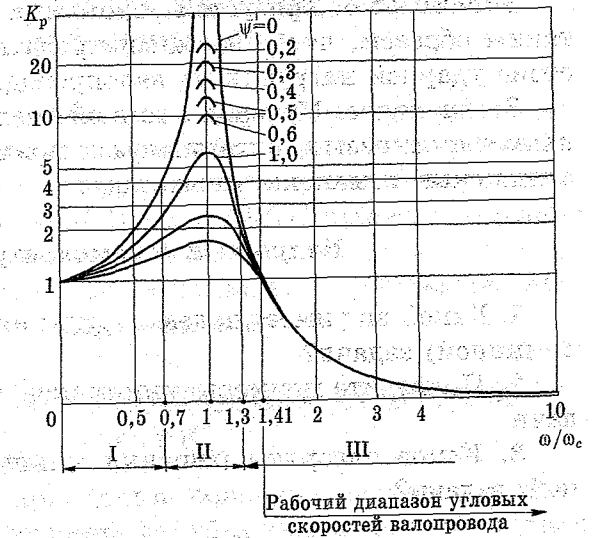


Рис. 14.8. Графики зависимости  $K_p = f(\psi, \omega/\omega_c)$ :

I, II, III — дорезонансный, резонансный и зарезонансный режимы работы;  
 $K_p$  — коэффициент резонанса;  
 $\omega_c$  — крутильная частота валопровода

**Указание.** Проектными параметрами являются величины, определяющие крутильную жёсткость муфты: форма, материал, размеры и вид деформации упругих элементов (рис. 14.9).

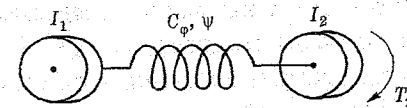


Рис. 14.9. Характеристика упругой муфты:

$C_\varphi$  — коэффициент крутильной жёсткости;  
 $\psi$  — коэффициент демпфирования;  
 $I_1, I_2$  — приведённые моменты инерции ведущих и ведомых масс;  
 $T_2$  — вращающий момент

**Задача 14.5.** Требуется спроектировать упругую муфту таким образом, чтобы минимизировать максимальное действие ударной нагрузки на валопровод.

**Заключение.** Материал данной главы знакомит пользователя с основами, алгоритмом и примерами решения минимаксных и максиминных задач.

### Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет целевая функция минимаксной (максиминной) задачи?
2. Приведите примеры минимаксной (максиминной) задачи.
3. Каков алгоритм решения минимаксной (максиминной) задачи?

### III. ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ОПТИМИЗАЦИИ

В данной части рассматриваются существующие пакеты прикладных программ, разработанные иностранными фирмами и являющиеся приложением к современным графическим системам *Solid Works*, *PRO/Engineer*. Отдельно рассматривается система *MathLab*.

Кроме того, даётся ссылка на пакеты прикладных программ отечественных разработчиков.

### 15. БИБЛИОТЕКА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ФИРМ

В данной главе приводятся основные сведения о пакетах прикладных программ зарубежных и отечественных разработчиков.

С появлением вычислительной техники (ВТ) на производстве встал вопрос об автоматизации проектирования изделий. Сначала расчёты выполнялись с использованием систем программирования на языках высокого уровня, таких как ФОРТРАН, БЕЙСИК и др. Как правило, каждое предприятие или организация, имеющие вычислительную технику, создавали свои программы расчётов для внутреннего пользования.

Дальнейшее развитие ВТ и программирования привело к созданию программных комплексов (программных продуктов), включающих в себя десятки и сотни решений различных задач. Работа с такими комплексами сводилась к выбору необходимого решения (программы), вводу данных и получению результатов, необходимых для дальнейшего использования.

С совершенствованием ВТ, с появлением графического интерфейса, его дальнейшим развитием появилась возможность не только вести расчёты, но результаты этих расчётов представлять также в графическом виде графиков, чер-



чертежей, 3D-моделей, анимаций и т.п. Это, в свою очередь, привело к созданию CAD-, CAM- и CAE-систем различного назначения и уровня сложности [2], используемых на предприятиях и в учебных заведениях.

### Основные понятия и определения

**Блок оптимизации** — особым образом организованный пакет программ методов оптимизации.

**Пакет прикладных программ** — особым образом организованная подсистема, являющаяся приложением современной графической системы.

#### 15.1. Общие сведения

Под блоком оптимизации понимают особым образом организованный пакет программ методов оптимизации (рис. 15.1).

Блок состоит из программных методов оптимизации, каждый из которых содержит только логику метода поиска и поэтому является универсальным, т. е. применим к любому объекту проектирования. Включение в работу определённого программного модуля осуществляется автоматически с помощью управляющей программы подсистемы оптимизации. Здесь содержатся критерии эффективности того или иного метода оптимизации по отношению к решаемой задаче.

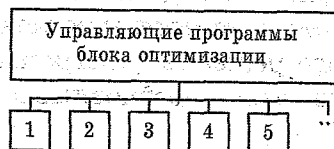


Рис. 15.1. Структура блока оптимизации:

- 1 — метод проекций градиента; 2 — метод сопряжённых градиентов;  
3 — метод штрафных функций; 4 — метод случайного поиска;  
5 — симплексный метод

Прежде чем рекомендовать использование того или иного программного продукта, следует узнать, что представляет собой конкретная область его применения, т. е. какой алгоритм или программу следует выбрать для решения некоторой задачи или целого класса задач, если известны их отличительные особенности.

Следовательно, необходимо располагать информацией о возможностях рекомендуемых ниже пакетов программ. Материал по данному вопросу изложен в предыдущих главах.

#### 15.2. Пакеты программ иностранных фирм

Ниже приводятся сведения о пакетах прикладных программ для решения задач ЛП:

1. Lp\_solve. Решает задачи ЛП с количеством переменных до 30000 и ограничений до 50000. Текущая версия 3.0. Условия использования Lesser GNU Public License. Существует конвертер из формата MPS в формат Lp\_solve. Может решать задачи с целочисленными переменными.

2. LP-Optimizer. Решает задачи ЛП и ЦП. Доступны бесплатно исходные тексты на Borland Pascal 7.0, исполняемые файлы для DOS [http://www.netcologne.de/~nc-weidenma/lp\\_dos.zip](http://www.netcologne.de/~nc-weidenma/lp_dos.zip) и OS/2.

3. SoPlex. Объектно-ориентированная реализация прямого и двойственного симплекс-метода. Доступны исходные тексты.

4. SPLP. Составная часть библиотеки программ SLATEC. Написан на Фортране. Решает задачи ЛП с несколькими тысячами переменных и ограничений.

5. GULF. Реализация симплекс-метода для задач ЛП и задач дробно-линейного программирования. Допускает две линейные целевые функции.

Для решения задач НЛП используются следующие пакеты прикладных программ:

1. Пакет GRGA: метод ОПГ/метод Флетчера-Ривса.

2. Пакет *GRC2*: метод ОПП/метод БФШ.
3. Пакет *OPT*: метод ОПП/метод Флетчера-Ривса.
4. Пакет *MINOS*/расширенная версия: модифицированная функция Лагранжа/метод ОПП для подзадач с линейными ограничениями.
5. *COMPUTE II*: пакет методов штрафных функций с различными функциями штрафа и разными методами безусловной минимизации.
6. *Box 2038, Pittsburgh, PA 15230 C*. Пакет *BIAS*: метод ММ/метод ДФП/автоматическое масштабирование.
7. Пакет *OPRQP*: метод ПКП/метод БФШ.
8. Пакет *VFO2AD*: метод ПКП/метод БФШ+.
9. Пакет *VMCON 1*: аналогичен пакету *VFO2AD*.

В качестве учебных рекомендуются следующие пакеты:

10. *OPTIVAR*: библиотека очень простых методов решения задач НЛП; включены наиболее современные методы оптимизации.
11. Группа методов внутренних и внешних штрафных функций, использующих различные алгоритмы безусловной минимизации.
12. *OPTLIB*: библиотека очень простых в применении методов решения задач НЛП.

В конце 80-х годов прошлого столетия наибольшее применение находили экспериментальные пакеты прикладных программ *OPRQP* и *VFO2AD*.

Затем появились более эффективные версии программ, разработанных иностранными фирмами, с более широкой областью применения.

Эти программы были составлены сначала на языке FORTRAN [11] и Бейсик [1], а затем на языках Паскаль, *Delphy* и т.п. Они составляют блок оптимизации современных графических систем, например, *Pro/Engineer*.

При составлении таблицы автор [11] использовал следующие критерии:

- доступность программ;
- её хорошая документуемость;

- наличие опыта её использования;
- разнообразие используемых в программе методов и наличие в ней, по крайней мере, одного «пакета» подпрограмм.

В последнее время постоянно появляются новые программные продукты, разработанные зарубежными фирмами. Некоторые из них приведены ниже:

1. Если необходимо просто решить конкретную задачу НЛП, можно обратиться в Optimization Technology Center (<http://www.ece.nwu.edu/OTC/>). Важнейшей частью этого сайта является NEOS (Network-Enhanced Optimization System), содержащий библиотеку оптимизационного программного обеспечения, оптимизационный сервер (<http://www-neos.mcs.anl.gov/>) для использования этой библиотеки в сети, а также необходимую информацию о программном обеспечении. Система NEOS позволяет решать задачи ЛП и НЛП.

2. Следующие Веб-сайты предлагают решение задач НЛП пользователям:

— AMPL (<http://www.ampl.com/TRYAMPL>). Студенческая бесплатная версия AMPL позволяет решать задачи до 300 переменных и 300 ограничений + целевые функции. Имеется выбор среди 8 решателей для задач НЛП;

— BARON (<http://archimedes.scs.uiuc.edu/cgi/run.pl>). Задачи нелинейного целочисленного программирования можно посылать для решения с помощью пакета BARON с простым алгебраическим форматом для записи моделей, используя либо Веб-форму, либо локальный файл;

— Network-Enabled Optimization System (NEOS) Server (<http://www-neos.mcs.anl.gov>). Предлагает доступ к нескольким десяткам сольверам для решения задач ЛП, НЛП, сетевого и стохастического ЛП. Задачи НЛП принимаются сервером либо в форме программы на С или Фортране, либо модель должна быть записана на одном из языков моделирования, таком как AMPL и GAMS;

— UniCalc (<http://www.rriai.org.ru/UniCalc/calculate.html>). Задачи НЛП, записанные на языке алгебраического

моделирования UniCalc, могут посылаться для решения, используя интерфейс Веб-формы.

### 15.3. Пакеты программ отечественных фирм

Насколько известно, фирмы, разрабатывающие технические системы в авиа- и автопроме, а также в космической области, имеют свои пакеты программ, реализующие методы оптимизации.

Кроме того, пакеты прикладных программ, предназначенных для научных исследований, разрабатываются в ведущих вузах страны. Естественно, что они используются и в учебном процессе.

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя с существующими пакетами прикладных программ, создаваемыми иностранными и отечественными разработчиками.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры прикладных программ для реализации методов оптимизации.
2. В каких областях применяются отечественные программные продукты?

## 16. СИСТЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В настоящее время при решении оптимизационных задач можно использовать системы *Pro/Engineer*, *MathCAD* и *MathLab*. Из последних приводится информация только о системе *MathLab*, являющейся более поздней и имеющей более широкие возможности.

### Основные понятия и определения

*Система MathLab* — симбиоз универсальных программных и алгоритмических средств с широкой гаммой специализированных приложений, предназначенных для решения широкого спектра задач, включая оптимизационные.

*Pro/Engineer* — графическая система высокого уровня, позволяющая параметрическое моделирование и предназначенная для проектирования технических систем (изделий) в трёхмерном пространстве с одновременным проведением различных видов экспресс-анализа, а также создания конструкторской документации.

### 16.1. Структура и возможности системы *PRO/Engineer*

Эта система является базовым пакетом конструктора, расчётчика и технолога.

Основные компоненты системы, включая блоки оптимизации, следующие:

- базовый пакет конструктора, расчётчика, технолога;
- пакет для управления сложными проектами;
- проектирование сложных поверхностей;
- управление инженерными данными;
- Среда. Моделирование. Поведение;
- проектирование кабельных систем, трубопроводов;
- проектирование пресс- и литейных форм;

- пакет промышленного дизайна;
- расширенные средства импорта геометрии;
- контроль качества топологии и геометрии;
- среда сложного поверхностного моделирования;
- моделирование обработки на станках с ЧПУ;
- автоматическая генерация программ обработки деталей;
- расширенные средства контроля программ обработки;
- средства оптимизации процесса обработки + NVO;
- расчёт и оптимизация характеристик прочности;
- кинематический анализ и оптимизация конструкции;
- расчёт и оптимизация температурных характеристик и т. д.

При разработке системы заложена методология сквозной конструкторско-технологической подготовки производства, а именно:

- разработка электронных моделей деталей-представителей по чертежам в системе автоматизированного трёхмерного проектирования;
- разработка экспериментальных технологических процессов обработки деталей-представителей с определением моделей необходимого оборудования, технологической оснастки и режущего инструмента;
- моделирование обработки деталей-представителей для определения машинного времени изготовления в системах PartMaker и Pro/Engineer с учётом необходимой технологической оснастки и режущего инструмента;
- использование системы приведения для определения расчётного штучного времени обработки деталей заданной номенклатуры;
- определение количества необходимого металлорежущего оборудования и расчёт его технологической загрузки;
- разработка схемы размещения оборудования в производственном помещении;
- расчёт экономической эффективности проекта;
- подготовка отчётной документации.

Учитывая структуру и возможности, рассматриваемая система находит применение на фирмах, создающих сложные технические объекты (авиа-, автостроение и т. п.). При этом математические модели, предназначенные для оптимизации, могут содержать тысячи ограничений. Естественно, что пользователи, обучающиеся по направлению подготовки «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», должны получить информацию о данной графической системе.

## 16.2. Общие сведения о системе *MathLab*

Система *MathLab* представляет собой уникальный сплав универсальных программных и алгоритмических средств с широкой гаммой специализированных приложений [6]. Входной язык и среда программирования *MathLab* очень близки к современным системам визуального программирования на базе универсальных алгоритмических языков типа *Basic*, *C++*, *Java*, *Object Pascal*. По ряду аспектов *MathLab* уступает указанным системам (режим интерпретации, небольшой запас визуальных компонентов). Однако с его библиотекой численных методов ни по объёму, ни по качеству не может сравниться ни одна из систем программирования. Кроме того, в пакете *MathLab* тщательно отработаны средства визуализации результатов вычислений и отображения различных графических объектов. На базе ядра *MathLab* созданы многочисленные расширения, обеспечивающие моделирование и анализ систем в разнообразных сферах человеческой деятельности.

Многие учебные заведения у нас и за рубежом используют *MathLab* при подготовке бакалавров, магистров и аспирантов. Для современного инженера и научно-технического работника *MathLab* является незаменимым инструментом моделирования и исследования различных прикладных систем, прежде всего, за счёт использования готовых решений. Но не менее важно научиться создавать

новые приложения, используя программные и алгоритмические средства *MathLab*, а также возможность объединения модулей, разработанных в разных системах программирования. Использование системы *MathLab* в учебном процессе позволит сблизить дисциплины, связанные с информатикой и численными методами, которые зачастую читаются автономно.

### 16.3. Возможности системы *MathLab*

В среде *MathLab* могут быть реализованы практически все вышепересмотренные методы одно- и многомерного поиска.

С помощью системы *MathLab* реализуются следующие методы одно- и многомерного поиска безусловной и условной оптимизации:

- унимодальный;
- многомерная безусловная минимизация, реализуемая с помощью следующих функций: *fminsearch*, */minunc*, *hqnonlin fminimax* и т. п.;
- условная минимизация, для решения задач которой используются функции *fmincon*, *hqnonlin wfminimax*;
- итерационные методы.

Кроме того, система позволяет решать оптимизационные задачи численными методами: линейного, нелинейного, динамического программирования.

В работе [2] показано решение экономических задач в системе *MathLab* методами динамического программирования. Основными из них являются:

- задача о загрузке рюкзака (ранца или контейнера);
- задача о надёжности;
- управление запасами;
- замена оборудования.

**Заключение.** Рассмотренный в настоящей главе материал знакомит пользователя со структурой и возможностями систем *Pro/Engineer* и *MathLab*, а также с методами решения оптимизационных задач с помощью системы *MathLab*.

### Вопросы для самоконтроля

1. Каковы структура и возможности системы *Pro/Engineer*?
2. К каким графическим системам относится *Pro/Engineer* и в каких областях она используется?
3. Что представляет собой программный продукт *MathLab*?
4. Укажите основные возможности системы *MathLab*.
5. Какие задачи динамического программирования решаются этой системой?

## 17. ОПТИМИЗАЦИЯ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Настоящая глава является заключительной: в ней показано использование рассмотренного выше материала в процессе научных исследований, выполняемых, прежде всего, магистрантами и аспирантами. Результаты этих исследований оформляются ими в виде диссертационной работы.

В предыдущих главах основное внимание было уделено анализу современных оптимизационных алгоритмов. Такой анализ позволяет понять внутреннюю логику алгоритмов, а также точно оценить их возможности и недостатки. Изучив этот материал, можно подобрать наиболее подходящий алгоритм для данной технической задачи и проверить, является ли оптимальным решение, полученное выбранным алгоритмом. Однако знание лишь алгоритмов является только необходимым, но не достаточным условием успешного проведения оптимизационного исследования. При решении задачи такого рода приходится привлекать дополнительные соображения и проводить дополнительные исследования. Прежде всего, необходимо сформулировать оптимизационную задачу и подготовить её к решению, выбрать подходящий алгоритм, выбрать или написать эффективную программную реализацию этого алгоритма, провести ряд оптимизационных расчётов, включающих различные корректировки задачи и алгоритма, и, наконец, получив надёжное решение, проинтерпретировать его в терминах реальной системы и использовать на практике.

Учитывая, что почти во всех технических приложениях оптимизационные алгоритмы используются в виде уже готовой программы, имеющейся в библиотеке программ фирмы, или такая программа закупается (арендуется), при проведении оптимизационного исследования больше всего времени занимает правильная постановка задачи, подготовка её к решению и предварительные расчёты для выявления ошибок и отладки программ. К сожалению, для решения таких

задач нужна профессиональная подготовка, которая трудно поддаётся анализу и классификации. Получить такие знания весьма непросто. Они приобретаются не в результате формального обучения, а в процессе практической работы и тщательного анализа наблюдавшихся успехов и неудач.

В этой главе описываются некоторые принципы проведения оптимизационного исследования и на примерах рассматриваются несколько альтернативных подходов к постановке задачи, подготовке её к решению и устранению возникающих ошибок. Этот обзор не претендует на исчерпывающий охват указанных вопросов. Он является обобщением опыта, накопленного авторами и другими специалистами, занимавшимися решением практических задач оптимизации в технике. Подобный опыт приобретается в ходе неофициальных обсуждений или по разбросанным в прикладных публикациях сведениям.

### Основные понятия и определения

*Методология* — см. гл. 1.

*Себестоимость* — обобщённый показатель экономичности изделия, определяющийся суммарными затратами на единицу продукции.

*Системный подход* — совокупность методов и средств исследования сложных объектов и процессов, позволяющих подготовить и обосновать принимаемые решения, с учётом комплекса основных требований к ним.

*Экономико-математическая модель* — модель, содержащая в качестве целевой функции или ограничения один из экономических критериев.

### 17.1. Методология оптимального синтеза

Методологией решения возникающего при оптимальном проектировании конструкций комплекса научных и практических вопросов является системный подход к исследо-

ванию создаваемого объекта, алгоритм которого заключается в следующем:

— рассматривая конструкцию, сначала выявляются её *основные недостатки* с позиций функциональных, эргономических, экономических и других требований;

— оценивая последствия, к которым приводят выявленные недостатки, делается вывод о наличии в данной области машиностроения *проблемы*, требующей решения;

— анализируя причины, обуславливающие проблему, устанавливаются *пути и методы их устранения*, т. е. определяются *условия*, выполнение которых обеспечивает ликвидацию или снижение выявленных недостатков;

— систематизируя эти условия, формируется комплекс критериев, реализуемых в виде *математической модели*. Для её решения должен быть выбран соответствующий метод оптимизации.

Оптимизация выполняется на различных уровнях (гл. 4).

### 17.2. Выбор оптимального технологического процесса

Пользователям для обеспечения конкурентоспособности продукции приходится решать задачу выбора оптимального технологического процесса из нескольких возможных вариантов. Любой  $i$ -й технологический процесс ( $ТП_i$ ) характеризуется производительностью  $П_i$ , технологической себестоимостью  $C_{тi}$ , а также уровнем качества продукции  $K_i$ , достигаемым при применении данного технологического процесса. При этом производительность и себестоимость при заданном объёме выпуска продукции и последующей её реализации определяют прибыль, получаемую производителем в случае использования данного технологического процесса. Сказанное схематично представлено на рисунке 17.1.

Здесь производится оценка технологических процессов по производительности, себестоимости, качеству продукции и прибыли.

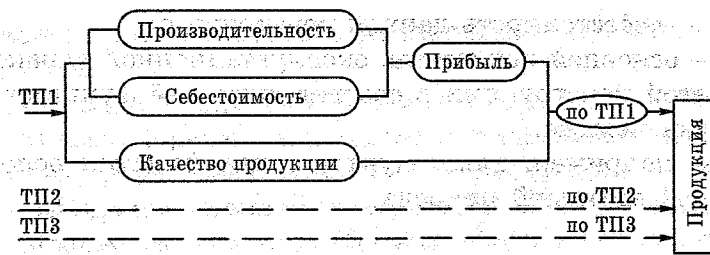


Рис. 17.1. Схема выбора оптимального технологического процесса

Ясно, что оптимальным будет тот технологический процесс, который обеспечит требуемый уровень качества продукции и планируемую прибыль.

### 17.3. Экономические критерии оптимальности конструкции

Для экономической оценки вариантов новой техники (вновь создаваемой или модернизируемой) в целях выбора оптимального из них используют себестоимость продукции машиностроения, являющуюся важнейшим показателем экономической эффективности организационно-технических и хозяйственных мероприятий.

Различают следующие виды себестоимости: технологическую, цеховую, производственную и полную (коммерческую) (табл. 17.1).

Технологическая себестоимость является основой для сопоставления вариантов конструкции, а коммерческая — для установления оптовых цен на промышленную продукцию.

Себестоимость можно рассчитать несколькими методами, рассматриваемыми в специальной литературе.

Мера совершенства конструкции (машины, оборудования) — её *технический уровень*. В качестве универсального показателя технического уровня может быть принята удельная себестоимость

$$C_y = \frac{C_k}{x}, \quad (17.1)$$

где  $C_k$  — себестоимость данной конструкции;

$x$  — основной показатель эксплуатационной характеристики этой конструкции в соответствии с её функциональным назначением.

Так, например, для редуктора, являющегося основной сборочной единицей привода,

$$x = T,$$

причём здесь  $T$  — вращающий момент на тихоходном валу.

Таблица 17.1

Виды себестоимости и цены продукции

Статья расхода	Себестоимость			Цена	
	Технологическая	Цеховая	Производственная	Оптовая цена	Розничная цена
Основные и вспомогательные материалы (за вычетом возвратных отходов)					
Основная заработная плата производственных рабочих					
Отчисления на социальное страхование					
Дополнительная зарплата					
Топливо и энергия					
Расходы по освоению					
Расходы по содержанию					
Цеховые расходы					
Общезаводские расходы					
Потери от брака					
Внепроизводственные расходы					
Прибыль					

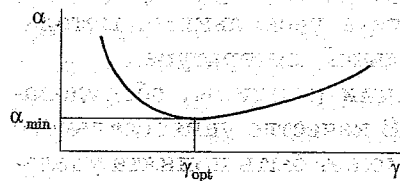


Рис. 17.2. Зависимость себестоимости редуктора от относительной массы

График зависимости относительной себестоимости  $\alpha$  редуктора от его относительной массы  $\gamma = m/T$  ( $m$  — масса редуктора) представлен на рисунке 17.2.

Функция  $\alpha = f(\gamma)$  имеет экстремальное значение. Таким образом, создание современ-

ной конструкции редуктора является задачей оптимального синтеза.

**Алгоритм технико-экономических расчётов.** Технико-экономический расчёт выполняем в следующем порядке:

- выбираем базовый вариант конструкции;
- выбираем возможные варианты конструкции;
- проверяем, выполняется ли условие сопоставимости вариантов;
- рассчитываем затраты (себестоимость) по каждому варианту конструкции;
- определяем размер годовых эксплуатационных расходов по всем сопоставляемым вариантам конструкции привода;
- выбираем лучший вариант конструкции, предварительно рассчитав её себестоимость.

Рассмотрим реализацию этого алгоритма.

**Выбор базового варианта конструкции.** Предлагаемый (проектируемый) вариант конструкции называют новым, а тот вариант, с которым сравнивают, — базовым. В качестве базового варианта конструкции принимают изделие-аналог.

В курсовом проекте разрабатывается конструкция механического привода общего назначения. Прототипом рабочей машины, для которой предназначен данный привод, может быть любая машина или установка, соответствующая требованиям технического задания (ТЗ). Однако с учётом профиля подготовки будущих специалистов — это могут быть различные металлорежущие станки, подъёмно-транспортные машины и их части, прессы и т.п.

В связи с этим необходимо выбрать вариант аналогичной конструкции изделия, принятой для сравнительной оценки. *Основное правило, которое необходимо учитывать при выборе базового варианта: никогда не следует сравнивать создаваемую конструкцию с заведомо нерациональным изделием.* За базу следует принимать лучшие образцы изделий отечественного и зарубежного изготовления, внедрённые в производство. Лучшими в экономическом отно-



шении считаются изделия, обеспечивающие в условиях полного использования наименьшие затраты. В случае, когда проектируемая конструкция предназначена для широкого использования в машиностроении, за базовый вариант следует принимать наиболее распространённое на практике изделие, дающее те же производственные результаты.

**Условия сопоставимости вариантов конструкции.** Сравнимый и базовый варианты технического решения по создаваемой конструкции могут отличаться по своим выходным параметрам (например, по кинематической точности, по виброакустическим характеристикам), а также по длительности разработки и изготовления. Влияние этих факторов отражается на капитальных затратах. Между тем при обосновании вариантов должна быть обеспечена их полная сопоставимость по затратам и эффекту. Поэтому в реальных условиях производства приводят к сопоставимому виду показатели разрабатываемых и базового вариантов.

В курсовом проекте по деталям машин и основам конструирования будем считать, что все варианты конструкции привода или его отдельных элементов по указанным выше факторам тождественны.

#### 17.4. Выбор оптимального варианта конструкции

При выборе оптимального варианта изделия необходимо использовать экономические показатели: себестоимость и цену продукции.

В соответствии с рассмотренными выше показателями сравнительной экономической эффективности выбор оптимального варианта конструкции изделия из нескольких возможных решений можно осуществлять одним из следующих способов.

**Выбор по себестоимости.** Определив себестоимость  $K$  каждого из вариантов создаваемой технической системы, наилучшим конструктивным решением будет тот, для которого

$$K = K_{\min}.$$

**Выбор по себестоимости и эксплуатационным расходам.** В случае, когда из всех вариантов конструкции имеется такой, для которого величины  $K$  и  $C$  — наименьшие, то этот вариант создаваемого изделия является оптимальным.

Важнейший показатель сравнительной эффективности новой конструкции — суммарные удельные затраты, представляющие собой сумму удельной розничной цены и удельных эксплуатационных расходов:

$$C_{\Sigma y} = \frac{C_p}{L} + \frac{C_s}{L} \rightarrow \min, \quad (17.2)$$

где  $C_p$  — розничная цена;

$L$  — наработка объекта до морального или физического износа;

$C_s$  — суммарные эксплуатационные расходы.

Величина  $C_s$  зависит от функционального назначения объекта, например, для технологической машины

$$C_s = Z_o + C_{\text{эн}} + C_{\text{т.о}} + C_{\text{п.т.о}} + C_{\text{утил}} + C_{\text{страх}} + \dots, \quad (17.3)$$

где  $Z_o$  — расходы на оплату труда операторов;

$C_{\text{эн}}$  — расходы на потребление энергии;

$C_{\text{т.о}}$  — расходы на техническое обслуживание и ремонт;

$C_{\text{п.т.о}}$  — стоимостные потери, связанные с простоем основного технологического оборудования и, следовательно, невозможностью использования его по функциональному назначению;

$C_{\text{утил}}$  — расходы на утилизацию;

$C_{\text{страх}}$  — расходы на страхование и т.п.

Из формул (17.2), (17.3) видно, что для выбора оптимального решения технической системы необходимо выполнить большой объём предварительных исследований, т. е. располагать величинами, входящими в формулы.

Выбор оптимального варианта конструкции изделия показан на рисунке 17.3.

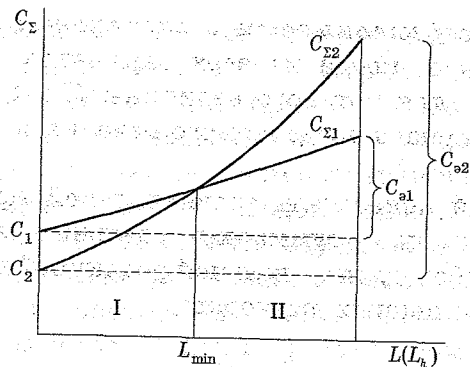


Рис. 17.3. Оптимальный вариант конструкции изделия:

$C_i$  — удельная технологическая себестоимость (для производителя) или удельная розничная цена изделия для потребителя;  
 $C_{\Sigma i}$  — удельные суммарные эксплуатационные расходы;  
 $i = 1, 2$  — сопоставимые варианты конструкции изделия;  
 $L$  — срок службы, год;  $L_h$  — ресурс изделия, ч;  
 I, II — области целесообразного применения второго и первого вариантов конструкции

После выбора варианта конструкции можно определить оптимальный срок службы или ресурс системы (рис. 17.4).

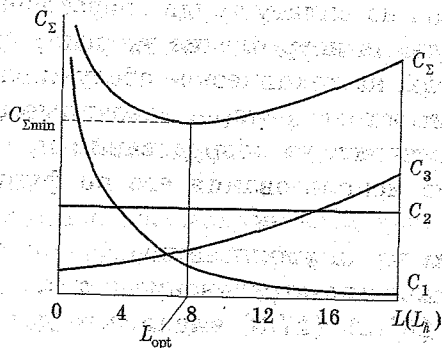


Рис. 17.4. Оптимальный срок службы  $L$  (ресурса  $L_h$ ) привода:

$C_1$  — амортизационные отчисления;  $C_2$  — эксплуатационные затраты, не зависящие от срока службы;  $C_3$  — эксплуатационные затраты, зависящие от срока службы;  $C_{\Sigma}$  — суммарные затраты, включая амортизационные отчисления

Таким образом, поставлена задача выбора оптимального варианта конструкции создаваемого объекта и предложен вариант её решения с использованием экономических критериев для сравнительной оценки альтернативных инженерных конструкций.

### 17.5. Оптимизация надёжности технической системы

При решении данного вопроса ограничимся разработкой экономико-математической модели. Пусть система состоит из  $n$  последовательно соединённых подсистем (например, для редуктора подсистемами являются зубчатые или (и) червячные передачи, валы, подшипники, соединения и т.п.), независимых друг от друга. На практике для подобной системы возникает проблема оптимизации соотношения между надёжностью и затратами ресурсов для её обеспечения. Эта проблема сводится к решению одной из двух задач: в первой из них необходимо обеспечить требуемую надёжность системы с минимальными затратами, и во второй — максимально возможную надёжность при ограниченных затратах. Это задачи динамического программирования. Их рассматриваем как  $n$ -этапный процесс принятия решения и реализуем методом функциональных уравнений [16]. При этом надёжность системы и подсистем выражаем вероятностью безотказной работы.

Для первой задачи экономико-математическая модель имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \min \sum C_i(R_i^n, R_i), \\ R_2 = \prod_{i=1}^n R_i \geq R^*, \\ 0 \leq R_i^n \leq R_i < 1, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

где  $R_i^n$  — исходная вероятность безотказной работы  $i$ -й подсистемы, достигаемая без дополнительных затрат;

$R_i$  — вероятность безотказной работы  $i$ -й подсистемы, достигаемая в зависимости от дополнительных затрат, направленных на повышение надёжности этой подсистемы;

$R^*$  — требуемая вероятность безотказной работы системы;

$R_z$  — достигнутая вероятность безотказной работы системы за счёт дополнительных затрат;

$C_i(R_i^*, R_i)$  — дополнительные затраты для повышения вероятности безотказной работы  $i$ -й подсистемы с  $R_i^*$  до  $R_i$ .

Определение оптимального уровня надёжности системы демонстрируется рисунком 17.5.

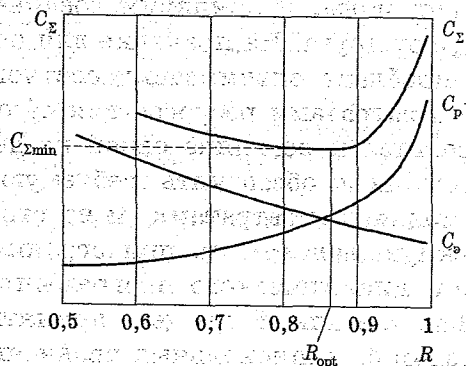


Рис. 17.5. Оптимальный уровень надёжности системы:

$C_p$  — затраты на разработку (создание) системы;

$C_п$  — затраты на производство (изготовление) системы;

$C_э$  — эксплуатационные затраты;

$C_z$  — суммарные затраты;

$R$  — вероятность безотказной работы системы

Вторая из рассматриваемых задач практически заключается в обосновании потребности в запасных частях: для обеспечения максимальной надёжности технической системы необходимо приобрести запасные части, причём для этой цели имеется в наличии  $C$  ресурсов.

Экономико-математическая модель для данного случая имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \max R_z = \prod_{i=1}^n R_i(m_i), \\ \sum_{i=1}^n C_i m_i \leq C, \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

где  $R_z$  — вероятность безотказной работы системы;

$R_i(m_i)$  — вероятность безотказной работы  $i$ -й подсистемы;

$C_i$  — стоимость запасных деталей для  $i$ -й подсистемы;

$m_i$  — количество запасных деталей;

$C$  — имеющиеся ресурсы.

Как видно, целевая функция в первой задаче (17.4) является аддитивной, а во второй (17.5) — мультипликативной.

Приведённый материал позволяет сделать следующие важные выводы:

— решение таких задач базируется на результатах вероятностных расчётов;

— для решения этих задач необходимо располагать зависимостью затрат от уровня безотказной работы каждой подсистемы;

— объём вычислительной работы весьма большой, поэтому необходима машинная реализация решения рассматриваемых задач.

## 17.6. Оптимизация конструкции технической системы

В процессе научных исследований пользователи довольно часто встречаются с задачами оптимизации конструкций той или иной технической системы. Ниже приведён пример постановки подобной задачи.

В качестве такой системы принимаем приводные цепи. Критериями их качества являются стоимость их изготовления, масса, статическая прочность, жёсткость, сопротивление усталости и износу. При их проектировании важно создать прочную и экономичную конструкцию, т. е. та-

кую, которая при минимальной массе и стоимости будет удовлетворять условиям прочности, жёсткости и износостойкости.

Оптимизация состоит, прежде всего, в минимизации массы существующих и новых конструкций цепей при одновременном удовлетворении ограничений на напряжения, перемещения и собственные частоты.

Основные направления оптимизации:

— выбор натяга в соединениях валик-пластина и втулка-пластина из условия обеспечения прочности соединения и деталей (пластин, валика, втулки);

— выбор зазоров между роликом и втулкой, втулкой и валиком, а также между пластинами;

— выбор формы и размеров пластин (рис. 17.6а) на основе исследования их напряжённо-деформированного состояния (НДС) методом конечных элементов (МКЭ) (рис. 17.6б);

— оценка перемещений валика и втулки для выявления закона распределения давления в сопряжении этих деталей.

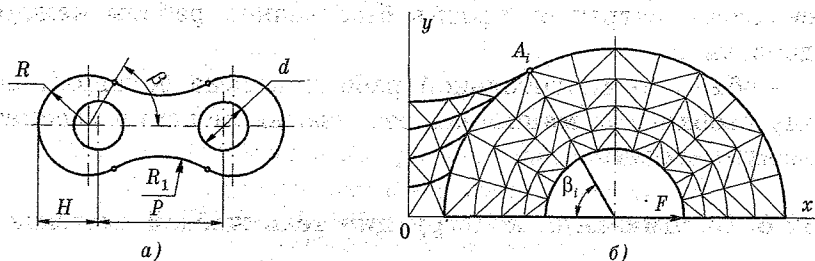


Рис. 17.6. Параметрическая оптимизация пластины цепи:

а — параметры пластины;

б — расчётная модель пластины МКЭ

В процедуре оптимизации используют метод экстраполяции внутренней функции штрафа. Переменными являются размеры всех элементов цепей.

Определяя минимальную массу с принятыми ограничениями по прочности, варьируют размеры пластин, втулок,

валиков и роликов — у роликовых цепей; пластин и призм — у зубчатых цепей.

Целевой функцией в этом случае является зависимость массы от геометрических параметров элементов цепи; ограничением — условие прочности.

Тогда условие задачи формулируется следующим образом: найти для роликовых цепей минимальное значение массы внутреннего  $G_{\text{вн}}$  и внешнего  $G_{\text{вн}}$  звеньев при  $\sigma_{i\text{max}} < [\sigma]$ , где  $\sigma_{i\text{max}}$  — максимальное напряжение в деталях цепи;  $[\sigma]$  — допустимое напряжение. Детали цепи должны быть равнопрочными.

Для зубчатых цепей определяют минимальное значение массы пластины  $G_{\text{пл}}$  при  $\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]$ .

Поскольку внешнее звено роликовой цепи состоит из двух пластин и валиков, а внутреннее — из двух пластин и втулок, то

$$G_{\text{вн}} = 2 \sum_{i=1}^2 G_i; \quad G_{\text{вн}} = 2 \sum_{j=1}^2 G_j.$$

Следовательно, минимизируют массу каждого элемента звеньев при выполнении ограничений:

$$\sigma_{i\text{max}} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{j\text{max}} \leq [\sigma],$$

т. е. задача проектной эффективности сводится к определению параметров, обеспечивающих экстремум (минимум) массы и равнопрочности элементов:

$$G_{\text{вн(вн)}}(x) = \min G(x), \quad \sigma_{i\text{max}} < [\sigma].$$

Решение поставленной задачи можно выполнять методом штрафных функций, позволяющих преобразовать условно экстремальные задачи к безусловным.

Алгоритм оптимизации сводится к следующему:

— зная размеры элементов звеньев и расчётную схему для них, определяют современными методами (например, МКЭ) напряжения в каждом элементе;

В соответствии с методами последовательной безусловной минимизации [11] выбирают функцию штрафа

$$W_i = G_i + r(\sigma_{i\max} - [\sigma])^2,$$

где  $r$  — весовой коэффициент (параметр штрафной функции);

— строят программу расчёта так, чтобы значения  $r$  по мере сближения  $\sigma_{i\max}$  и  $[\sigma]$  возрастали;

— функцию  $W_i$  минимизируют по размерам каждого элемента;

— определив размеры звеньев, рассчитывают напряжения в их элементах, т. е. процесс минимизации массы каждого из звеньев многоэтапный, причём число этапов зависит от числа составляющих звено деталей.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое системный подход?
2. Назовите основные виды себестоимости продукции.
3. Приведите схему выбора оптимального технологического процесса.
4. Как выбирается оптимальная конструкция технической системы?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие посвящено вопросам практического применения методов оптимизации. Основное внимание уделяется методам и алгоритмам, используемым в приложениях при проектировании, эксплуатации и анализе функционирования технических объектов. Главным образом рассматриваются методы оптимизации, ориентированные на решение задач с непрерывными переменными, ограничениями, содержащими действительные функции, и целевые функции, т. е. математические методы, часто объединяемые в рамках теории нелинейного программирования. При этом даётся обзор всех наиболее важных типов методов оптимизации, начиная от классического поиска экстремума функции одной переменной и кончая методами, применяемыми для решения нелинейных задач условной оптимизации большой размерности.

Кроме того, включены оптимизационные задачи, содержащие структурные элементы стохастической природы при решении задачи оптимизации надёжности технической системы, а также модели с переменной структурой.

Авторы стремились к тому, чтобы пользователь получил ясное представление о логической структуре излагаемых методов и о важнейших научных принципах, на основе которых они разработаны, а также об их сравнительных преимуществах и недостатках. Доказательства и математические выкладки приводятся только в тех случаях, когда они служат для пояснения основных шагов или свойств рассматриваемых алгоритмов. Как правило, при отсутствии доказательства даётся ссылка на соответствующий источник, а объём книги используется для обоснования и разъяснения ключевых аспектов построения различных математических схем.

Важно подчеркнуть, что изложение материала пособия ориентировано в первую очередь на пояснение системы понятий, лежащих в основе построения математических и экономико-математических моделей создаваемых объектов.

Таким образом, при написании данного пособия главная цель состояла в том, чтобы информировать пользователя о прикладных возможностях методов оптимизации, а не в подготовке специалиста по математическому обеспечению ЭВМ. Поэтому значительное внимание уделено таким практически важным вопросам, как построение модели, её реализация, подготовка к решению, выбор первого приближения к экстремальной точке, выбор стратегии оптимизации и т. д. Вопросы, рассмотренные в данном пособии, являются составной частью системы автоматизированного проектирования.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс [Текст] / Б. Банди. — М.: Радио и связь, 1988. — 128 с.
2. Грэхам, Г. Pro/Engineer 2001 [Текст] / Г. Грэхам, Д. Стефван. — М.: Лори, 2003. — 363 с.
3. *Динамическое программирование в экономических задачах с применением системы MathLab* [Текст] / Н. П. Визгунов. — Н. Новгород: ННГУ, 2011. — 50 с.
4. Еремин, И. И. Линейная оптимизация и системы линейных неравенств [Текст] / И. И. Еремин. — М.: Академия, 2007. — 256 с.
5. Измаилов, А. Ф. Численные методы оптимизации [Текст] / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 128 с.
6. Иосилевич, Г. Б. Детали машин [Текст] / Г. Б. Иосилевич. — М.: Машиностроение, 1988. — 368 с.
7. Кетков, Ю. Л. MATLAB 7: программирование, численные методы [Текст] / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 742 с.
8. Кузнецов, Б. Т. Математика [Текст]: учебник / Б. Т. Кузнецов. — М.: Юнити, 2004. — 719 с.
9. Ногин, В. Д. Основы теории оптимизации [Текст] / В. Д. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. — М.: Высшая школа, 1986. — 384 с.
10. *Общий курс высшей математики для экономистов* [Текст]: учебник / под ред. В. И. Ермакова. — М.: ИНФРА-М, 2007. — 656 с.
11. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике [Текст]: в 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. — М.: Мир, 1986. — 320 с.
12. *Сборник задач по высшей математике для экономистов* [Текст]: учебное пособие / под ред. В. И. Ермакова. — М.: ИНФРА-М, 2003. — 575 с.
13. Софиева, Ю. Н. Условная оптимизация. Методы и задачи [Текст] / Ю. Н. Софиева, А. М. Цирлин. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 144 с.

14. *Струченков, В. И.* Методы оптимизации [Текст] / В. И. Струченков. — М.: Экзамен, 2007. — 256 с.

15. *Сухарев, А. Г.* Курс методов оптимизации [Текст]: учебное пособие / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 368 с.

16. *Тарабасов, Н. Д.* Цепные муфты [Текст] / Н. Д. Тарабасов, П. Н. Учаев. — М.: Машиностроение, 1987. — 256 с.

17. *Учаев, П. Н.* Оптимизация инженерных решений в примерах и задачах [Текст]: учебное пособие / П. Н. Учаев, С. А. Чевычелов, С. П. Учаева. — Старый Оскол: ООО «ТНТ», 2011. — 176 с.

18. *Шуп, Г.* Решение инженерных задач на ЭВМ [Текст] / Г. Шуп. — М.: Мир, 1981. — 236 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

	А
Алгоритм 20	
— оптимизации 27	
Градиент функции 17	Г
Задача	З
— максиминная 235	
— минимаксная 235	
Канторович Л. В. 8	К
Кривая компромиссная 192	
Критерий оптимальности 27	
Коэффициент весовой 192	
Линеаризация 171	Л
Линия уровня 123	
Метод	М
— барьерных функций 215	
— золотого сечения 65	
— интервальный 52	
— квадратичной аппроксимации 74	
— линеаризации 171	
— моделирования 18	
— наименьших квадратов 52, 81	
— Ньютона-Рафсона 54	
— одномерного поиска 52	
— оптимизации 47	
— Пауэлла 79	
— покоординатного спуска 144	
— случайного поиска 139, 153	
— Фиакко-Маккормика 227	
— Хука-Дживса 146	
— численный 47	
Множество 10	
Множитель Лагранжа 212	

- Модель  
— математическая 19  
— экономико-математическая 276

**О**

- Область допустимая 123  
Ограничение 30  
Оптимизация 9, 22  
— безусловная 39  
— векторная (многокритериальная) 27  
— скалярная (однокритериальная) 27  
— структурная 37  
— условная 39  
Оптимум функции 28  
— глобальный 30  
— локальный 30

**П**

- Пакет прикладных программ 256  
Параметры проектные 22, 28  
Поиск многомерный 28  
Программирование  
— динамическое 178  
— математическое 20  
— линейное 123, 126  
— нелинейное 139  
— стохастическое 47  
— численное 20  
— целочисленное 47

- Пространство проектирования 27

**Р**

- Решение  
— допустимое 27, 123  
— компромиссное 192  
— оптимальное 43  
— рациональное 40

**С**

- Седловая точка 16  
Симплекс 28, 123  
Симплекс-метод 123  
Системный подход 267

- Система  
— MathLab 261  
— Pro/Engineer 261

**Т**

- Теория оптимизации 22  
Точка стационарная 212  
Транспортная задача 124

**Ф**

Функция

- аддитивная 18  
— Лагранжа 212  
— мультипликативная 18  
— мультимодальная 14  
— унимодальная 13  
— целевая 22, 27  
— штрафная 212

**Ц**

- Целевая функция (см. Функция целевая)

**Ш**

Штраф

- квадратичный 229  
— логарифмический 229  
— типа квадрата срезки 230

**Э**

- Эксперимент машинный 33  
Экстремум функции 13  
— глобальный (абсолютный) 28  
— локальный 28  
— условный 15  
Элементы математической модели 31  
Эффективность метода оптимизации 91



Учебное издание

Учаев Пётр Николаевич  
Емельянов Сергей Геннадьевич  
Учаева Капиталина Павловна  
Яцун Елена Ивановна  
Борискин Владимир Петрович  
Учаев Николай Петрович  
Титова Анна Павловна

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ВВОДНЫЙ КУРС

Учебное пособие

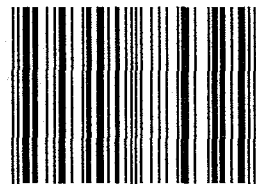
Редактор Л. В. Попова  
Корректор И. А. Логвинова  
Компьютерная верстка О. П. Бирюковой  
Компьютерная графика С. С. Гранкиной

Подписано в печать 04.07.14.  
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.  
Гарнитура SchoolBookCTT. Усл. печ. л. 16,74.  
Тираж 1000 экз. Заказ № 109.

Издательство «Тонкие наукоёмкие технологии»  
309500, Белгородская обл., г. Старый Оскол, м-н Макаренко, д. 40.  
Тел./факс: (4725) 42-35-29, 42-35-39, 32-25-29  
E-mail: st\_tnt-press@mail.ru; st\_tnt-press@belgtts.ru  
Адрес в Интернете: www.tntpress.ru

Отпечатано в типографии ООО «Тонкие наукоёмкие технологии»  
309500, Белгородская обл., г. Старый Оскол, м-н Макаренко, д. 40.  
Тел./факс: (4725) 42-35-29, 42-35-39, 32-25-29

ISBN 978-5-94178-432-5



9 785941 784325