Случайные величины. Законы распределения случайных величин. Числовые характеристики

Случайная величина называется *дискретной*, если ее возможные значения можно пронумеровать.

Случайная величина называется *непрерывной* (в широком смысле слова), если ее возможные значения непрерывно заполняют какой-либо интервал или интервалы.

Случайная величина X может быть задана: 1) рядом распределения (дискретная случайная величина); 2) функцией распределения (дискретная и непрерывная случайная величины); 3) плотностью распределения (непрерывная случайная величина).

Рядом распределения дискретной случайной величины называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $P_i = P(X = x_i)$. Вероятности P_i удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, где число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, равная в x вероятности того, что случайная величина X примет значение меньше x: $F(x) = P(X < x)$. Для дискретной случайной величины функция $F(x)$ вычисляется по формуле $F(x) = \sum_{x_i < x} P_i$, где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывно дифференцируема, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины X называется функция

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Плотность распределения любой случайной величины неотрицательна $\left(f(x) \ge 0\right)$ и обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β (включая α) вычисляется по формуле

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Если случайная величина X непрерывна, то $P(X = \alpha) = 0$.

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от α до β может быть вычислена по формуле.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{2.16}$$

Математическое ожидание $m_x = M(X)$ случайной величины X вычисляется по формулам:

$M(X) = \sum_{l=1}^{\infty} x_i P_i$ (для дискретной случайной величины);

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ (для непрерывной случайной величины).

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины есть сама эта величина:

$$M(C)=C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+ Y+...+Z) = M(X)+ M(Y) +... +M(Z).$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y).$$

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания

$$D(X) = M(x - M(X))^2.$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$D(X) = \sum_{l=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 p_i$ (для дискретной случайной величины);

$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины).

Для вычислений дисперсии может быть использовано свойство дисперсии $D(X) = M(X^2) - m_x^2$.

Рассмотрим теперь некоторые свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины, равна нулю:

$$D(\mathrm{C}) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить из-под знака дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

4. Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X–Y)=D(X)+D(Y).$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Начальными α_k и *центральными* μ_k моментами k-го порядка случайной величины X называются соответственно $\alpha_k = M\left(X^k\right)$; $\mu_k = M\left[\left(X-m_x\right)^k\right]$.

Начальные α_k и центральные μ_k моменты случайной величины X вычисляются по формулам $\alpha_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k P_i$; $\mu_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^k P_i$ (для дискретной случайной величины); $\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$; $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-m_x\right)^k f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины). $S_X = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ называется *коэффициентом асимметрии*, характеризует асимметричность распределения.

$E_X = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ называется *эксцессом*, характеризует крутость кривой плотности распределения.

Задача 1. Случайная величина X - абсцисса наудачу выбранной на отрезке $[0;1]$ точки. Построить функцию распределения случайной величины.

Решение. Равенство $X < x$, если $0 < x \le 1$, означает, что точка попала в интервал $[0;x]$; вероятность попасть в этот интервал равна его длине, т.е. x.

Следовательно,

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = P(0 < X < x) = x,$$

если $0 < x \le 1$. Если $x \le 0$, то $X > x$ всегда и равенство $X < x$ невозможно, т.к. $0 < X < 1$. Если $x > 1$, то $X < x$ всегда, т.к. $0 < X < 1$. Поэтому $F(x)=0$, если $x \le 0$ и $F(x)=1$ если $x > 1$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Задача 2. Пусть X – число гербов в двух независимых бросаниях монеты. X может принимать значения 0, 1, 2, причём

$$P\{x=0\} = P\{x=2\} = \frac{1}{4}\ ; P\{x=1\} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому, если $x \le 0$, то $F(x) = P(-\infty < X < x) = 0$, т.к. X принимает только положительные значения: 0,1,2. Если $0 < x \le 1$, то

$$F(x) = P(0 < X < x) = P\{x = 0\} = \frac{1}{4},$$

т.к. на этом интервале X больше только одного значения случайной величины $X = 0$. Если $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = P(X < x) = P\{(x=0) \cup (x=1)\} = P\{x=0\} + P\{x=1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Т.к. если x принадлежит интервалу $[1;2]$, то x больше двух значений случайной величины: $x = 0$ и $x = 1$. Если $x > 2$, то $P\{X < x\} = 1$, т. к. если $x > 2$, то x больше всех возможных значений случайной величины.

Итак, $$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0; \\ \frac{1}{4}, \text{ если } 0 < x \le 1; \\ \frac{3}{4}, \text{ если } 1 < x \le 2; \\ 1, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Задача 3. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, найти математическое ожидание и дисперсию, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

Решение.

X – случайное число испытанных приборов, оно может принимать следующие значения:

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = 5.$$

Вероятности $P_i = P(X = x_i)$ того, что число испытанных приборов, соответствующих данному частному значению x_i, будут равны

$$P_1 = P(x=1) = 0{,}1;\ \ P_2 = P(x=2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1;\ \ P_3 = P(x=3) = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1;$$

$$P_4 = P(x=4) = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1;\ \ P_5 = P(x=5) = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^5 = 0{,}6591,$$

т.к. либо пятый прибор не исправен, либо все пять приборов исправны.

Таким образом, ряд распределения будет иметь вид табл.1.

Таблица 1

X	1	2	3	4	5
p	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6591

$$M(X) = \sum_{l=1}^{n} p_i x_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}081 + 4 \cdot 0{,}0729 + 5 \cdot 0{,}6521 = 4{,}0951;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}09 + 3^2 \cdot 0{,}081 + 4^2 \cdot 0{,}0729 +$$
$$+ 5^2 \cdot 0{,}6521 - (4{,}0951)^2 = 1{,}9881\ .$$