**Пример 1.** Произведен выбор 100 проволок и проведены испытания их на прочность. В табл. 1 приведены разрывные усилия проволок (Н/мм2), полученные при испытаниях.

Первоначальную длину интервала при группировке взять равной 10 Н/мм2.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 221 | 233 | 175 | 215 | 235 | 260 | 201 | 234 | 211 | 237 |
| 200 | 254 | 245 | 207 | 243 | 251 | 210 | 245 | 250 | 223 |
| 223 | 265 | 285 | 239 | 195 | 250 | 245 | 227 | 231 | 256 |
| 244 | 213 | 257 | 243 | 225 | 242 | 254 | 238 | 241 | 261 |
| 248 | 275 | 224 | 273 | 243 | 282 | 235 | 264 | 280 | 248 |
| 251 | 212 | 247 | 198 | 232 | 233 | 236 | 244 | 225 | 234 |
| 240 | 237 | 235 | 258 | 241 | 233 | 232 | 263 | 305 | 243 |
| 223 | 231 | 253 | 201 | 233 | 231 | 220 | 245 | 255 | 219 |
| 262 | 251 | 250 | 215 | 228 | 257 | 229 | 221 | 244 | 284 |
| 252 | 245 | 265 | 232 | 248 | 221 | 242 | 226 | 247 | 239 |

1. Составить выборочное распределение.

2. Построить гистограмму и график выборочной функции распределения.

3. Найти состоятельные несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с уровнем доверия *γ*=0,95.

5. На основании анализа формы построенной гистограммы выдвинуть гипотезу о законе распределения и проверить справедливость гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости .

**Решение**

**1.** Сначала построим ранжированный ряд. Ранжированный ряд – это перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака (табл. 2).

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 175 | 195 | 198 | 200 | 201 | 207 | 210 | 211 | 212 | 213 |
| *ni\** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| *xi* | 215 | 219 | 220 | 221 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 |
| *ni\** | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| *xi* | 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 237 | 238 | 239 |
| *ni\** | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| *xi* | 240 | 241 | 242 | 243 | 245 | 247 | 244 | 245 | 247 | 248 |
| *ni\** | 1 | 2 | 2 | 4 | 5 | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 |
| *xi* | 248 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 |
| *ni\** | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| *xi* | 260 | 261 | 262 | 263 | 264 | 265 | 273 | 275 | 280 | 282 |
| *n*i\* | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| *xi* | 284 | 305 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *ni\** | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |

Для построения интервального вариационного ряда выполняем следующие действия:

1. Длина частичного интервала  задана и равна 10.

,

где ; ; .

2. Подсчитаем число элементов (*частот*) выборки, попадающих в каждый интервал. Очевидно, .

Строим интервальный статистический ряд (табл. 3).

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 2 | 3 | 7 | 14 | 22 |
|  | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,07 | 0,14 | 0,22 |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 22 | 15 | 8 | 2 | 3 | 1 |
|  | 0,22 | 0,15 | 0,08 | 0,02 | 0,03 | 0,01 |

**2.** *Построение гистограммы плотностей относительных частот* – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длинной , а высоты равны отношению .

Полученные значения высот вносим в табл. 4.

Таблица 4

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  | 1 | 0,01 | 0,001 | 185 | 185 | 34225 |
| 2 |  | 2 | 0,02 | 0,002 | 195 | 390 | 76050 |
| 3 |  | 3 | 0,03 | 0,003 | 205 | 615 | 126075 |
| 4 |  | 7 | 0,07 | 0,007 | 215 | 1505 | 323575 |
| 5 |  | 14 | 0,14 | 0,014 | 225 | 3150 | 708750 |
| 6 |  | 22 | 0,22 | 0,022 | 235 | 5170 | 1214950 |
| 7 |  | 22 | 0,22 | 0,022 | 245 | 5390 | 1320550 |
| 8 |  | 15 | 0,15 | 0,015 | 255 | 3825 | 975375 |
| 9 |  | 8 | 0,08 | 0,008 | 265 | 2120 | 561800 |
| 10 |  | 2 | 0,02 | 0,002 | 275 | 550 | 151250 |
| 11 |  | 3 | 0,03 | 0,003 | 285 | 855 | 243675 |
| 12 |  | 1 | 0,01 | 0,001 | 295 | 295 | 87025 |
|  |  |  |  |  | 240500 | 5823300 |

Строим гистограмму по данным 5-го столбца таблицы 4.

190

200

210

220

230

240

*х*

2,222

1,5

250

1,4

180

260

270

280

290

300

0.8

0.7

0,3

0,1

*h*i٭∙100

Рис.1. Гистограмма плотностей относительных частот

По виду гистограммы (рис. 1) подбираем подходящий для данного случая теоретический закон распределения

Сравниваем гистограмму с теоретическими кривыми основных законов (нормальный, показательный, равномерный). По виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины *X*.

**3.** *Нахождение состоятельных несмещенных оценок математического ожидания и дисперсии.* *Найдем оценки математического ожидания а и дисперсии D.*

**;

**т.е.

.

Согласно определению, исправленной выборочной дисперсией называется произведение выборочной дисперсии на величину , т.е. исправленная дисперсия равна

,

а исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение .

**4.** *Построим доверительный интервал для математического ожидания по формуле* .

Ввиду большего объема выборки можно считать, что распределение Стьюдента близко к нормальному закону. По таблице значений функции Лапласа найдем  (см. прил. 2), тогда

или .

Доверительный интервал для дисперсии построим по формуле

 при *q*<1;

 при *q*>1.

Найдем доверительный интервал для *D* при заданной надежности γ *=* 0,95. По прил. 5 находим *q* (*n =* 100; *γ* = 0,95) *=* 0,143. Следовательно, границы доверительного интервала: 396,7(1– 0,143)2 = 293,1и 396,7(1+0,143) = 518,27.

Итак, 293,1 < *D* *<* 518,27с вероятностью 0,95*.*

**5.** *Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения исследуемой случайной величины Х.*

Проверим гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона. В качестве меры расхождения между теоретическим распределением и эмпирическим распределением  используем статистику , где  – число опытов, - вероятность попадания возможных значений случайной величины в -тый разряд статистического ряда, - число разрядов.

Так как выдвинута гипотеза в пользу нормального закона распределения генеральной совокупности, теоретические вероятности находим по формуле

,

где – функция Лапласа (см. прил.2); .

Имеем ; . Обозначим через , затем определим теоретические вероятности и теоретические частоты , для чего составим расчетную табл. 5.

Таблица 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 |  |  |  | -0,5 | 0,0053 |  | 0,0047 |
| 2 |  | -2,55 | -0,4947 | 0,0154 |
| 3 |  | -2,04 | -0,4793 | 0,0411 |
| 4 |  | 7 | -1,54 | -0,4382 | 0,0897 | 8,97 | 0,4327 |
| 5 |  | 14 | -1,03 | -0,3485 | 0,1466 | 14,66 | 0,0297 |
| 6 |  | 22 | -0,53 | -0,2019 | 0,1899 | 18,99 | 0,4502 |
| 7 |  | 22 | -0,03 | -0,0120 | 0,1964 | 19,64 | 0,2836 |
| 8 |  | 15 | 0,48 | 0,1844 | 0,1521 | 15,21 | 0,0029 |
| 9 |  | 8 | 0,98 | 0,3365 | 0,0954 | 9,54 | 0,2486 |
| 10 |  |  | 1,49 | 0,4319 | 0,0448 |  | 0,963 |
| 11 |  | 1.99 | 0,4767 | 0,0171 |
| 12 |  | 2,5 | 0,4938 | 0,0062 |
|  |  |  |  | 0,5 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | 1,5487 |

По условию, объём выборки *n*=100, значения случайной величины разбиты на 12 интервалов. Так как частоты  попадания в каждый из трех первых и трех последних интервалов малы (меньше 5), объединяем их соответственно в первый и последний. Вычисление  приведено в табл. 5. Элементы 4-го столбца определяем по прил.2, вероятности **– элементы 6-го столбца – вычисляются следующим образом:





Найдем меру расхождения между теоретическим распределением и эмпирическим распределением по формуле:

.

Согласно теореме Пирсона при  распределение величины  зависит от параметра , который называют числом степеней свободы. *k = l –* 1 *– r,* где *r* – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки, *l –* число интервалов. Число степеней свободы . Выберем уровень значимости  и по таблице квантилей *–* распределения для числа степеней свободы  и уровня значимости  (см. прил. 4) найдем критическое значение ; так как наблюденное значение оказалось меньше табличного значения, то можно сделать вывод: выдвинутая гипотеза о нормальном законе распределения не противоречит опытным данным. Следовательно, гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем.