Министерство образования и науки
Федеральное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ)»

Е.Ю. Руппель

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие

Омск 2017

УДК 512
ББК 22.14
Р86

Рецензенты:
канд. физ. - мат. наук, доц. Ю.Б. Никитин (ОмГМУ);
канд. техн. наук, доц. А.С. Котюргина (ОмГТУ)

Работа утверждена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве учебного пособия.

Руппель, Елена Юрьевна.
Р86 Элементы теории вероятностей и математической статистики : [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.Ю. Руппель .– Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2017. – Режим доступа: ……………………………………….., свободный после авторизации. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-00113-043-7.

Содержит теоретический и справочный материал разделов «Теория вероятностей» и «Математическая статистика», необходимый при обучении студентов дисциплины «Математика». Рассмотрены примеры решения задач, а также представлены вопросы для самопроверки, контрольные работы и индивидуальные задания.

Имеет интерактивное оглавление в виде закладок. Содержит видеофрагменты обучающего и демонстрационного характера, которые воспроизводятся с помощью проигрывателя Windows Media.

Предназначен для обучения студентов экономических, технических, строительных направлений бакалавриата и специалитета всех форм обучения. Может быть использовано также магистрами, аспирантами и преподавателями математики технических вузов при изучении данных разделов.

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика».

Мультимедийное издание (2,8 МБ)
Системные требования: Intel, 3,4 GHz; 150 Мб; Windows XP/Vista/7; DVD-ROM;
1 Гб свободного места на жестком диске;
программа для чтения pdf-файлов:
Adobe Acrobat Reader; Foxit Reader

Редактор Н.И. Косенкова
Техническая подготовка Н.В. Кенжалинова
Издание первое. Дата подписания к использованию
Издательско-полиграфический комплекс СибАДИ. 644080, г. Омск, пр. Мира5
РИО ИПК СибАДИ. 644080, г. Омск, ул. 2-я Поселковая, 1

В современной физике в отличие от ньютоновского подхода при использовании неточных данных ученые стремятся с самого начала учитывать истинную точность наблюдений, не стараясь ни на одном этапе вычислений получить большую точность, чем та, которая на самом деле является реальной.

Норберт Винер. «Я математик»

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время всевозрастающее значение приобретает использование математических методов анализа закономерностей в разнообразных исследованиях, связанных с управлением производством и технологическими процессами. А это выдвигает серьезные требования к совершенствованию математической подготовки инженеров.

Среди математических дисциплин, которые изучают студенты, инженерных и экономических специальностей (высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика, математическое программирование и др.), теория вероятностей и математическая статистика занимают особое положение. Во - первых, она является теоретической базой статистических дисциплин, во - вторых, методы теории вероятностей и математической статистики непосредственно используются при изучении массовых совокупностей наблюдаемых явлений, обработке результатов наблюдений и выявлении так называемых «статистических закономерностей». Наконец, теория вероятностей имеет важное методологическое значение в познавательном процессе, в построении умозаключений на основании результатов опыта или наблюдения над частью объектов и их воссоединением (синтезом) для получения целостного представления об общей закономерности, т. е. служит логикой индуктивно-дедуктивного умозаключения.

Современное производство является сложным и многообразным объектом, между элементами которого существуют многосторонние связи и взаимосвязи. На их изменения оказывает влияние множество факторов, по - разному действующих в различные моменты времени, а в результате эти изменения носят случайный характер. При этом, как правило, отсутствует возможность постановки «чистого» эксперимента, позволяющего выделить главные, решающие факторы и исключить действия многих второстепенных. Поэтому особенно важным становится определение общих закономерностей на базе наблюдения за частью случайных явлений, отделением основных связей от случайных воздействий.

Анализ традиционных методик экспериментальных исследований показал, что с применением математических методов на всех этапах экспериментального исследования – при осмысливании информации до опыта, при планировании эксперимента и обработке его результатов – можно существенно повысить достоверность и эффективность эксперимента. Поэтому основной задачей данного учебного пособия является первое знакомство студентов инженерных специальностей с некоторыми идеями и методами теории эксперимента с целью их использования при выполнении любых исследований. В свою очередь, изучение методов обработки наблюдений и проведение эксперимента требуют знакомства с теорией вероятности. Чему и посвящена первая глава настоящего пособия.

Пособие не содержит подробного теоретического материала, т.е. не дублирует известных учебников по данным дисциплинам. Основная особенность пособия – сочетание необходимого теоретического материала с широким использованием методов решения основных типов задач по изложенным в нём разделам курса.

Идея написания такого пособия пришла автору после многолетнего чтения лекций для студентов технических направлений и переработке уже известной литературы по данным разделам. Опыт работы в вузе выявил особенности в изложении теоретического материала для студентов технических направлений. Основной принцип – его доступность в сочетании со строгостью изложения. Поэтому пособие отличается высоким уровнем строгости и методической продуманности изложенных тем, точностью формулировок основных понятий и теорем, краткостью и доступностью при решении задач. Предложенные для решения задачи прошли многолетнюю апробацию. Пособие содержит задачи по всем разделам теории вероятностей, изучаемых в технических вузах. Большинство задач сопровождаются решениями, а те из них, которые предлагаются для самостоятельного решения, – ответами. В учебном пособии приведен подробный разбор типовых задач по теории вероятностей и математической статистике, решение которых позволит студенту глубже понять теоретико-вероятностные построения, научиться применять их при проведении конкретных экспериментов и опытов в своей инженерной и экспериментальной деятельности.

Пособие содержит необходимые для решения задач таблицы.

Соответствует требованиям, предъявляемым к компетенциям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

§1. Основные правила комбинаторики

1. Правило сложения

Пример 1. Пусть в первой урне содержится n_1 шаров, во второй – n_2, а в третьей – n_3. Все шары полагаем различными между собой, например пронумерованными. Сколькими различными способами можно вытащить один шар из произвольной урны? Очевидно, число способов равно $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Пример 2. Из пункта A в пункт B можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причем между этими пунктами существуют 3 авиамаршрута, 2 железнодорожных и 4 автобусных. Следовательно, общее число маршрутов между пунктами A и B равно 3 + 2 + 4 = 9.

Обобщая изложенное, можно сформулировать правило сложения.

Если выбор каждого из k объектов $a_i\left(i = 1, 2, ..., k\right)$ можно выполнить n_i способами, причем никакие способы выбора каждого из объектов не совпадают со способами выбора любого другого объекта, то выбор «или a_1, или a_2, …, или a_k» можно произвести $n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i$ способами.

2. Правило умножения

Пример 3. Пусть в урне n различных между собой шаров. Сколькими способами можно двумя взятыми из урны шарами заполнить две ячейки, в каждую из которых помещается ровно один шар? Очевидно, первую ячейку можно заполнить n способами. После заполнения первой ячейки в урне останется $n-1$ шар. Следовательно, вторую ячейку можно заполнить $n-1$ способом. Заметим, что с каждым из n способов заполнения первой ячейки может совпасть любой из $n-1$ способов заполнения второй. Поэтому общее число способов заполнения двух ячеек равно $n(n-1)$.

Пример 4. Между пунктами A и B имеется 6 различных маршрутов, а между пунктами B и C – 4 маршрута. Каким числом различных маршрутов можно проехать из A через B в С? Искомое число маршрутов равно $6 \cdot 4 = 24$, так как, приехав из A в B одним из 6 маршрутов, можно выбрать для проезда из B в C любой из четырёх маршрутов.

Запишем теперь правило умножения в общем виде.

Последовательный выбор k объектов $a_i \left(i = 1, 2, ..., k\right)$ может быть выполнен $m = \prod\limits_{i=1}^{k} m_i$ способами, если принятая очередность выбора позволяет каждый объект a_i выбрать m_i способами.

3. Выборки

Рассмотрим множество, состоящее из n различных элементов $a_1, a_2, ..., a_n$, которое назовем **генеральной совокупностью**. Произвольное упорядоченное подмножество из k элементов, входящих в генеральную совокупность, назовем **выборкой** объемом k. Наглядно выборку объемом k можно представить как результат k последовательных случайных извлечений (выбора) элементов из урны, содержащей все элементы генеральной совокупности. Выбор может выполняться с возвращением и без возвращения. При выборе с возвращением извлеченный элемент после обследования вновь возвращается в генеральную совокупность, и поэтому один и тот же элемент может быть выбран несколько раз. В случае выбора без возвращения однажды выбранный элемент удаляется из генеральной совокупности, так что выборка не содержит повторяющихся элементов. Очевидно, что при выборе с возвращением объем выборки никак не связан с объемом генеральной совокупности, а при выборе без возвращения всегда $k \le n$.

Выборки без возвращения

Размещением из n элементов по k называется выборка без возвращения объема k из генеральной совокупности, содержащая n элементов. Размещения отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их расположения. Для определения числа A_n^k размещений из n элементов по k учтем, что первый элемент выборки может быть взят n различными способами, второй – $\left(n-1\right)$ способом, …., а k – й элемент - $\left(n-k+1\right)$ способами. Отсюда, используя правило умножения, получим

$$A_n^k = n(n-1)....(n-k+1) =$$
$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)[(n-k)(n-k-1)...1]}{(n-k)(n-k-1)...1} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1.1)$$

Пример 5. Сколько различных трёхзначных чисел может быть составлено из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии:

а) в каждом числе нет одинаковых цифр;

б) числа могут содержать одинаковые цифры.

Решение.

а) искомое число чисел равно: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Действительно, все трёхзначные числа представляют собой подмножества из трёх элементов, отличающихся и составом, и порядком следования элементов;

б) если числа могут содержать одинаковые цифры, то для цифры, стоящей на первом месте, в числе существует 5 возможностей; на втором месте – тоже 5, на третьем – также 5. По правилу умножения число всех трёхзначных чисел равно: $5^3 = 125$.

В частном случае, когда $k = n$, все выборки без возвращения имеют одинаковый состав и отличаются лишь порядком расположения элементов. Такие выборки называются **перестановками**.

Число P_n перестановок из n элементов найдем, подставив в (1.1) $k = n$.

Тогда

$$P_n = n! \qquad (1.2)$$

Пример 6. Сколькими способами можно упорядочить множество чисел $\{1, 2, ..., n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в порядке возрастания?

Решение. Числа 1, 2, 3 можно полагать склеенными в порядке возрастания и рассматривать как один элемент. Тогда число элементов множества равно $n-2$ и они могут быть упорядочены $(n-2)!$ способами (число перестановок из $n-2$ элементов).

Сочетаниями из n элементов по k называются выборки без возвращения из генеральной совокупности объема k, содержащие n элементов. Сочетания отличаются друг от друга только составом элементов выборки. Определим число C_n^k сочетаний из n элементов по k. Очевидно, что выборку без возвращения объема k, имеющую фиксированный состав элементов, можно упорядочить $k!$ способами.

Следовательно, A_n^k больше C_n^k в $k!$ раз. Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.3}$$

Пример 7. Сколькими способами можно выбрать 3 прибора из 6?

Решение. Поскольку порядок взятия приборов не играет роли, различные комбинации выбранных приборов отличаются только составом. Следовательно, число способов, которыми можно выбрать 3 прибора из 6, равно числу сочетаний из 6 по 3.

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20.$$

При решении вероятностных задач часто используются следующие формулы:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{1.4}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \tag{1.7}$$

В справедливости формул (1.4) и (1.5) нетрудно убедиться, подставив в них выражение (1.3). Равенства (1.6) и (1.7) следуют из формулы бинома Ньютона:

$$(a+в)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} в^k. \tag{1.8}$$

Для получения равенства (1.6) необходимо в (1.8) подставить $a = в = 1$. Равенство (1.7) вытекает из (1.8) при $a = 1$, $в = -1$.

Выборки с возвращением

Выборка с возвращением объема k из генеральной совокупности, содержащей n элементов, называется размещением с повторениями из n по k. Число $\hat{A}_n^k$ размещений с повторениями из n элементов по k найдем из следующих соображений. Каждый элемент может быть выбран n способами, а общее число способов формирования выборки объема k подсчитывается на основании правила умножения. Следовательно,

$$\hat{A}_n^k = n^k .$$

Выборка с возвращением объема k из содержащей n элементов $(a_1, a_2, \ ..., a_n)$ генеральной совокупности называется ***перестановкой с повторениями***, если во все выборки элемент a_1 входит k_1 раз, элемент $a_2 - k_2$ раз, …, элемент $a_n - k_n$ раз, причем $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$. Определим число $\hat{P}(k_1, k_2, ..., k_n)$ перестановок с повторениями. Для этого учтем, что элемент a_1 может быть выбран k_1 раз в ходе k последовательных извлечений $C_k^{k_1}$ способами, элемент a_2 может быть выбран k_2 раз в ходе $(k - k_1)$ остальных извлечений $C_{k-k_1}^{k_2}$ способами, …, элемент a_{n-1} может быть выбран k раз в ходе $(k - k_1 - ... - k_{n-2})$ извлечений $C_{k-k_1-k_2-...-k_{n-2}}^{k_{n-1}}$ способами и, наконец, элемент a_n может выбран $C_{k-k_1-...-k_{n-1}}^{k_n} = C_{k_n}^{k_n} = 1$ способом. Отсюда, используя правило умножения, запишем

$$\hat{P}(k_1, k_2, ..., k_n) = C_k^{k_1} C_{k-k_1}^{k_2} ... C_{k-k_1-k_2-...-k_{n-2}}^{k_n - 1} . \tag{1.10}$$

Подставив выражение (1.3) в (1.10), после сокращения получим

$$\hat{P}(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{k!}{k_1! k_2! ... k_n!} . \tag{1.11}$$

Выражение (1.11) можно получить и другим способом. Из k элементов, составляющих выборку, можно сформировать $k!$ перестановок. Однако из-за наличия в выборке повторяющихся элементов часть перестановок будет неразличима между собой. Так, неразличимыми являются $k_1!$ перестановок, образованных взаимным обменом мест между элементами a_1; $k_2!$ перестановок, образованных взаимным обменом мест между элементами a_2, и т.д. Отсюда, используя правило умножения, приходим к выражению (1.11).

Пример 8. Сколькими различными способами можно разбросать k шариков по n лункам так, чтобы в первую лунку попало k_1 шариков, во вторую – k_2 шариков …, в n-ю – k_n шариков $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i = k \right)$?

Решение. Каждый шарик независимо от других выбирает себе лунку. Эту операцию он может выполнить n способами. (Схема, в которой каждая лунка выбирает шарики, приводит к выбору с очень сложной взаимной зависимостью). Таким образом, речь идет о выборках с возвращением объема k из n элементов генеральной совокупности, причем выборки различаются только порядком, а состав их одинаков. (Пронумерованными считаются не только лунки, но и шарики, номера которых и определяют порядок взятия лунок). Следовательно, число таких выборок равно числу $\hat{P}(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_n)$ перестановок с повторениями и может быть определено по формуле (1.11)

$$\hat{P}(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{k!}{k_1! k_2! ... k_n!}.$$

Отличающиеся только составом элементов выборки с возвращением объема k из генеральной совокупности, содержащей n элементов, называются **сочетаниями с повторениями** из n по k.

Без доказательства приведем формулу. позволяющую определить число таких выборок:

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \qquad (1.12)$$

Примечание. В комбинаторных расчетах часто используется формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}, \qquad (1.13)$$

которая облегчает вычисление $n!$ при больших значениях n.

Пример 9. Сколькими различными способами можно разбросать 4 шарика по 3 лункам?

Решение. Каждый шарик независимо от других выбирает себе лунку, т. е. идет речь о выборках возвращениями объема 4 из 3 элементов. Но далее условие задач неоднозначно. По-видимому, вполне естественно считать лунки пронумерованными (различными). Однако шарики можно считать и пронумерованными, и непронумерованными. Соответственно выборки различаются или порядком и составом элементов, или только составом. В первом случае число различных выборок равно числу $\hat{A}_3^4$ размещений с повторениями из 3 элементов по 4. При этом в соответствии с (1.9) получим

$$\hat{A}_3^4 = 3^4 = 81.$$

Во втором случае число различных выборок равно числу сочетаний с повторениями из 3 элементов по 4. При этом в соответствии (1.12) находим

$$\hat{C}_3^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15.$$

Задача 1. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. Играющий зачеркивает 6 произвольных чисел по своему усмотрению. После тиража объявляется 6 «счастливых» чисел. В случае совпадения по крайней мере 3 зачеркнутых «счастливых» чисел владелец карточки получает выигрыш тем больший, чем больше чисел угадано. Максимальный выигрыш достигается, если удалось угадать все 6 чисел. Необходимо определить:

а) сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел на карточке «Спортлото»?

б) Сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел на карточке "Спортлото" так, чтобы был обеспечен выигрыш?

Решение. Очевидно, что различные комбинации зачеркнутых чисел отличаются только составом, т. е. являются сочетаниями.

а) Общее число различных способов выбора 6 чисел из 49 равно C_{49}^{6}. Используя (3), получим

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13\,983\,816 \approx 1{,}4 \cdot 10^{7}.$$

б) Выигрыш достигается, если угадано или 3, или 4, или 5, или

6 "счастливых" чисел, т. е. выигрыш может быть достигнут четырьмя вариантами. По правилу сложения, число способов в каждом из этих вариантов необходимо сложить. Рассмотрим первый вариант. Выигрыш 3 "счастливых" из 6: 3 "счастливых" числа из 6 можно выиграть C_6^3 способами, 3 "несчастливых" числа из (49 – 6) можно зачеркнуть C_{43}^3 способами. Последовательный набор 3 из 6 "счастливых" чисел и 3 из 43 "несчастливых" на основании правила умножения может быть выполнен $C_6^3 \cdot C_{43}^3$ способами. Аналогично: 4 "счастливых" – $C_6^4 \cdot C_{43}^2$,

5 "счастливых" – $C_6^5 \cdot C_{43}^1$, 6 "счастливых" – $C_6^6 \cdot C_{43}^0$ способами. Используя правило сложения, получим, что число способов, которыми можно зачеркнуть 6 чисел так, чтобы обеспечить выигрыш, равно

$$C_6^3 \cdot C_{43}^3 + C_6^4 \cdot C_{43}^2 + C_6^5 \cdot C_{43}^1 + C_6^6 \cdot C_{43}^0 = 246820 = 13545 + 258 + 1 = 260624.$$

Задача 2. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырёх для работы на определённом участке. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбранных четырёх человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами:

$$C_{25}^{4}=\frac{25!}{(25-4)!\cdot 4!}=\frac{25!}{21!\cdot 4!}=\frac{21!\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{21!\cdot 4!}=\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=12\,650.$$

Задача 3. Группа учащихся изучает 8 различных учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в субботу, если в этот день недели должно быть 3 разных дисциплины (порядок дисциплин роли не играет).

Решение. Число способов равно

$$P_{8}^{3}=\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=56.$$

Действительно, в данном случае мы имеем дело с подмножествами из трёх элементов, которые отличаются лишь составом.

Задача 4. Каким числом различных способов могут быть выбраны $к$ деталей из партии в n деталей при выборочном контроле качества продукции?

Решение. В этой задаче все подмножества, содержащие $к$ элементов, отличаются лишь составом элементов. Значит, число различных способов равно $C_{n}^{к}$. *Для воспроизведения видео кликните ссылку:* https://www.youtube.com/watch?v=-NqB3YWgpOo .

Задачи для решения в аудитории

1. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, не повторяя цифр в числе?

2. В урне 10 белых шаров и 5 чёрных. Сколькими способами из урны можно вынимать наугад 3 шара, чтобы:

а) все три шара оказались белыми;

б) все три шара оказались чёрными;

в) два шара оказались белыми, а один – чёрным;

г) один шар оказался белым, а два – чёрными?

3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать любое число раз?

4. На станке должны быть последовательно обработаны 5 различных деталей. Сколько вариантов должен проанализировать технолог для выбора наилучшей очередности их обработки?

5. Каким числом различных способов могут быть выбраны 10 деталей из партии в 100 деталей при выборочном контроле качества продукции?

6. Текст кодируется цифрами от 0 до 9 (десятичный код). Сколь-

ко различных сообщений можно передать комбинацией из 8 цифр?

7. На участке в один ряд устанавливается 8 станков. Сколько может быть различных вариантов установки станков, если 2 определенных станка обслуживает один рабочий и, следовательно, они должны стоять рядом?

8. Что изменится, если в условии предыдущей задачи станки будут стоять не в один ряд, а по кругу?

9. В ящике имеется n деталей, среди которых k - бракованных. Сколько существует различных способов отбора $s(s \leq n)$ деталей из ящика, таких, что среди выбранных деталей содержатся: а) ровно $p(p \leq k)$ бракованных; б) не менее p бракованных; в) менее p бракованных?

10. В кодовой комбинации, содержащей 10 элементов, из-за помех 5 элементов принято неправильно. Сколько существует различных способов расположения ошибок (неправильно принятых элементов) в комбинации?

11. На участке работает 30 человек. Сколько существует различных способов формирования из них бригады в составе: а) мастера и помощника; б) мастера и четырех помощников?

12. Батарея из 20 орудий ведет огонь по группе, состоящей из 30 целей: а) сколько существует различных способов выбора целей этими орудиями; б) сколько существует различных способов выбора целей этими орудиями, если известно, что орудия выбирают различные цели?

13. Сколько существует различных способов распределения 8 приборов между 3 лабораториями, если: а) все приборы различны; б) все приборы идентичны?

14. Сколько существует различных способов распределения 10 приборов между тремя лабораториями, если известно, что 1-я лаборатория получает 5 приборов, 2-я – 1 прибор, а 3-я – остальные 4 прибора?

15. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, не содержащих одинаковых цифр в различных разрядах?

16. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра: а) больше предыдущей; б) меньше предыдущей?

17. В группе из n стран каждые две страны связаны договором о взаимной торговле. Сколько договоров обеспечивают торговлю между этими странами?

18. В цехе n лампочек. Достаточная освещенность цеха обеспечивается, если горят хотя бы k лампочек. Сколько существует различных способов обеспечения освещенности цеха?

19. Каким количеством способов при подведении итогов соревнования могут распределиться первые четыре места среди 20 участков данного цеха?

Ответы

1.600. **2.** а) 120; б) 10; в) 225; г) 100. **3.** 210. **4.** $5!$ **5.** C_{100}^{10}. **6.** 10^8. **7.** $7!2!=10\,080$. **8.** $6!2!8=11520$. **9.** а) $C_k^p\, C_{n-k}^{s-v}$; б) $\sum_{i=v}^{s} C_k^i C_{n-k}^{s-i}$; в) $\sum_{i=0}^{v-1} C_k^i C_{n-k}^{s-i}$. **10.** 252. **11.** а) $A_{30}^2=870$; б) $30\,C_{29}^{\,4}=712\,530$. **12.** а) 30^{20}; б) A_{30}^{20}. **13.** а) $\hat{A}_3^8=3^8=6561$; б) $\hat{C}_3^8=C_{10}^8=45$. **14**. $\hat{P}(5,1,4)=\dfrac{10!}{5!\,1!\,4!}=1260$. **15.** $9A_9^3=4536$. **16.** а) $C_9^4=126$; б) $C_{10}^4=210$. **17**. $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^2$. **18.** $\sum_{i=k}^{n} C_n^{\,i}$. **19.** $A_{20}^4=116\,280$.

§2. Классическое определение вероятности

Событием (или случайным событием) называется всякий факт, который в результате опыта (эксперимента) может произойти или не произойти. Обозначаются события *A, B, C, …*.

Достоверным событием называется событие, которое в результате опыта непременно должно произойти, а *невозможным* – событие, которое в результате опыта не может произойти [7].

Пример 1. Если в урне находятся только цветные шары и из урны извлечён шар, то событие “извлечён цветной шар” является достоверным.

Пример 2. Если в ящике имеются только стандартные детали и из ящика наудачу извлечена деталь, то невозможным будет событие «извлечена нестандартная деталь».

Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются *совместными*.

Пример 3. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. Событие *A* – “появилась стандартная деталь” и событие *B* – “появилась нестандартная деталь” являются несовместными событиями.

Пример 4. Брошена игральная кость. Событие *A* – “появление двух очков” и событие *B* – “появление чётного числа очков” совместны, так как появление одного из них не исключает появление другого.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий несовместны.

Пример 5. Произведено два выстрела по мишени, события A_1 – “два попадания”, A_2 – “только одно попадание”, A_3 – “ни одного попадания” попарно несовместные.

Полной группой событий называется множество событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Элементарными событиями будем называть события ω_i, которые:

1) составляют полную группу событий;

2) несовместны;

3) по известному элементарному событию можно судить, произошло или не произошло событие *A*, возможное в данном эксперименте.

Множество элементарных событий, поставленных в соответствие эксперименту, называется *пространством элементарных событий*, обозначается $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$.

Пример 6. При однократном бросании игральной кости элементарными событиями являются события: $\omega_1 = \{1\}$ – “появление одного очка”; $\omega_2 = \{2\}$; $\omega_3 = \{3\}$; $\omega_4 = \{4\}$; $\omega_5 = \{5\}$; $\omega_6 = \{6\}$. Событие $A = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}$ – появление “нечётного числа очков” является подмножеством пространства элементарных событий и представляет собой некоторое событие.

Элементарные события, принадлежащие событию *A,* называются *благоприятствующими* наступлению события *A*. В примере 6 это элементарные события ω_1, ω_3, ω_5.

События $A_1, A_2, ...$ называются *равновозможными*, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

Пример 7. Появление того или иного числа очков при бросании игральной кости есть события равновозможные, т. к. игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет строго симметричную форму.

Таким образом, каждое событие A определяется как подмножество пространства элементарных событий Ω. Очевидно, невозможному событию A не благоприятствует ни одно элементарное событие из Ω, т. е. оно совпадает с пустым множеством $\varnothing$; достоверному событию благоприятствуют все события пространства Ω.

Вероятностью случайного события A называется отношение числа элементарных равновозможных событий, благоприятствующих наступлению события A, к числу элементарных равновозможных событий:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.14}$$

Рассмотрим некоторую область. Если вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна мере этой области (длине, площади, объёму) и не зависит от её расположения и формы, то может быть использовано геометрическое определение вероятности: пусть геометрическая мера всей области S_D, а геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть S_d, то вероятность события равна: $P = S_d / S_D$.

Задача 1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

Решение. Пространство элементарных событий представляет собой множество:

ω_1 – герб на первой монете, герб на второй монете;

ω_2 – герб на первой монете, цифра на второй монете;

ω_3 – цифра на первой монете, герб на второй монете;

ω_4 – цифра на первой монете, цифра на второй монете.

Событие A (выпадение хотя бы одного герба) = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Следовательно, $P(A) = 3/4 = 0{,}75$.

Задача 2. В урне 3 белых и 9 чёрных шаров, из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар оказался чёрным (событие A)?

Решение. Число случаев, благоприятствующих событию A, равно 9. Число всех равновозможных случаев равно 12 (9+3). Следовательно, $P(A) = 9/12 = 0{,}75$.

Задача 3. В урне 4 белых и 7 чёрных шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие A)?

Решение. Найдём число элементарных событий: $n = C_{11}^2 = \dfrac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55$. Число случаев, благоприятствующих событию A, можно определить по формуле

$$m = C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6,$$

т. к. белых шаров 4, а выбираем из них 2. Тогда $P = \dfrac{m}{n} = 6/55 = 0{,}109$.

Задача 4. Десять различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что три определённые книги окажутся поставленными рядом.

Решение. Представим себе, что три определённые книги связаны вместе. Тогда число возможных способов расположения связки на полке равно числу перестановок из 8 элементов (связка плюс оставшиеся 7 книг), т. е. $P_8 = 8!$. Внутри связки три книги можно распределить $P_3 = 3!$ раз. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждой из P_8 комбинаций. Поэтому число m благоприятствующих случаев равно $P_8 \cdot P_3$. Число равновозможных исходов, поставленных в соответствие опыту, $n = P_{10} = 10!$ Таким образом, исходная вероятность

$$P = \frac{P_8 \cdot P_3}{P_{10}} = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067.$$

Задача 5. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиусом $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

Решение. Точка М (центр монеты) может с равной вероятностью попасть в любую точку отрезка АВ, перпендикулярного параллельным прямым; длина отрезка АВ равна $2a$ (рис. 1.1). Данному событию благоприятствует попадание центра монеты в любую точку отрезка СД, длина которого равна $(2a - 2r)$ Следовательно,

$$P(A) = \frac{дл.СД}{дл.AB} = \frac{2a - 2r}{2a} = 1 - \frac{r}{a}.$$

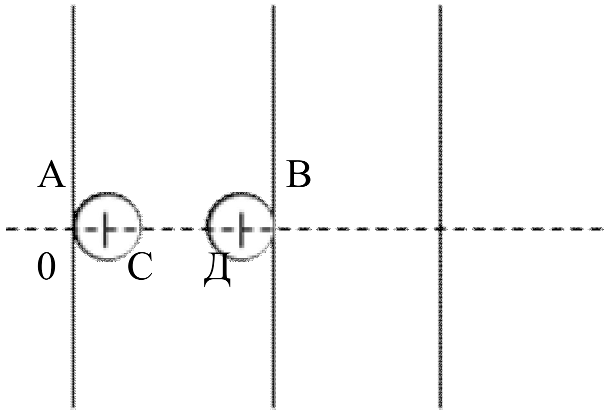

Рис. 1.1. Графическое изображение условия задачи

Задачи для решения в аудитории

1. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей ровно три – стандартные.

2. Буквы *а*, *а*, *в*, *к*, *к*, *о*, *х* написаны на отдельных карточках. Какова вероятность того, что, извлекая эти карточки по одной наудачу (без возвращения обратно), получим в порядке их выхода слово "Каховка"?

3. На складе имеется 15 кинескопов, причём 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 5 кинескопов окажется 3 кинескопа Львовского завода.

4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем;

б) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что разность их равна четырем.

5. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них одна за другой извлекаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.

6. Тот же вопрос, что в задаче 2, но первая карточка после извлечения кладется обратно и смешивается с остальными, а стоящее на ней число записывается.

7. На шести карточках написаны буквы *к*, *а*, *р*, *е*, *т*, *а*. После тщательного перемешивания берут наудачу по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ракета»?

8. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты,

студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

9. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: A – шары одного цвета; B – шары разных цветов?

10. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

11. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем;

б) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что разность их равна четырем.

12. Десять студентов условились ехать с определенным электропоездом, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 10 вагонов. Предполагается, что все возможности в распределении студентов по вагонам равновероятны.

13. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, от второго и выше. Найти вероятности следующих событий: А – все пассажиры выйдут на четвертом этаже; В – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже); С – все пассажиры выйдут на разных этажах.

14. Одновременно бросают 2 игральные кости, на гранях которых нанесены очки 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна восьми?

15. В коробке содержится 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики из коробки. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

16. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

17. В ящике два отделения (верхнее и нижнее), в которые положены наудачу две тетради. Какова вероятность того, что в каждом отделении будет находиться одна тетрадь?

18. В ящике имеется 15 деталей, 10 из которых окрашены. Сборщик наудачу извлек 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

19. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажутся 5 отличников.

20 «Секретный замок» содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными написанными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры дисков образуют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

21. Лифт в пятиэтажном доме отправляется с тремя пассажирами. Найти вероятность того, что на каждом этаже выйдет не более одного пассажира, предполагая, что все возможные способы распределения пассажиров по этажам равновероятны.

Ответы

1. 0,36. **2.** 0,0008. **3.** 0,1998. **4.** а) $P = 0{,}05(5)$; б) $P = 0{,}5$. **5.** $P = 0{,}5$. **6.** $P = 0{,}4$. **7.** $P = 0{,}0028$. **8.** $P = 0{,}692$. **9.** $P(B) > P(A)$. **10.** $P = 0{,}0014$. **11.** а) $P = 0{,}05(5)$; б) $P = 0{,}5$. **12.** $P = 0{,}00036$. **13.** $P(A) = 0{,}0046$; $P(B) = 0{,}027(7)$; $P(C) = 0{,}5(5)$. **14.** $P = 0{,}138(8)$. **15.** $P = 0{,}00139$. **16.** $P = 0{,}096$. **17.** $P = 0{,}5$. **18.** $P = 0{,}026$. **19.** $P = 0{,}255$. **20.** $P = 0{,}0016$. **21.** $P = 0{,}375$.

§3. Операции над событиями

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного события: A или B. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий [4] (рис. 1.2).

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном появлении события A и события B. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий [7] (рис. 1.3).

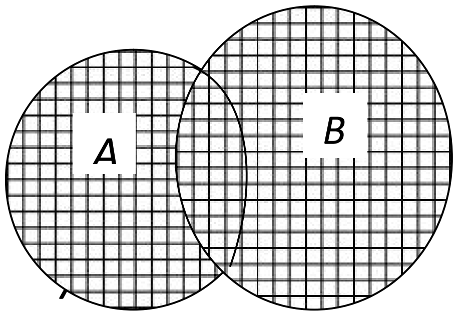

Рис. 1.2. Сумма событий

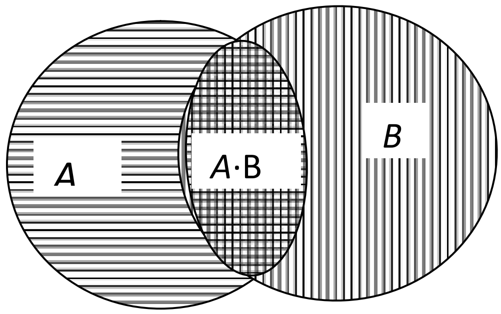

Рис. 1.3. Произведение событий

Пример 1. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу в мишень.

а) Какое событие противоположно событию A – “хотя бы один стрелок попал в цель”?

б) Какое событие противоположно событию C – “каждый из стрелков попал в цель”?

Решение.

а) $\overline{A}$ – “каждый из стрелков промахнулся”. Справедливость ответа вытекает из того, что событие A – означает поражение мишени, а событие $\overline{A}$ – не поражение мишени.

б) $\overline{C}$ – “хотя бы один из стрелков промахнулся”.

На основании этого примера приведём формулы, справедливые в алгебре событий: $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$;

$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}$, если A_i обозначает “i - й стрелок попал в цель”, а $\overline{A_i}$ – “i - й стрелок промахнулся”.

Несовместными событиями называются два события A и B, если не существует элементарного события, благоприятствующего одновременно обоим событиям.

Например, при бросании игральной кости событие A – “выпадает количество очков, равное 1 или 2”, и событие B – “выпадает количество очков, равное 4 или 5”, несовместны.

Условной вероятностью события A относительно события B называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что имело место событие B. Эта вероятность обозначается $P = (A / B)$ или $P_A(B)$.

Например, в урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из урны последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется чёрным при условии, что первый был чёрным.

Обозначим события: B – “первый шар чёрный”; A – “второй – чёрный”. Если произошло событие B, то в урне осталось 6 шаров, из которых два чёрных. Поэтому искомая условная вероятность $P(A/B)=2/6=\frac{1}{3}$.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого относительно первого:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B). \tag{1.15}$$

Для нескольких событий

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}). \tag{1.16}$$

События A или B называются *независимыми,* если

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

В этом случае

$$P(A)=P(A/B),\ \ P(B)=P(B/A). \tag{1.17}$$

Верно и обратное утверждение.

События $A_1,A_2,\ldots,A_n$ называются независимыми в совокупности, если

$$P(\prod_{l=1}^{n}A_i)=\prod_{l=1}^{n}P(A_i). \tag{1.18}$$

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.19}$$

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(\sum_{l=1}^{n}A_i)=\sum_{l=1}^{n}P(A_i). \tag{1.20}$$

Если события A и B совместны, вероятность их суммы вычисляется по формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{1.21}$$

Для нескольких совместных событий вероятность их суммы определяется по формуле

$$P(\sum_{l=1}^{n}A_i)=\sum_{i}P(A_i)-\sum_{i\prec j}P(A_iA_j)+\sum_{i\prec j\prec k}P(A_iA_jA_k)-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n), \tag{1.22}$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов $i, j, k, ...,$ взятых по одному, по два, по три и т. д.

Задача 1. На заводе в цехе деталь определённого сорта изготовляют на двух станках. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность изготовления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годную деталь изготовили на первом станке.

Решение. Обозначим события: *A* – “деталь изготовлена на первом станке”, *B* – “деталь годная”. Имеем $P(A) = 0{,}6$, $P(B / A) = 0{,}8$.

По формуле (1.15) находим

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48 .$$

Задача 2. В ящике находится 7 деталей первого сорта, 5 – второго сорта и 3 – третьего сорта. Из ящика последовательно вынимают три детали. Найти вероятность того, что первая, наугад вынутая деталь окажется первого сорта (событие A_1), вторая деталь – второго сорта (событие A_2) и третья деталь – третьего сорта (событие A_3).

Решение. Очевидно, что: $P(A_1) = \dfrac{7}{15}$; $P(A_2 / A_1) = \dfrac{5}{14}$; т$P(A_3 / A_1 \cdot A_2) = \dfrac{3}{13}$, т. к. событие A_2 / A_1 означает, что второй раз вынули деталь второго сорта при условии, что первый раз была вынута деталь первого сорта. Значит, при повторном вытягивании в ящике осталось 14 деталей, из них второго сорта – 5. Аналогично находим $P(A_3 / A_1 \cdot A_2)$ по формуле (1.16).

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{26} .$$

Задача 3. В ящике имеется 90 стандартных деталей и 10 нестандартных. Из ящика наугад берут одну за другой две детали. “Появление стандартной детали при первом испытании” – событие *A*, “появление стандартной детали при втором испытании” – событие *B*. Проверить, зависимы или независимы события *A* и *B*.

Решение. $P(A) = \dfrac{90}{100} = 0{,}9$. Вероятность события *B* зависит от результата первого испытания: если в первом испытании событие *A* произошло, то

$$P(B / A) = \frac{90 - 1}{100 - 1} = \frac{89}{99};$$

если же событие A не произошло, то

$$P(B/\overline{A}) = \frac{90}{100-1} = \frac{10}{11}.$$

События A и B зависимы, т. к.

$$P(A) = 0{,}9 \neq \frac{89}{99} = P(B/A).$$

Задача 4. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение. Обозначим события: A – “выпадает 6 очков при бросании первой игральной кости”, B – “выпадает 6 очков при бросании второй игральной кости”. Так как события A и B совместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, т. к. события независимы. Так как $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{6}$, поэтому $P(A+B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

Задача 5. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме (рис. 1.4). Выход из строя элемента a – событие A, элемента b_k – событие $B_k \left(k = 1,\ 2,\ 3\right)$. Записать выражение для событий C и $\overline{C}$, если C означает разрыв цепи.

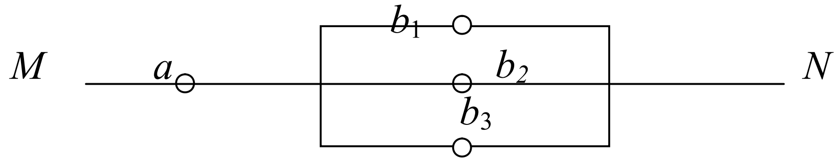

Рис. 1.4. Схема электрической цепи

Решение. Разрыв цепи произойдет в том случае, если выйдет из строя элемент a или все три элемента $b_k \left(k = 1,\ 2,\ 3\right)$. Эти события соответственно равны A и $B_1B_2B_3$. Поэтому $C = A + B_1B_2B_3$.

Разрыв цепи не произойдет, если не выйдет из строя элемент a и хотя бы один из элементов $b_k \left(k = 1,\ 2,\ 3\right)$. Эти события соответственно равны $\overline{A}$ и $\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \overline{B}_3$. Следовательно, $C = \overline{A} \cdot \left(\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \overline{B}_3\right)$.

Задача 6. Шарик бросают на стол и отмечают точку его падения. Пусть A обозначает событие, заключающееся в попадании шарика внутрь круга A, а B – попадание внутрь круга B (рис. 1.5).

Какой смысл имеют события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A+B$, $\overline{A+B}$, $\overline{A \cdot B}$

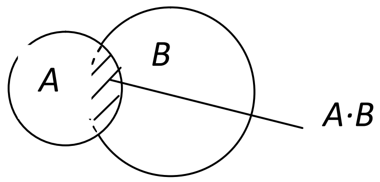

Рис. 1.5. Графическое изображение условия задачи

Решение. Если A – попадание шарика внутрь круга А, то противоположное событие $\overline{A}$ означает, что шарик попал в область, лежащую вне круга A. Аналогично, $\overline{B}$ – попадание шарика в область, лежащую вне круга B. Событие $A+B$ означает, что шарик попал в область, в которую входят все точки кругов A и B. Событие $\overline{A+B}$ – противоположное к $A+B$, следовательно, шарик попал в область вне обоих кругов A и B, $A \cdot B$ – попадание шарика в общую часть кругов A и B. Соответственно $\overline{A \cdot B}$ – шарик попал в область, лежащую вне общей части кругов A и B. Событие $\overline{A} \cdot \overline{B}$ совпадает с $\overline{A+B}$.

Задачи для решения в аудитории

1. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i – попадание при i-м выстреле $(i=1,\ 2,\ 3)$. Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события:

A – все три попадания;
B – все три промаха;
C – хотя бы одно попадание;
Д – хотя бы один промах;
E – не менее двух попаданий;
F – не больше одного попадания;
G – попадание в мишень не раньше чем при третьем выстреле.

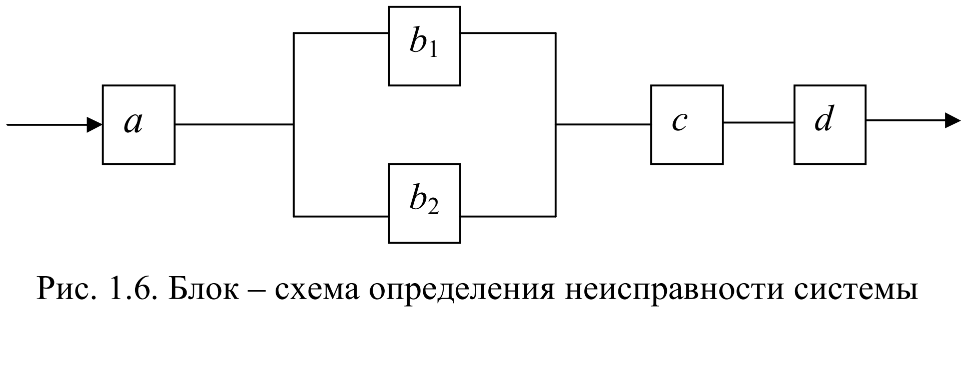

Рис. 1.6. Блок – схема определения неисправности системы

2. Записать событие, состоящее в том, что система исправна (дублирующие блоки обозначены одинаковыми буквами), система неисправна (рис. 1.6).

3. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

4. В урне 10 белых и 20 черных шаров. Из 10 белых – 6 штрихованных, из 20 черных – 5 штрихованных. Рассматриваются события:

A – извлечение из урны белого шара;

B – извлечение из урны штрихованного шара.

Определить, зависимы или независимы события *A* и *B*.

5. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

6. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор срабатывает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор. Найти вероятность того, что сработает хотя бы один сигнализатор.

7. Дана система *S* (рис. 1.7). Блоки, обозначенные одинаковыми буквами, одинаковы; все блоки независимы. Вычислить надежность системы (вероятность безотказной работы в течение определенного времени), если известны надежность блоков: $P(a_i) = 0{,}8;\ \ P(b_i) = 0{,}9$.

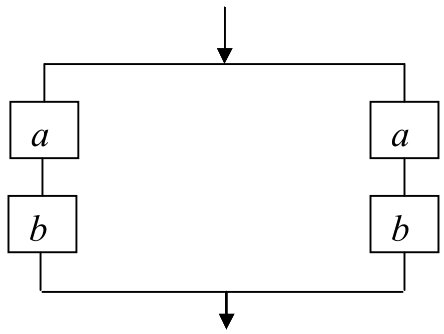

Рис. 1.7. Блок - схема определения надежности системы

8. На шести карточках написаны буквы *к*, *а*, *р*, *е*, *т*, *а*. После тщательного перемешивания берут наудачу по одной карточке и кла-

дут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ракета»?

9. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

10. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: A – шары одного цвета; B – шары разных цветов?

11. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

12. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

А – появление герба на первой монете;

В – появление цифры на первой монете;

С – появление герба на второй монете;

Д – появление цифры на второй монете;

Е – появление хотя бы одного герба;

F – появление хотя бы одной цифры;

G – появление одного герба и одной цифры;

Н – непоявление ни одного герба;

К – появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A+C$; 2) $A \cdot C$; 3) $E \cdot F$; 4) $G+E$; 5) $G \cdot E$; 6) $B \cdot Д$; 7) $E+K$.

13. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятности поражения мишени для каждого из орудий соответственно равны 0,85 и 0,91. Найти вероятность поражения цели, т. е. вероятность хотя бы одного попадания.

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найти вероятность поражения цели.

15. Какова вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным, если известно, что 3% всей продукции составляют нестандартные изделия, а 75% стандартных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта?

16. На 20 одинаковых жетонах написаны 20 двузначных чисел: от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 4 или 7?

17. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

18. Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках.

19. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха.

Ответы

1. $A = A_1 A_2 A_3$; $B = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$; $C = A_1 + A_2 + A_3$, или $C = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$, или $C = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 +$ $A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$; $Д = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$;
$E = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3 = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2$;
$F = \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2$; $G = \overline{A}_1 \overline{A}_2$.

2. $S = A(B_1 + B_2)CД$; $\overline{S} = \overline{A}_1 + \overline{B}_1 \overline{B}_2 + \overline{C} + \overline{Д}$. **3.** $P = \dfrac{11}{26}$. **4.** A и B – зависимые события. **5.** $P = 0{,}251$. **6.** а) $P = 0{,}14$; б) $P = 0{,}995$.
7. $P = 0{,}92$. **8.** $P = 0{,}0028$. **9.** $P = 0{,}692$. **10.** $P(B) > P(A)$.
11. $P = 0{,}0014$. **13.** $P = 0{,}9865$. **14.** $P = 0{,}8926$. **15.** $P = 0{,}73$.
16. $P = 0{,}35$. **17.** $P = 0{,}7$. **18.** а) $P = 0{,}188$; б) $P = 0{,}452$; в) $P = 0{,}336$.
19. $n \geq 5$.

§4. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную систему попарно несовместных событий (рис.1.8).

Тогда вероятность события A вычисляется по формуле *полной вероятности*:

$$P(A)=\sum_{l=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i). \qquad (1.23)$$

Действительно, так как событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную систему, то $A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n$.Из рис.1.8 видно, что $AH_1, AH_2, ..., AH_n$ попарно несовместны. Поэтому $P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n)$. Применив правило умножения вероятностей к каждому слагаемому равенства $P(AH_i) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)$, получим формулу (1.10).

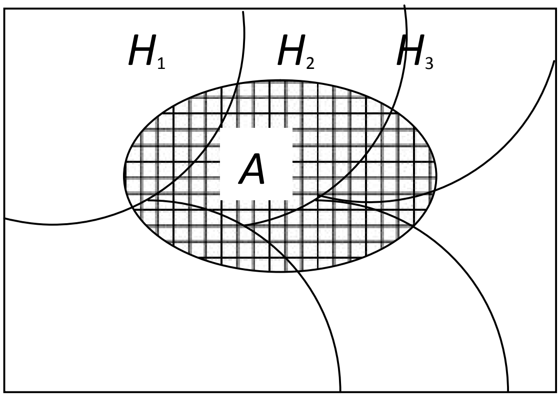

Рис. 1.8. Вероятность события *A*

В тесной связи с формулой полной вероятности находится так называемая *формула Байеса*:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(H)P(A/H_1)+...+P(H_n)P(A/H_n)}, \qquad (1.24)$$

где $P(H_i/A)$ – вероятность гипотезы H_i после того, как имело место событие A.

Формула Байеса позволяет переоценить вероятность гипотез, принятых до испытания, по результатам уже произведённого испытания.

Задача 1. Слепой старец вышел из пункта *A* в пункт *B*. Считая, что в каждом из пунктов *A*, *B*, *C*, *Д*, *E* дорога выбирается наудачу, найти вероятность того, что он дойдёт до пункта *B* (рис.1.9).

Решение. Пусть *A* – событие, заключающееся в том, что старец дойдёт до пункта *B*. В качестве гипотез примем события:

H_1 – “старец пошёл по дороге 1”;

H_2 – “старец пошёл по дороге 2”;

H_3 – “старец пошёл по дороге 3”.

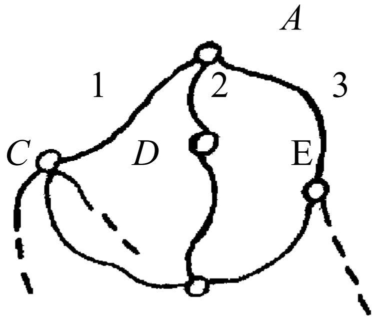

Рис. 1.9. Схема дорог

Так как в пункте A дорога выбирается наудачу, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3)$.

Далее, $P(A/H_1)$ – вероятность того, что старец дойдёт до B, если он пошёл по дороге 1, равна $\frac{1}{3}$, так как из пункта C в пункт B ведут три дороги. Аналогично рассуждая, получим $P(A/H_2) = 1$, $P(A/H_3) = 1/2$.

По формуле (1.23) имеем

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}611.$$

Задача 2. По цели произведено три последовательных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле $p_1 = 0{,}5$, при втором – $p_2 = 0{,}6$, при третьем – $p_3 = 0{,}8$. При одном попадании вероятность поражения цели равна 0,4, при двух – 0,7, при трёх – 1,0. Найти вероятность поражения цели при трёх выстрелах.

Решение. Обозначим события:

A – “поражение цели при трёх выстрелах”;

H_1 – “одно попадание”;

H_2 – “два попадания”;

H_3 – “три попадания”;

H_4 – “ни одного попадания”.

Из условия задачи имеем

$$P(A/H_1) = 0{,}4,\ P(A/H_2) = 0{,}7,\ P(A/H_3) = 1,\ P(A/H_4) = 0.$$

Если p_1, p_2, p_3 соответственно вероятности попадания при первом, втором, третьем выстрелах, то $1-p_1$, $1-p_2$, $1-p_3$ соответственно вероятности при тех же выстрелах.

Следовательно,

$$P(H_1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + p_2(1-p_1)(1-p_3) + p_3(1-p_1)(1-p_2) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}26,$$

так как попадание могло произойти либо при первом выстреле, либо при втором, либо при третьем.

Аналогично:

$$P(H_2) = p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 p_3 (1 - p_2) + p_2 p_3 (1 - p_1) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}46;$$

$$P(H_3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}24,$$

т.к. имели место три выстрела и все три попадания.

$$P(H_4) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}04,$$

т.к. имели место три выстрела и все три промаха. Очевидно, что

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 0{,}26 + 0{,}46 + 0{,}24 + 0{,}04.$$

Подставим полученные значения в формулу (1.10):

$$P(A) = 0{,}26 \cdot 0{,}4 + 0{,}46 \cdot 0{,}7 + 0{,}24 \cdot 1 + 0{,}04 \cdot 0 = 0{,}666.$$

Задача 3 (поучительная). Студент идёт на экзамен, зная 10 билетов из 25. В каком случае вероятность вытащить “счастливый” билет больше, если он берёт билет первым или вторым?

Решение. Если студент идёт первым, то вероятность вытащить “счастливый” билет, очевидно, равна $10/25 = 0{,}4$.

Предположим теперь, что он берёт билет вторым. Введём гипотезы:

H_1 – вошедший первым вытащил “счастливый” (для второго) билет;

H_2 – вошедший первым вытащил “несчастливый” (для второго) билет. Тогда

$$P(H_1) = 10/25 = 0{,}4; P(H_2) = 15/25 = 0{,}6; P(H_1) + P(H_2) = 0{,}4 + 0{,}6 = 1.$$

Обозначим через A событие “студент, зашедший вторым, вытащил “счастливый” для него билет”. Тогда

$$P(A/H_1) = \frac{10-1}{25-1} = \frac{9}{24} = 0{,}375.$$

Так как после того, как первый взял “счастливый” билет, из 24 оставшихся билетов “счастливых” осталось только 9.

Аналогично

$$P(A/H_2) = 10/24 = 0{,}417.$$

По формуле (1.23)

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}375 + 0{,}6 \cdot 0{,}417 \approx 0{,}4.$$

Таким образом, вероятность вытащить «счастливый» билет не зависит от того, идёт ли студент на экзамен первым или вторым.

Задача 4. Из 16 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвёл выстрел, но в мишень не попал. К какой же группе вероятнее всего принадлежит стрелок?

Решение. Здесь на результаты влияют два фактора: с одной стороны, вероятность попадания, с другой – количество стрелков в группе. Например, наибольшие шансы не попасть у стрелков третьей группы, но зато их только четверо.

Пусть событие A – "промах наудачу выбранного стрелка":

H_1 –"наудачу выбранный стрелок из первой группы";

H_2– "наудачу выбранный стрелок из второй группы";

H_3–"наудачу выбранный стрелок из третьей группы".

Тогда:

$$P(H_1)={}^5\!/_{16}=0{,}3125,\ P(H_2)={}^7\!/_{16}=0{,}4375,\ P(H)={}^7\!/_4=0{,}25;$$

$$P(A)=0{,}2\cdot 0{,}3125+0{,}3\cdot 0{,}4375+0{,}5\cdot 0{,}25=0{,}31875;$$

$$P({}^{H_1}\!/_A)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}3125}{0{,}31875}=0{,}1961;$$

$$P({}^{H_3}\!/_A)=\frac{0{,}5\cdot 0{,}25}{0{,}31875}=0{,}3922.$$

Вероятнее всего, стрелок принадлежит ко второй группе.

Задача 5. Имеется две партии деталей, причём известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии ${}^1\!/_4$ деталей недоброкачественных. Деталь, взятая из наудачу выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

Решение. Пусть событие A – "первая деталь доброкачественная".

Гипотезы:

H_1 – "взята партия, содержащая недоброкачественные детали";

H_2 – "взята партия доброкачественных деталей".

По условию задачи:

$$P(H_1)=P(H_2)={}^1\!/_2,\ P({}^A\!/_{H_1})={}^3\!/_4,\ P({}^A\!/_{H_2})=1;$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{7}{8}\approx 0{,}875.$$

После первого испытания вероятность того, что партия содержит недоброкачественные детали, равна

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{0{,}875}\approx 0{,}4286;$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{0{,}875}\approx 0{,}5714.$$

Пусть событие B состоит в том, что при втором испытании деталь оказалась недоброкачественной. Вероятность данного события также находится по формуле полной вероятности. Если P_1 и P_2 – вероятности гипотез H_1 и H_2 после испытания, то согласно предыдущим вычислениям

$$P_1=0{,}4286,\ P_2=0{,}5714.$$

Кроме того, $P(B/H_1)=1/4$, $P(B/H_2)=0$.

Поэтому искомая вероятность

$$P(B)=0{,}4286\cdot\frac{1}{4}+0{,}5714\cdot 0\approx 0{,}107.$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{0{,}875}\approx 0{,}5714.$$

Пусть событие B состоит в том, что при втором испытании деталь оказалась недоброкачественной. Вероятность данного события также находится по формуле полной вероятности. Если P_1 и P_2 – вероятности гипотез H_1 и H_2 после испытания, то согласно предыдущим вычислениям

$$P_1=0{,}4286;\ P_2=0{,}5714.$$

Кроме того, $P(B/H_1)=1/4$; $P(B/H_2)=0$.

Поэтому искомая вероятность

$$P(B)=0{,}4286\cdot\frac{1}{4}+0{,}5714\cdot 0\approx 0{,}107.$$

Задачи для решения в аудитории

1. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

2. Имеется три одинаковые по виду урны. В первой урне 15 белых шаров, во второй – 10 белых и 5 чёрных, а в третьей –15 чёрных шаров. Из выбранной наугад урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой урны.

3. В цехе на станках a, $в$, c изготовляют соответственно 25, 35 и 40% всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15, 18 и 6%. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефектна.

4. Имеются две одинаковые урны. В первой урне находится 3 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 3 белых и 7 чёрных шаров. Из одной наугад выбранной урны извлекают один шар. Определить вероятность того, что шар чёрный.

5. Станок одну треть своего времени обрабатывает деталь A и две трети – деталь B. При обработке детали A он простаивает 10% времени, а детали B – 15%. Какова вероятность застать станок простаивающим?

6. В ящике содержится 12 деталей завода 1; 20 деталей завода 2; 18 деталей завода 3. Вероятность того, что деталь завода 1 отличного качества равна 0,9; для деталей заводов 2 и 3 эти вероятности равны 0,6 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что извлечённая наудачу деталь окажется отличного качества.

7. Узоры подвески поступают на общий конвейер с двух участков. Вероятность брака с первого участка 0,05, со второго – 0,1. Второй участок имеет производительность в 2,5 раза больше, чем первый. Рабочий взял с конвейера подвеску, и она оказалась годной. Какова вероятность того, что этот узел изготовлен на первом участке?

8. Имеются две одинаковые урны. В первой урне находится 3 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 3 белых и 7 чёрных шаров. Из одной наугад выбранной урны извлекают один шар. Он оказывается чёрным. Какова вероятность того, что он извлечён из первой урны?

9. Стрельба производится по трем мишеням типа A, трём – типа B и двум – типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4, типа B – 0,1, типа C – 0,15. Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если неизвестно, в мишень какого типа будут

стрелять.

10. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалифицированную норму равна: для лыжника 0,9; велосипедиста 0,8 и для бегуна 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, названный наудачу, выполнит норму.

11. Две из трёх независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая лампы, если вероятности отказа первой, второй и третьей ламп соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3.

12. Третья часть одной из трёх партий деталей является второсортной, остальные детали – первого сорта. Определить вероятность того, что деталь была взята из партии, имеющей второсортные детали, если она оказалась первого сорта.

13. На конвейер детали поступают с двух автоматов. Производительность первого автомата втрое больше производительности второго. Вероятность изготовления годной детали первым автоматом равна 0,9, вторым – 0,7. С конвейера взята одна деталь. Найти вероятность того, что она годная.

14. Даны два блока, соединенные последовательно с точки зрения надежности, каждый из которых может работать независимо от другого в трех разных режимах. Вероятность наступления первого режима – 0,1; второго – 0,5; третьего – 0,4. Надежность работы первого блока в 1, 2, 3-м режимах равна соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Надежность работы второго блока в первом, втором, третьем режимах равна 0,9; 0,9; 0,8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

15. Три самолета – один ведущий и два ведомых – посылаются на бомбометание по объекту. Радионавигационное оборудование, без которого выход к цели невозможен, имеется только у ведущего самолета. После выхода на цель самолеты выполняют бомбометание независимо, вероятность разрушить объект для каждого из них равна 0,3. Перед выходом на цель самолеты проходят зону зенитной обороны противника, в которой каждый из них может быть сбит с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

16. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный на 16, удовлетворительно – на 10, плохо – на 5.

Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

17. 96% продукции завода имеет повышенное качество. Если упростить процесс проверки качества продукции, то 2% продукции повышенного качества не будут признаны таковыми и 5% продукции, не имеющей повышенного качества, окажутся признанными за продукцию повышенного качества. Найти вероятность того, что при такой проверке изделие, выпущенное с маркой «повышенное качество», действительно имеет повышенное качество.

18. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

19. С первого автомата на сборку поступает 20%, со второго 30%, с третьего 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

20. Из урны, содержащей 2 белых и один черный шар, перекладывают шар в урну, содержащую два черных и один белый шар. Определить вероятность извлечь черный шар из второй урны после указанного перекладывания.

21. Пусть при массовом производстве некоторого изделия вероятность того, что оно окажется стандартным, равна 0,95. Для контроля производится некоторая упрощенная проверка стандартности изделия, которая дает положительный результат в 99% случаев для стандартных изделий и в 3% случаев для нестандартных изделий. Какова вероятность того, что изделие стандартно, если оно выдержало упрощенную проверку?

22. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $4/5$, $3/4$, $2/3$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

23. Детали для сборки изготовляют на двух станках, из которых первый производит деталей в три раза больше второго, при этом брак составляет в выпуске первого станка 2,5%, а в выпуске второго – 1,5%. Взятая наудачу сборщиком деталь оказалась годной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

Ответы

1. $P = 0{,}7(2)$. **2.** $P = 0{,}6$. **3.** $P = 0{,}12$. **4.** $P = 0{,}6625$. **5.** $P = 0{,}13(3)$. **6.** $P = 0{,}78$. **7.** $P = 0{,}16(6)$. **8.** $P = 0{,}4717$. **9.** $P = 0{,}225$. **10.** $P = 0{,}86$. **11.** $P = 0{,}18(18)$. **12.** $P = 0{,}25$. **13.** $P = 0{,}85$. **14.** $P = 0{,}6622$. **15.** $P = 0{,}476$. **16.** а) $P = 0{,}58$; б) $P = 0{,}002$. **17.** $P = 0{,}998$. **16.** $P = 0{,}214$. **19.** $P = 0{,}0018$. **20.** $P = 0{,}58$. **21.** $P = 0{,}998$. **22.** $P = 0{,}46$. **23.** $P = 0{,}16(6)$.

§5. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли). Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

1. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли)

Испытания называются *независимыми* относительно события A, если вероятность появления события A в каждом из этих испытаний не зависит от результата, полученного в других испытаниях.

Пусть эксперимент состоит в проведении n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (назовем его “успехом”, тогда $\overline{A}$ соответственно “неуспех”). Вероятность неуспеха равна $q = 1 - p$. Рассмотрим общий случай в рамках схемы Бернулли – нахождение вероятности того, что в n испытаниях произойдёт ровно k успехов $(k \leq n)$. Обозначим эту вероятность $P_n(\kappa)$. Событию B (произошло κ успехов в n испытаниях) благоприятствуют те элементарные события, в которые входит k множителей A и $n - k$ множителей $\overline{A}$; вероятности событий равны $p^{\kappa} \cdot q^{n-\kappa}$, а их число, как нетрудно видеть, равно числу способов, сколькими можно выбрать κ элементов из n без учёта порядка, т. е. C_n^{κ}. Согласно определению вероятности

$$P_n(\kappa) = P(B) = p^{\kappa} \cdot q^{n-\kappa} + p^{\kappa} \cdot q^{n-\kappa} + \ldots + p^{\kappa} \cdot q^{n-\kappa} = C_n^{\kappa} p^{\kappa} q^{n-\kappa}, \quad (1.25)$$

где $q = 1 - p$.

Формулу (1.25) называют *формулой Бернулли* [5].

Наивероятнейшее число появлений события A в n независимых испытаниях $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

2. Локальная теорема Муавра – Лапласа

Пусть в схеме Бернулли $p \neq 0;1$, тогда $\frac{\sqrt{npq}}{\varphi(x)} P_n(\kappa) \to 1$ при $n \to \infty$, где $x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Следовательно, при больших n

$$P_n(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x). \qquad (1.26)$$

Для значений функции $\varphi(x)$ составлено прил. 1.

3. Интегральная теорема Муавра – Лапласа

Пусть в схеме Бернулли κ - число успехов в n испытаниях и $P_n(\kappa_1;\kappa_2) = P_n(\kappa_1 < \kappa < \kappa_2)$.

Тогда при больших n

$$P_n(\kappa_1;\kappa_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx,$$

где $x_1 = \frac{\kappa_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{\kappa_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Если обозначить $\varPhi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx$, то получаем формулу для вычислений

$$P_n(\kappa_1 < k < \kappa_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{\frac{-x^2}{2}} dx == \varPhi\left(\frac{\kappa_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \varPhi\left(\frac{\kappa_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Следовательно,

$$P_n(\kappa_1 < k < \kappa_2) = \varPhi\left(\frac{\kappa_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \varPhi\left(\frac{\kappa_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (1.27)$$

Для значений функции $\varPhi(x)$, соответствующих значениям аргумента $x \in [0;5]$, имеется прил. 2. Для отрицательных x значения $\varPhi(x)$ можно получить, воспользовавшись нечётностью

($\Phi(-x) = -\Phi(x)$) этой функции, а при $x > 5$ можно считать $\Phi(x) = 0{,}5$, т. к. $\Phi(5) = 0{,}499997$; $\Phi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0{,}5$ и $\Phi(x)$ – функция возрастающая.

4. Теорема Пуассона

Если n достаточно велико, а p мало, то

$$P_n(\kappa) = \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda}, \tag{1.28}$$

где $\lambda = np$.

В заключение соберём все результаты относительно $P_n(\kappa)$ в следующую схему (рис. 1.10).

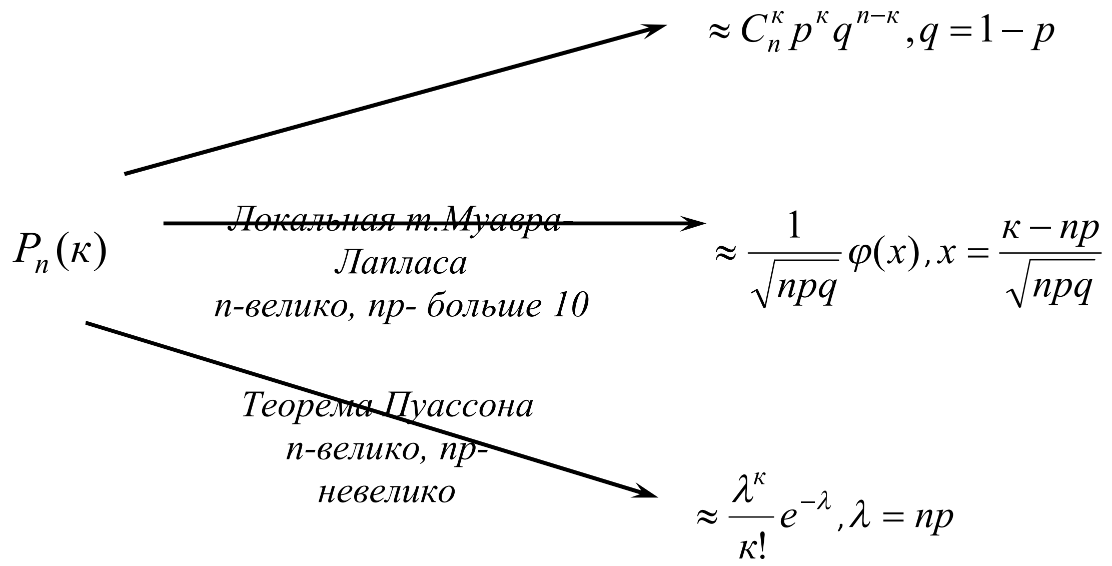

Рис. 1.10. Иллюстрация схемы Бернулли

Задача 1. В урне 20 шаров: 15 белых и 5 чёрных. Вынули подряд 5 шаров, причём каждый вынутый шар возвращали в урну, и перед извлечением следующего шары в урне тщательно перемешивались. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет два белых.

Решение. Вероятность появления белого шара в каждом испытании $p = 15/20$, а вероятность непоявления белого шара $q = 1 - p = 1/4$. По формуле Бернулли (1.25) находим

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \frac{3^2}{4^4} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 23} \cdot \frac{3^2}{4^4} = \frac{45}{512}.$$

Задача 2. Найти вероятность того, что из 100 независимых выстрелов будет 75 попаданий, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

Решение. Очевидно, мы находимся в рамках схемы Бернулли:

$n = 100$; $к = 75$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; n – достаточно велико, воспользуемся формулой (1.26)

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2} = 4,\ x = \frac{к - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100\cdot 0{,}8}{4} = -1{,}25.$$

По прил. 1 находим $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$, тогда

$$P_{100}(75) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}1826 \approx 0{,}0456.$$

Задача 3. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

Решение. Для того, чтобы частота лежала в пределах от 0,2 до 0,4 в серии из 100 опытов, число появлений события m должно быть не менее 20 и не более 40 $(20 < m < 40)$.

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра – Лапласа, формулой (1.27)

$$P(20 \le m \le 40) = \Phi\left(\frac{40 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right),$$

где $n = 100$, $p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$.

Следовательно,

$$\Phi\left(\frac{40 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right) = \Phi\left(\frac{40 - 30}{\sqrt{100\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7}}\right) = \Phi(2{,}18) = 0{,}4854,$$

где значение $\Phi(2{,}18)$ найдено по прил. 2.

$$\Phi(\frac{20 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}) = \Phi(\frac{20 - 30}{\sqrt{100\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7}}) = \Phi(-2{,}18) = -\Phi(2{,}18) = -0{,}4854.$$

Следовательно,

$$P(20 \le m \le 40) = 0{,}4854 + 0{,}4854 = 0{,}97\,.$$

Задача 4. Аппаратура содержит 2000 элементов, вероятность отказа каждой из них p = 0,0005. Какова вероятность отказа трех элементов, если отказы происходят независимо друг от друга?

Решение. p – мало. Воспользуемся теоремой Пуассона

$$\lambda = 2000 \cdot 0{,}0005 = 1;\; P_{2000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{1}{2\cdot 3}e^{-1} \approx 0{,}06\,.$$

Задача 5. Испытанию подвергается партия транзисторов. Вероятность безотказной работы каждого транзистора равна 0,92. Определить, какое число транзисторов следует испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,95 можно было зафиксировать хотя бы один отказ.

Решение. Обозначим количество испытуемых транзисторов через n. Тогда вероятность их безотказной работы равна $0{,}92^n$. События “все транзисторы работают безотказно” и “хотя бы один транзистор не работает” образуют полную группу событий. Значит, вероятность события “хотя бы один отказ” равна $1 - 0{,}92^n$. По условию задачи эта величина больше 0,95, т.е.

$$1 - 0.92^n \ge 0{,}95;\; -0{,}92^n \ge -0{,}5; 0{,}92^n \le 0{,}5;\; \ln 0{,}92^n \ge \ln 0{,}5;\; n\ln 0{,}92 \ge \ln 0{,}5;$$

$$n \ge \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}92} \approx 35{,}9.$$

Следовательно, $n \ge 36$.

В заключение рассмотрим задачу, иллюстрирующую все три формулы.

Задача 6. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из них за промежуток времени t равна 0,005. Найти наиболее вероятное число обрывов и его вероятность.

Решение. Наиболее вероятное число обрывов будет λ=np=4. Точное значение вероятности четырех обрывов равно [см. формулу (1.25)]

$$P_{800}(4) = C_{800}^4 \cdot 0{,}005^4 \cdot (0{,}995)^{796} = 0{,}1945\,.$$

Пользуясь формулой Пуассона с $\lambda = np = 4$, получаем [см. формулу (1.28)]

$$P_{800}(4) \approx \frac{4^4}{4!}\cdot e^{-4} = \frac{256}{24}\cdot 0{,}0183 = 0{,}1954\,.$$

Вычисление по точной формуле дает 0,1945, так что ошибка при пользовании формулой Пуассона составляет 0,0009. Локальная предельная теорема Муавра – Лапласа дает для данного случая [см. формулу (1.26)]

$$P_{800}(4) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 800 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0{,}2000,$$

ибо здесь $x = \dfrac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{4 - 800 \cdot 0{,}005}{\sqrt{800 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = 0$; $e^0=1$, так что ошибка составляет уже 0,0055, т. е. в шесть раз больше, чем при использовании формулы Пуассона, т. к. np=4<10.

Задача 7. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение. Так как противники равносильны, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и равны $P = q = 1/2$.

а) Вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_{4;3} = C_4^3 (1/2)^3 \cdot 1/2 = 1/4.$$

Вероятность выиграть пять партий из восьми

$$P_{8;5} = C_8^5 (1/2)^5 \cdot (1/2)^3 = 7/32.$$

Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех

$$R_{4;3} = P_{4;3} + P_{4;4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

а вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$R_{8;5} = P_{8;5} + P_{8;6} + P_{8;7} + P_{8;8} == C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8 =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^8 (56 + 28 + 8 + 1) = \frac{93}{256}.$$

Так как $\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$, вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Задача 8. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 0 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 33 встретится: а) три раза; б) четыре раза.

Решение. Вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число равно 33, равна $P = 0{,}01$, поскольку выбирается одно из 100 возможных. Число испытаний $n = 200$. Так как число n велико, а вероятность P мала, воспользуемся формулой Пуассона (1.28)

$$P_{n;m} = \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$.

а) $P_{200;3} = \dfrac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}18$; б) $P_{200;4} = \dfrac{2^4}{4!} e^{-2} \approx 0{,}09$.

Задачи для решения в аудитории

1. На отрезок AB длиною a наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем x, а три точки – на расстоянии, большем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

2. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

3. Большая партия изделий содержит 1% брака. Каков должен быть объем случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

4. Во время каждого из опытов на 1 ч в цепь включается батарея мощностью в 120 или в 200 Вт, вероятности благополучного исхода опыта равны соответственно 0,06 и 0,08. Результат проведенной серии опытов считается достигнутым в случае хотя бы одного благоприятного исхода опыта с батареей в 200 Вт или хотя бы двух батарей в 120 Вт. Общая энергия, затраченная на производство всех опытов, не может превышать 1200 Вт×ч. Какие батареи выгоднее использовать?

5. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5; 0,8.

6. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших

из 855 пассажиров.

7. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение 1 часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение 1 часа позвонят 4 абонента.

8. На прядильной фабрике работница обслуживает 750 веретён. При вращении веретена пряжа рвется в случайные моменты времени из-за неравномерности натяжения, неровности и других причин. Считая, что вероятность обрыва пряжи на каждом из веретён в течение некоторого промежутка времени t равна 0,008, найти вероятность того, что за это время произойдет не более 10 обрывов.

9. По мишени в тире при одинаковых условиях произведено 200 независимых выстрелов, которые дали 116 попаданий. Определить, какое значение вероятности попадания при каждом выстреле более вероятно: $1/2$ или $2/3$, если до опыта обе гипотезы равновероятны и единственно возможны.

10. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Найти вероятность того, что позвонит 4 абонента?

11. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 000 листков число заказов будет: а) равно 48; б) заказов будет от 45 до 55.

12. Принимая одинаково вероятным рождение мальчика и рождение девочки, найти вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей: а) два мальчика; б) мальчиков больше, чем девочек.

13. Среди вырабатываемых деталей бывает в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 деталей будет 40% бракованных?

14. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп I типа или не менее двух ламп II типа. Определить вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело пять ламп, а вероятности перегорания ламп I или II типов равны соответственно 0,7 и 0,3 (выходы из строя ламп – события независимые).

15. Найти наивероятнейшее число отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положи-

тельной ошибки равна 2/3, а отрицательной – 1/3.

16. Всхожесть семян кукурузы составляет 75%. Найти вероятность того, что из 300 посаженных семян число проросших будет не менее 210, но не более 230.

17. Испытанию подвергается партия транзисторов. Вероятность безотказной работы каждого транзистора равна 0,92. Определить, какое число транзисторов следует испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,96 можно было зафиксировать хотя бы один отказ.

18. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

19. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти наивероятнейшее число бракованных деталей среди 1000 деталей и вероятность такого количества их в партии.

20. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

21. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

Ответы

1. $P_{5,2} = C_5^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{a-x}{a}\right)^3$. **2.** а) $P = 0{,}321$; б) $P = 0{,}244$. **3.** $n \geq 298$.
4. 200 Вт ($P_{6,1} = 0{,}394$; $P_{10;2} = 0{,}117$). **5.** $P = 0{,}2816$. **6.** $m_0 = 17$.
7. $P = 0{,}17$. **8.** $P = 0{,}94255$. **9.** Вероятное значение 1/2. **10.** $P = 0{,}09$.
11. а) $P = 0{,}054$; б) $P = 0{,}522$. **12.** а) $P = 0{,}3125$; б) $P = 0{,}5$.
13. $P = 0{,}014$. **14.** $P = 0{,}04$. **15.** $\mu_+ = 3$; $\mu_- = 1$; $P = \frac{32}{11}$. **16.** $P = 0{,}7258$.
17. $n \geq 36$. **18.** $P = 0{,}64$. **19.** $m_0 = 8$, $P_{1000,8} = 0{,}139$. **20.** $P = 0{,}0782$.
21. $P = 0{,}9595$.

§6. Случайные величины. Законы распределения случайных величин. Числовые характеристики

Пример 1. Бросают две правильные однородные монеты. Сколько из них выпадет гербом кверху?

При подбрасывании двух монет пространство элементарных

событий имеет вид $\Omega = \{ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ\}$,
где *Ц* – цифра; *Г* – герб. Первый символ показывает, как выпала первая монета, а второй – вторая монета. Так как монеты правильные и однородные, то можно считать, что все элементарные события пространства Ω равновероятны, и тогда вероятность p каждого из них равна 1/4. Обозначим через X число монет, выпавших гербом кверху, и составим таблицу (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Ω	*ЦЦ*	*ЦГ*	*ГЦ*	*ГГ*
X	0	1	1	2
P	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

Так как элементарным событиям *ЦТ* и *ГЦ* соответствует одно и то же значение величины *X,* равное 1, то можно таблицу переписать в виде (табл. 1.2).

Таблица 1.2

X	0	1	2
P	$1/4$	$2 \cdot 1/4$	$1/4$

Итак, каждое значение величины X – есть число, определяемое исходом опыта и зависящее от случая. Величина X называется ***случайной величиной,*** если в результате опыта принимает с определённой вероятностью то или иное значение, зависящее от исхода опыта.

Случайная величина называется непрерывной, если её возможные значения непрерывно заполняют какой-либо интервал или интервалы.

Например, расстояние между центром мишени и точкой попадания; множество значений $[0, \ell]$, где ℓ – максимальное отклонение точки попадания от центра мишени, есть непрерывная случайная величина.

Случайная величина называется дискретной, если её возможные значения можно пронумеровать. Случайная величина в примере 1 является дискретной.

Случайная величина X может быть задана:

1) рядом распределения (дискретная случайная величина);

2) функцией распределения (дискретная и непрерывная случайные величины);

3) плотностью распределения (непрерывная случайная величина).

Рядом распределения дискретной случайной величины называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $P_i = P(x = x_i)$. Вероятности P_i удовлетворяют условию $\sum\limits_{l=1}^{n} P_i = 1$, число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

Бессодержательно говорить о вероятности появления данного конкретного значения непрерывной случайной величины. Имеет смысл рассматривать и изучать вероятности $P(\alpha \le x \le \beta)$ того, что значение непрерывной случайной величины X попадает в заданный интервал$[\alpha, \beta]$. Введём *функцию распределения* $F(x)$ случайной величины:

$$F(x) = P(-\infty \prec x \prec X) \text{ или } F(x) = P(x \prec X). \qquad (1.29)$$

Укажем некоторые *свойства функции распределения:*

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1, \ \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

4) $P(\alpha \le x \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Случайная величина X называется непрерывной, если её функция распределения $F(x)$ непрерывно дифференцируема, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется функция

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения и функция распределения связаны соотношением

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (1.30)$$

Плотность распределения обладает свойствами:

1) $f(x) \ge 0$;

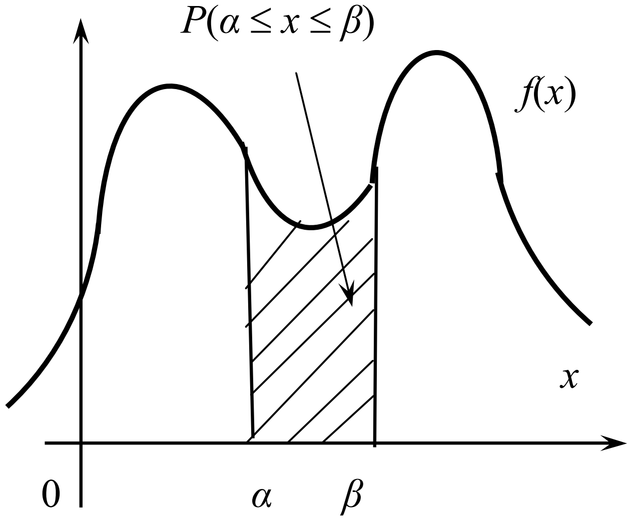

Рис. 1.11. График функции плотности распределения

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (аналогично для дискретной случайной величины $\sum\limits_{l=1}^{n} P_i = 1$);

3) $P(\alpha \le x \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (аналогично для дискретной случайной величины $P(x = x_i) = P_i$).

Геометрически свойство 3 означает, что вероятность $P(a \le x \le в)$ равна площади, заключённой между прямыми $x = \alpha,\ x = \beta, y = 0$ и кривой $y = f(x)$(рис. 1.11).

Математическим ожиданием, или средним значением случайной величины *X*, называется число

$$M(X) = \sum_{l=1}^{\infty} x_i P_i \,, \tag{1.31}$$

если X – дискретная величина, принимающая значения x_i с вероятностями

$$P_i\,(i = \overline{1, n}).$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \,, \tag{1.32}$$

если X – непрерывная величина. Предполагается, что ряд (1.31) и несобственный интеграл (1.32) абсолютно сходятся; если это не так, то говорят, что математическое ожидание не существует.

Математическое ожидание является числом, характеризующим определённое свойство случайной величины, а именно – устойчивость среднего арифметического полученных в результате испытаний значений. Другими словами, математическое ожидание – это самое наивероятнейшее значение, которое может принять случайная величина.

Нам остается только рассмотреть некоторые свойства математического ожидания.

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной величины есть сама эта величина:

$$M(C)=C.$$

Доказательство. Постоянную величину C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение с вероятностью единица. Поэтому

$$M(C) = C–1=C.$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Доказательство. Рассмотрим доказательство отдельно для дискретных и непрерывных случайных величин. Для дискретной случайной величины, пользуясь (1.31), имеем

$$M(CX) = \sum_{l=1}^{\infty} Cx_i P_i = C\sum_{l=1}^{\infty} x_i P_i = CM(X).$$

Для непрерывных случайных величин нужно воспользоваться формулой (1.32), которая дает

$$M(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CM(X).$$

Теорема 3. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

$$M(X+ Y+\ldots+Z) = M(X)+ M(Y) +\ldots +M(Z). \qquad (1.33)$$

Теорема 4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y). \qquad (1.34)$$

Не будем приводить здесь доказательств теорем 3 и 4. Итак, мы познакомились с одной из основных числовых характеристик случайной величины – математическим ожиданием, которое характеризует среднее значение случайной величины.

Однако знания только среднего значения случайной величины недостаточно для того, чтобы представить себе расположение значений случайной величины относительно ее среднего значения. Например, для случайной величины, принимающей значения + 1 и – 1 с вероятностью 0,5 каждое, как и для другой случайной величины, принимающей значения +100 и – 100 с теми же вероятностями, математическое ожидание одинаково и равно нулю. Между тем разброс этих величин относительно их общего математического ожидания совершенно различен.

Чтобы охарактеризовать отклонение случайной величины от ее среднего значения, т. е. охарактеризовать разброс значений этой величины, вводят другую ее числовую характеристику – *дисперсию*, или *рассеяние.*

Для характеристики разброса не удается использовать разность между случайной величиной и ее средним значением, хотя на первый взгляд это и кажется наиболее естественным. Дело в том, что сама эта разность есть также случайная величина. Если же взять ее математическое ожидание, то в силу свойств математического ожидания для любой случайной величины X имеем

$$M\,[X - M\,(X)] = M\,(X) - M\,[M\,(X)] = 0,$$

так что такая характеристика оказывается бесполезной.

Чтобы этого избежать, рассматривают не сами отклонения от среднего, а их квадраты, которые все неотрицательны, и в качестве характеристики рассеяния принимают среднее значение квадрата отклонения.

Таким образом, другой характеристикой случайной величины является дисперсия – среднее значение квадрата отклонения значений от её математического ожидания.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания.

$$D(X) = M(x - M(X))^2. \qquad (1.35)$$

Обозначив для краткости $M(X) = \bar{x}$, можем вместо (1.35) написать

$$D(X) = M(X - \bar{x})^2.$$

Если случайная величина X дискретна и принимает значения x_1, $x_2,\ldots$, $x_i\ldots$ с вероятностями p_1, $p_2,\ldots$. $p_i,\ldots,$ то случайная величина

$\left(X-\overline{x}\right)^2$ принимает значения $\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ с вероятностью p_i (i = 1,2,...). Поэтому для дискретной случайной величины формула для вычисления дисперсии имеет вид

$$D(X)=\sum_{l=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\,p_i\,. \quad (1.36)$$

Аналогично для непрерывной случайной величины получаем

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{x})^2\,f(x)dx\,. \quad (1.37)$$

Часто вместо обозначения $D(X)$ применяется также обозначение $\sigma^2(X)$. Величину $\sigma=\sqrt{D(x)}$ называют *средним квадратическим отклонением или стандартом.*

Пример 2. Число очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух стрелков, подчиняется законам распределения, приведенным в табл. 1.3 и 1.4.

Таблица 1.3

Стрелок 1			
x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

Таблица 1.4

Стрелок 2			
x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание числа очков при отдельном выстреле для каждого стрелка. Для первого стрелка имеем

$$M\,(X_1) = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}5 = 2{,}2.$$

Для второго стрелка

$$M\,(X_2) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}6 + 3\cdot 0{,}3 = 2{,}2.$$

Таким образом, математическое ожидание числа очков для обоих стрелков одинаково. Определим теперь дисперсию случайных величин X_1 и X_2. Для первого стрелка

$$D\,(X_1) = (1-2{,}2)^2\cdot 0{,}3 + (2-2{,}2)^2\cdot 0{,}2 + (3–2{,}2)^2\cdot 0{,}5 = 0{,}76.$$

Для второго стрелка

$$D\,(X_2) = (1-2{,}2)^2\cdot 0{,}1 + (2-2{,}2)^2\cdot 0{,}6 +(3–2{,}2)^3\cdot 0{,}3 =0{,}36.$$

Следовательно, при одинаковом среднем для числа очков, выбиваемых обоими стрелками, рассеяние результатов у первого превышает рассеяние у второго. Таким образом, у второго стрелка большая кучность, т. е. результаты его стрельбы более устойчивы.

Можно заметить, что *чем меньше дисперсия, тем лучше значения случайной величины характеризуются ее математическим* *ожиданием.*

Пользуясь свойствами математического ожидания, можно получить другое выражение для вычисления дисперсии, более удобное, чем (1.35). Для этого преобразуем выражение (1.35) следующим образом:

$$D(X) = M[X — M(X)]^2 = M[X^2 — 2XM(X) + (M(X)^2].$$

В силу теоремы 3 последнее выражение можно представить в виде суммы математических ожиданий. Заметим еще, что $M(X)$ есть постоянная величина и ее математическое ожидание, по теореме 1, равно ей самой. Поэтому мы получаем

$$D(X) = M(X^2) – 2M(X)M(X) + (M(X))^2,$$

или, окончательно,

$$D(X)=M(X^2)–(M(X))^2. \qquad (1.38)$$

Таким образом, *дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.*

Рассмотрим теперь некоторые свойства дисперсии.

Теорема 5. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(\mathrm{C})= 0.$$

Действительно,

$$D(C)=M(C—M(C))= M(C—C)= 0.$$

Этого следовало ожидать, ибо математическое ожидание постоянной равно ей самой и никакого рассеяния значений в этом случае не может быть.

Теорема 6. Постоянный множитель можно выносить из-под знака дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X). \qquad (1.39)$$

Доказательство. Из формулы (1.25) следует:

$$D(CX) = M(C^2X^2) – (M(CX))^2 = C^2[M(X^2) — (M(X))^2].$$

Таким образом,

$$D(CX)=C^2D(X),$$

что и утверждалось.

Теорема 7. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y). \qquad (1.40)$$

Доказательство. Пользуясь формулой (1.25), напишем

$$D(X+Y) = M(X+Y)^2 – (M(X+Y))^2.$$

Раскрыв скобки в правой части и пользуясь теоремами 3 и 4 о математическом ожидании, получаем

$$D(\text{Y}+Y) = M\,(X^2 + 2XY + Y^2) - [M(X) + M(Y)]^2 =$$
$$=M(X^2)+2M(X)M(Y)^{+}M(Y^2)-(M(X))^2-2M(X)M(Y)-(M(Y))^2,$$
откуда
$$D(X+Y)=M(X^2)-(M(X))^2+M(Y)^2-(M(Y))^2 = D(X)+D(Y).$$

Заметим, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий как для независимых, так и для зависимых случайных величин. Для дисперсии суммы необходимо предположить независимость слагаемых, ибо при доказательстве приходится пользоваться как теоремой о математическом ожидании суммы, так и теоремой о математическом ожидании произведения.

Теорема 8. Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Задача 1. Случайная величина X – абсцисса наудачу выбранной на отрезке $[0;1]$ точки. Построить функцию распределения случайной величины.

Решение. Равенство $X < x$, если $0 < x \le 1$ означает, что точка попала в интервал $[0;x]$; вероятность попасть в этот интервал равна его длине, т.е. x.

Следовательно,
$F(x) = P(-\infty < X < x) = P(0 < X < x) = x$,если $0 < x \le 1$. Если $x \le 0$, то $X > x$ всегда и равенство $X < x$ невозможно, т.к. $0 < X < 1$. Если $x > 1$, то $X < x$ всегда, т.к. $0 < X < 1$.

Поэтому $F(x) = 0$, если $x \le 0$, и $F(x) = 1$, если $x > 1$.

Таким образом (рис. 1.12),

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что эта функция удовлетворяет свойствам 1-3.

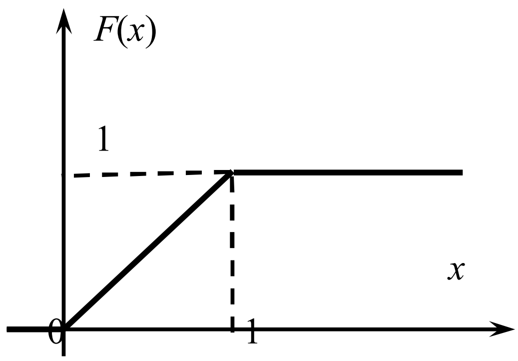

Рис. 1.12. График функции распределения

Задача 2. Пусть X – число гербов в двух независимых бросаниях монеты. X может принимать значения 0, 1, 2, причём

$P\{x=0\}=P\{x=2\}=\frac{1}{4},\ P\{x=1\}=\frac{1}{2}$
(см. пример 1).

Поэтому если $x \le 0$, то $F(x)=P(-\infty < X < x)=0$, т.к. X принимает только положительные значения: 0, 1, 2. Если $0 < x \le 1$, то

$$F(x)=P(0 < X < x)=P\{x=0\}=\frac{1}{4},$$

т.к. на этом интервале X больше только одного значения случайной величины $X=0$. Если $1 < x \le 2$, то

$$F(x)=P(X < x)=P\{(x=0)\cup(x=1)\}=P\{x=0\}+P\{x=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Так как если x принадлежит интервалу $[1;2]$, то x больше двух значений случайной величины: $x=0$ и $x=1$. Если $x>2$, то $P\{X<x\}=1$, т. к. если $x>2$, то x больше всех возможных значений случайной величины: $x=0,\ x=1,\ x=2.$

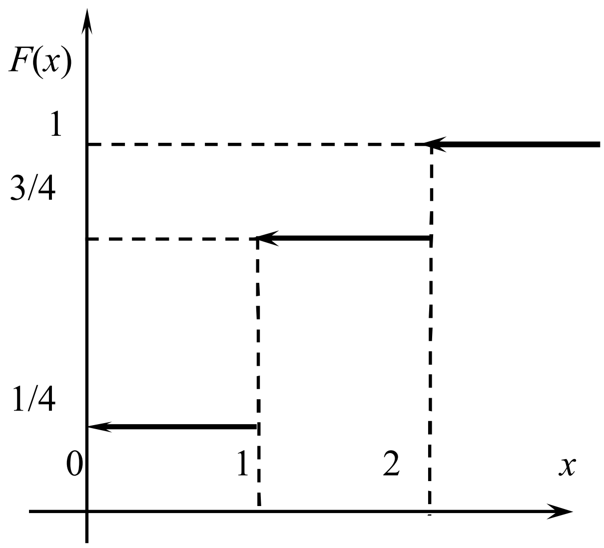

Рис. 1.13. График функции распределения

Таким образом, функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x \le 0;\\ \frac{1}{4}, \text{ если } 0 < x \le 1;\\ \frac{3}{4}, \text{ если } 1 < x \le 2;\\ 1, \text{ если } x > 2.\end{cases}$$

График этой функции приведён на рис. 1.13.

Задача 3. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, найти математическое ожидание и дисперсию, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

Решение. X – случайное число испытанных приборов, оно может принимать следующие значения:

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4,\ x_5=5.$$

Вероятности $P_i = P(X = x_i)$ того, что число испытанных приборов, соответствующих данному частному значению x_i, будут равны

$$P_1 = P(x=1) = 0{,}1;\ \ P_2 = P(x=2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1;\ \ P_3 = P(x=3) = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1;$$

$$P_4 = P(x=4) = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1;\ \ P_5 = P(x=5) = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^5 = 0{,}6591,$$

т.к. либо пятый прибор не исправен, либо все пять приборов исправны.

Таким образом, ряд распределения будет иметь вид (табл. 1.5).

Таблица 1.5

X	1	2	3	4	5
p	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6591

Нетрудно убедиться, что $\sum\limits_{l=1}^{5} p_i = 1$.

Для нахождения математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ воспользуемся формулами (1.31) и (1.38). Таким образом,

$$M(X) = \sum_{l=1}^{n} p_i x_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}081 + 4 \cdot 0{,}0729 + 5 \cdot 0{,}6521 = 4{,}0951;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}09 + 3^2 \cdot 0{,}081 + 4^2 \cdot 0{,}0729 +$$
$$+ 5^2 \cdot 0{,}6521 - (4{,}0951)^2 = 1{,}9881\,.$$

Задача 4. Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид (закон Релея)

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\ (x \ge 0)\,.$$

Определить:

а) функцию распределения;

б) математическое ожидание.

Решение.

а) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Так как $x \ge 0$, то

$$F(x) = \int_0^x \frac{x}{a^2} e^{\frac{-x^2}{2a^2}} dx = \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2a^2}} d(-\frac{x^2}{2a^2}) = 1 - e^{\frac{x^2}{2a^2}}\,.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{\frac{x^2}{2a^2}}, x\ge 0\,. \end{cases}$$

б) $M_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2}{a^2}e^{\frac{-x^2}{2a^2}}dx=a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

При вычислении воспользовались формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu\,,$$

где

$$u=x,\;\; du=dx,\;\; dv=\frac{x}{a^2}\cdot e^{\frac{-x^2}{2a^2}}dx,\; v=-e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\,.$$

Задача 5. Случайная величина X имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases}A\cos^2 x, \text{ при } |x|\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, \qquad\quad \text{при } |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент A;

б) $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. а) Так как все значения случайной величины X принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx=1,$$

то есть

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} A\cos^2 xdx=1,\; A\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=A(\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{2})\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}A=1\,, A=\frac{2}{\pi},$$

то есть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, \;\text{ при } |x|\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, \qquad\qquad \text{при } |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б) $M_x = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x\cos^2 x dx = 0$, т. к. подынтегральная функция нечётная, а её первообразная будет чётной функцией и на симметричном интервале интеграл будет равен нулю.

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x^2 \cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.$$

При вычислении воспользовались формулами

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \int\limits_a^в u dv = u \cdot v\Big|_a^в - \int\limits_a^в v du.$$

Задачи для решения в аудитории

1. В партии из 10 деталей имеются 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение стандартных деталей.

2. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -\frac{\pi}{2}; \\ A\cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Найти коэффициент A;

б) построить график плотности распределения $f(x)$;

в) найти вероятность попадания случайной величины на интервал $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; г) найти функцию распределения $F(x)$; д) найти математическое ожидание и дисперсию.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ x^2, \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 1, \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}25,\ 0{,}75)$.

4. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}3$; $P_3 = 0{,}6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

5. Случайная величина X имеет распределение (табл. 1.6).

Таблица 1.6

X	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
P	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,16	0,081	0,016

Найти:

а) $P\left(|x| \le \frac{1}{2}\right)$;

б) $P(X < 0)$;

в) $P(1 \le X \le 2)$.

6. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым 0,4. Составить закон распределения числа попаданий при двух выстрелах, найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

7. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1; \\ a + b \arcsin x, & \text{при } -1 < x < 1; \\ 1, & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

8. Точка брошена наудачу внутрь круга радиусом. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию расстояния точки до центра круга.

9. Даны две независимые случайные величины X и Y (табл.1.7 и 1.8):

Таблица 1.7

X	30	40	50
P	0,5	0,3	0,2

Таблица 1.8

$У$	10	20
P	0,2	0,8

а) Составить закон распределения случайной величины $U = X \cdot Y$;

б) составить закон распределения $Z = (X + Y)$;

в) найти $M(X + Y)$ и $D(X + Y)$, используя правило сложения дисперсий и математических ожиданий;

г) найти $M(X + Y)$ и $D(X + Y)$, составив предварительно закон распределения $Z = (X + Y)$.

10. Две независимые случайные величины заданы законами распределения (табл.1.9 и 1.10).

Таблица 1.9

X	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Таблица 1.10

$У$	0	1	3
P	0,1	0,3	0,6

Найти:

1) закон распределения случайной величины Z, равной произведению случайных величин X и $У$;

2) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z.

11. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } \ x < 1; \\ C, \text{если } \ 1 \le x < 3; \\ 0, \text{если } \ x > 3. \end{cases}$$

Требуется:

а) найти коэффициент C;

б) найти $M(X)$ и $D(X)$;

в) построить график плотности распределения;

г) найти $P(1{,}5 \le x \le 2)$.

12. В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из неё пять раз подряд извлекают шар, причём каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X – число извлечённых белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить $M(X)$ и $D(X)$.

13. Функция распределения непрерывной случайной величины

имеет вид
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{если } 0\le x\le 2;\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$ $P(1\le x\le 1{,}5)$.

Построить график плотности распределения.

14. Непрерывная случайная величина имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ C\,x, & \text{если } 0<x\le 5;\\ 0, & \text{если } x>5.\end{cases}$$

Требуется:

а) найти коэффициент C;

б) построить график плотности распределения $f(x)$;

в) найти функцию распределения $F(x)$;

г) найти $M(X)$ и $D(X)$;

д) найти $P(1\le x\le 2)$.

15. Стрелок производит по мишени четыре выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределений случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

16. Вероятность безотказной работы монитора Samsung в течение гарантийного срока равна 0,95, монитора Acer – 0,93, монитора LG – 0,8. Случайная величина X – число мониторов, проработавших гарантийный срок, среди трех мониторов разных производителей.

Найти:

а) закон распределения случайной величины X;

б) $M(X)$ и $D(X)$;

в) функцию распределения X и построить ее график.

17. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<3;\\ C(x-3)^2, & \text{при } 3\le x\le 5;\\ 1, & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Требуется найти:
а) коэффициент C;
б плотность распределения $f(x)$;
в) функцию распределения $F(x)$;
г) $M(X)$ и $D(X)$;
д) $P(3 \le x \le 4)$.

18. Дан ряд распределения случайной величины X (табл. 1.11):

Таблица 1.11

X	10	20	30	40	50
p	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найти функцию распределения вероятности этой случайной величины, $M(X)$ и $D(X)$.

Ответы

1. $M(X)=1{,}6$; $\sigma(X)=0{,}533$. **2.** а) $A=\frac{1}{2}$; в) $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$; **3.** $P=0{,}25$.
4. $M(X)$ =1,3. **5.** а) 0,738; б) 0,091; в) 0,257. **6.** $M(X)=0{,}9$; $D(X)=0{,}49$.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

7. a=0,5; b=1/π; $M(X)=0$; $D(X)=0{,}5$.

8. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } r \le 0; \\ \left(\frac{r}{R}\right)^2, & \text{при } 0 < r \le R; \\ 1, & \text{при } r > R. \end{cases}$ $M(X)=\frac{2}{3}R$, $Д(X)=\frac{R^2}{18}$.

9. в) $D(Z)=77$; г) $D(Z)=77$. **10.** $M(Z)=0{,}63$; $D(Z)=3{,}5931$.

11. а) C=0,5; б) $M(X)=2$; $D(X)=1/3$; г) $P(1{,}5 \le x \le 2)=0{,}25$.

12. $M(X)=2{,}9992$; $D(X)=1{,}2048$; $\sigma(X)=1{,}0976$. **13.** $M(X)=4/3$; $D(X)=2/9$; $P(1 \le x \le 1{,}5)=0{,}31$. **14.** а) C=0,8; б) $M(X)=10/3$; $D(X)=1{,}6$; г) $P(1 \le x \le 2)=0{,}12$. **15.** $M(X)=1{,}2$; $D(X)=0{,}84$; $\sigma(X)=0{,}9165$. **16.** $M(X)=2{,}68$; $D(X)=0{,}273$. **17.** а) C=0,25; г) $M(X)=13/2$; $D(X)=2/3$; д) $P(3 \le x \le 4)=0{,}25$.

18. $M(X)=16$; $D(X)=490$.

§7. Важнейшие примеры распределений

В настоящем параграфе приводятся наиболее часто встречающиеся типы распределений непрерывных и дискретных случайных величин и примеры их применения.

1. Биномиальное распределение

Рассмотрим серию из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p. Случайная величина X означает число наступления событий. Она дискретна и ее возможными значениями являются неотрицательные целые числа 0, 1, 2, ... , n.

Закон распределения случайной величины X задается уже известной нам формулой (см. § 5)

$$P_n(\kappa) = C_n^\kappa p^\kappa q^{n-\kappa},$$

определяющей вероятность равенства $X = \kappa$.

Математическое ожидание X равно

$$M(X) = np.$$

Дисперсия X равна

$$D(X) = npq.$$

Для биноминального распределения имеет место *неравенство Чебышева.* Если случайная величина $X = m$ имеет биноминальное распределение с математическим ожиданием $M(X) = np$ и дисперсией $D(X) = npq$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(|m - np| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2} \text{ или } P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Задача 1. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий и вычислить математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины.

Решение. Случайная величина X – число попаданий в мишень при трех выстрелах – распределена по биноминальному закону, её возможные значения 0, 1, 2, 3.

$$P(x=0) = C_3^0 p^0 q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343;$$

$$P(x=1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441;$$

$$P(x=2)=C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189;$$

$$P(x=3)=C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}3^3 = 0{,}027.$$

Ряд распределения случайной величины X приведем в табл. 1.12.

Таблица 1.12

X	0	1	2	3
p	0,343	0,441	0,189	0,027

2. Нормальный закон распределения

Среди законов распределения, которым подчиняются встречающиеся на практике случайные величины, чаще всего приходится иметь дело с нормальным законом распределения. В частности, нормальный закон распределения имеет фундаментальное значение при обработке результатов испытаний или эксперимента.

Функция нормального распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^x e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx,$$

где a и σ^2 – параметры распределения, представляющие собой соответственно математическое ожидание и дисперсию случайной величины x.

Нормальная плотность вероятности

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.41)$$

На рис. 1.15 приведены графики нормальной плотности вероятностей для различных значений дисперсии и математического ожидания.

График нормальной плотности вероятности имеет максимальную ординату при $x=a$. Через эту же ординату проходит ось симметрии кривой.

Поэтому у случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения, значения математического ожидания, медианы и моды совпадают между собой.

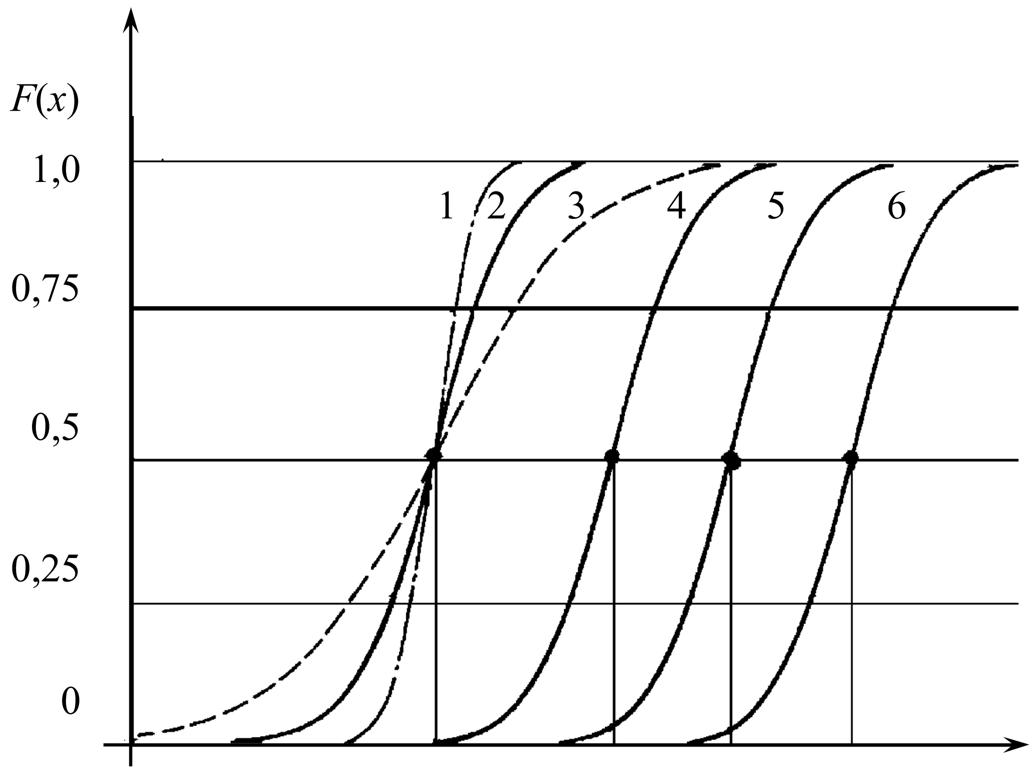

Рис. 1.14. Графики функции нормального распределения:
1, 2, 3–a_1=a_2=a_3=a; σ_1< σ_2< σ_3; 2, 4, 5, 6 – a_2< a_4< a_5< a_6; σ_2= σ_4= σ_5= σ_6

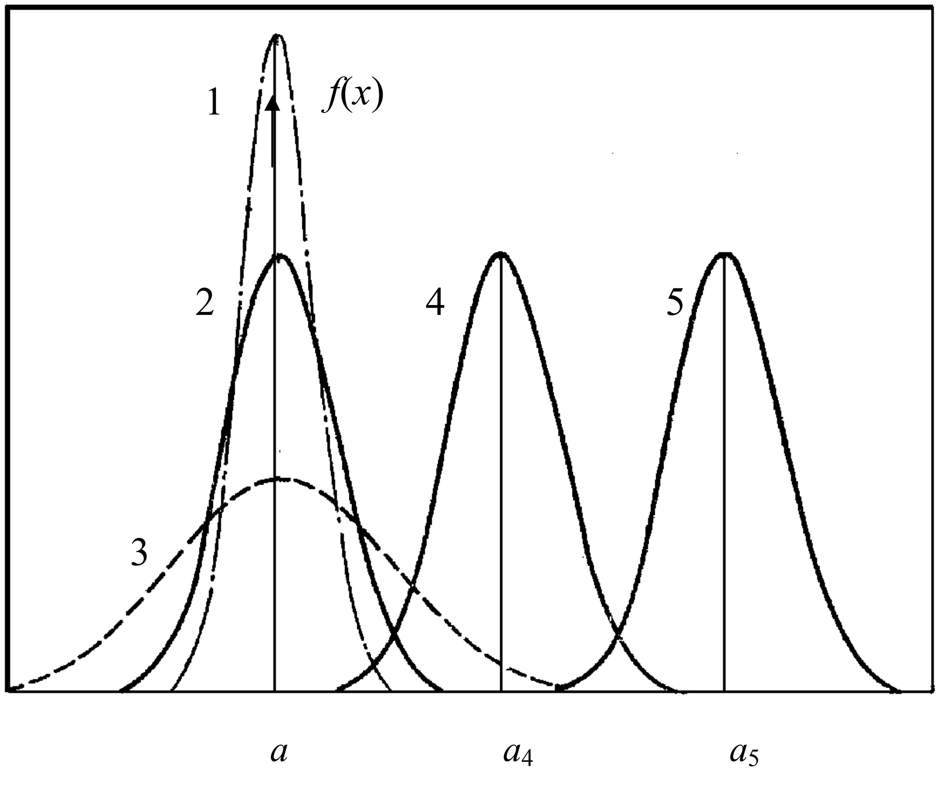

Рис. 1.15. Графики нормальной плотности вероятности:
1, 2, 3–a_1=a_2=a_3=a; σ_1< σ_2< σ_3; 2, 4, 5, 6 – a_2< a_4< a_5< a_6; σ_2= σ_4= σ_5= σ_6

Если в выражении функции распределения и плотности вероятности перейти к новой переменной, называемой нормированной случайной величиной

$$z = \frac{x-a}{\sigma}, \qquad (1.42)$$

то получим

$$F(z) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \qquad (1.43)$$

и

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \qquad (1.44)$$

Выражение (1.43) представляет собой функцию нормального закона распределения нормированной случайной величины (1.42) и называется *нормированной функцией нормального распределения.*

Функция (1.44) является плотностью вероятности нормированного нормального распределения. Значения этой функции для различных z приведены в прил.1. С нормальной плотностью вероятности (1.41) функция (1.44) имеет следующую связь:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi(z). \qquad (1.45)$$

Выражения (1.43) и (1.44) показывают, что если случайная величина x распределена нормально со средним, равным a, и дисперсией, равной σ^2, то нормированная случайная величина z (1.42) также имеет нормальное распределение со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Вероятность нахождения в интервале $(-\infty, x_1)$ случайной величины X, следующей нормальному закону распределения, на основании (1.29) и (1.43), определится как

$$P(X \prec x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z_1} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \qquad (1.46)$$

или, что легко доказать,

$$P(X \prec x_1) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{z_1} e^{\frac{-z^2}{2}} dz. \qquad (1.47)$$

Интеграл с переменным верхним пределом вида

$$\varPhi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{\frac{-z^2}{2}} dz \qquad (1.48)$$

носит название функции Лапласа. Геометрически функция Лапласа представляет собой площадь под кривой $\varphi(z)$ в промежутке от 0 до z (рис. 1.16). Значения этой функции приведены в прил. 2.

Следует иметь в виду, что

$$\varPhi(-z) = -\varPhi(z);\ \varPhi(-\infty) = -1/2;\ \varPhi(0)=0;\ \varPhi(\infty) = 1/2. \qquad (1.49)$$

С учетом (1.48) вероятность нахождения в интервале $(-\infty;\ x_1)$ случайной величины X определится из выражения

$$P(X<x_1)=0{,}5+\varPhi(z_1). \qquad (1.50)$$

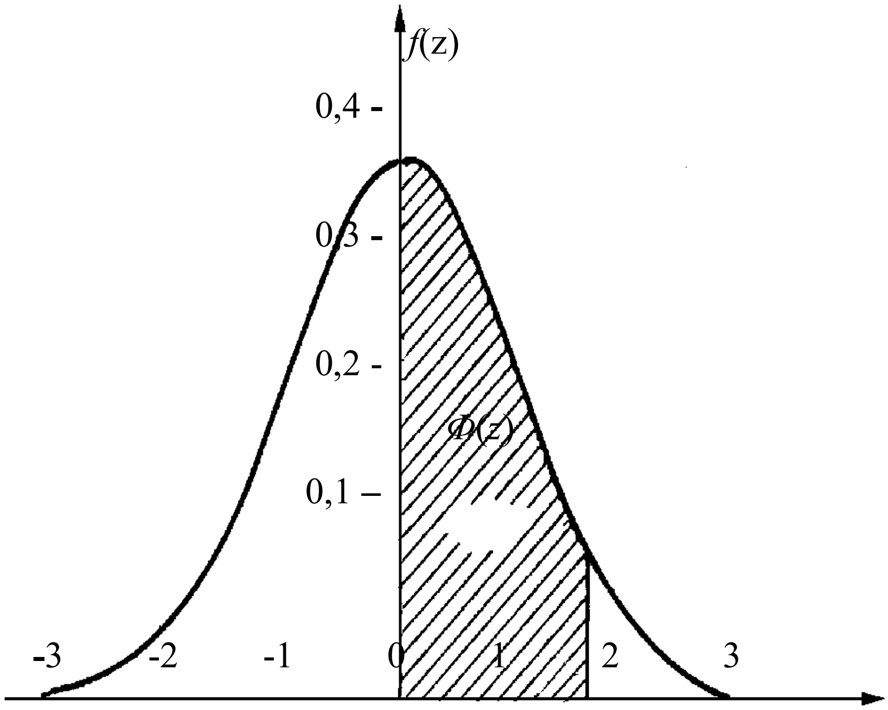

Рис. 1.16. Геометрическое представление функции Лапласа

Для интервала $(x_1;\ x_2)$ соответствующую вероятность можно подсчитать на основании (1.42) и (1.50) как

$$P(x_1<X\leq x_2)=\varPhi(z_2) - \varPhi(z_1), \qquad (1.51)$$

где

$$z_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}. \qquad (1.52)$$

Пользуясь указанными соотношениями и прил. 2, легко можно определить, что вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $a \pm \sigma$, составляет – $P \approx 0{,}68$; в интервал $a \pm 2\sigma$ – $\approx 0{,}95$ и в интервал $a + 3\sigma$ – $P \approx 0{,}997$.

Нетрудно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону, равны a и σ^2 соответственно, т. е.

$$M(X) = a;\ D(X) = \sigma^2.$$

Задача 2. Образцы из прессованного дюралюминиевого профиля испытывают на разрыв с целью определения предела прочности $\sigma_в$. Определить вероятность попадания значения предела прочности испытываемого образца в интервал (43 кгс/мм^2; 47 гс/мм^2), если для случайной величины $X=\sigma_в$; a=45,3кгс/мм^2 и σ =1,13 кгс/мм^2.

Решение. Пользуясь формулами (1.52), находим

$$z_1 = \frac{43 - 45{,}3}{1{,}13} = -2{,}03 \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{47 - 45{,}3}{1{,}13} = 1{,}50.$$

По прил. 2 для вычисленных значений z_1и z_2 определяем

$$\Phi(z_1) = \Phi(-2{,}03) = -\Phi\,(2{,}03) = -0{,}4788$$

и

$$\Phi(z_2) = \Phi(1{,}50) = 0{,}4332.$$

На основании формулы (1.51) находим

Р(43 кгс/мм^2$<\sigma_в\leq$ 47 кгс/мм^2) $=\Phi(1{,}50) - \Phi(2{,}03)=0{,}4332+0{,}4788=$
$=0{,}912$.

Приведенные расчеты показывают, что если испытаниям на разрыв подвергнуть большое число образцов, то около 90% из них будут иметь значения предела прочности, лежащие в указанных интервалах.

Задача 3. Длина изготавливаемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами $M(X) = 1{,}5$ см; σ = 0,2 см. Найти вероятность брака, если допускаемые размеры детали должны быть $15 \pm 0{,}3$ см. Какую точность длины можно гарантировать с вероятностью 0,97?

Решение.

а) $P(|x - M(X)| < 0{,}3) = 2\Phi(\dfrac{0{,}3}{\sigma})$,

т.к. параметр $a = M(X); \varepsilon = 0{,}3$ для нормального закона распределения.

$$P(|x - 15| < 0{,}3) = 2\Phi(\frac{0{,}3}{0{,}2}) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664 \text{ (см. прил. 2).}$$

Вероятность брака

$$P = 1 - 0{,}8664 = 0{,}1336 .$$

б) $P(|x - M(X)| < \varepsilon) = 2\varPhi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 0{,}97;\quad \varPhi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 0{,}485,\quad \frac{\varepsilon}{\sigma} = 2{,}17$ (см. прил. 2),т.к. $\varepsilon = 2{,}17 \cdot \sigma = 2{,}17 \cdot 0{,}2 = 0{,}434\,(\text{см})$.

Следовательно, с вероятностью 0,97 можно гарантировать размеры $15 \pm 0{,}434\,(\text{см})$.

3. Распределение Пуассона

Как и закон Гаусса, распределение Пуассона может быть получено как асимптотическое для биноминального.

Рассмотрим случай, когда вероятность p положительного исхода каждого испытания в серии из n испытаний равна λ/n, где λ – некоторая постоянная величина, и укажем в этом случае новую приближенную формулу для $P_n(\kappa)$. Пусть в серии из n испытаний вероятность появления события A в каждом испытании равна λ/n. Тогда вероятность появления события A в этой серии κ раз при большом n выражается приближенной формулой (см. §5)

$$P_n(\kappa) = \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda} . \tag{1.53}$$

Пусть теперь X – дискретная случайная величина, которая может принимать целые неотрицательные значения. Если вероятность равенства $X=\kappa$ определяется формулой (1.53), то мы говорим, что величина *X распределена по закону Пуассона.*

Запишем закон распределения в виде табл. 1.13.

Таблица 1.13

x_i	0	1	2	…	κ	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1} \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \cdot e^{-\lambda}$	…

Легко проверить, что

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa = \ell^{-\lambda} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 .$$

Для математического ожидания имеем

$$M(X)=0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1} \cdot e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots + \kappa \cdot \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots =$$

$$=\lambda\, e^{-\lambda}(1+\frac{\lambda}{1}\cdot+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}+\ldots).$$

Но, как известно, ряд в скобках представляет разложение функции e^{λ} в ряд Маклорена. Поэтому математическое ожидание равно $e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}$ или

$$M(X)=\lambda. \tag{1.54}$$

Мы выяснили, таким образом, вероятностный смысл параметра λ, входящего в закон распределения Пуассона: *параметр λ равен математическому ожиданию случайной величины*.

Нетрудно показать, что дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна математическому ожиданию.

$$D(X)=\lambda, \tag{1.55}$$

т. е. в *этом случае дисперсия равна математическому ожиданию*.

К случайным величинам, подчиненным закону Пуассона, приводит большое число задач, относящихся к вопросам массового обслуживания.

В качестве примера укажем работу телефонной станции. Можно доказать, что при выполнении некоторых условий вероятность κ вызовов за промежуток времени длины t определяется формулой

$$P_\kappa(t)=\frac{(at)^\kappa}{\kappa!}\cdot e^{-at}. \tag{1.56}$$

Если положить $at=\lambda$, то из формулы (1.56) следует, что случайная величина *X распределена по закону Пуассона.*

Задача 4. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 5 минут поступит 2 вызова.

Решение. По условию, a = 24 t = 5; κ = 2. Воспользуемся формулой (1.56)

$$P_2(5)=\frac{(2\cdot5)^2}{2!}\cdot e^{-2\cdot5}=0{,}000225.$$

Это событие практически невозможное.

4. *Равномерное распределение вероятностей*

Пусть плотность вероятности равна нулю всюду, кроме интервала (a, b), на котором она постоянна. Если обозначить эту постоянную через A, то в силу свойств плотности распределения получим

$$\int_a^b A\,dx = 1,$$

откуда A = 1/(b–a). Поэтому плотность распределения (дифференциальный закон) равномерного распределения задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < x < a; \\ \dfrac{1}{b-a} \quad \text{при} \quad a < x < b; \\ 0 \text{ при } \quad b < x < +\infty \end{cases} \tag{1.57}$$

(рис. 1.17). В точках x=a и x=b функция f(x) разрывна. Для нахождения функции распределения (интегрального закона распределения), воспользовавшись формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx,$ получим [6]

$$F(x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{при } -\infty < x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{при} \quad a < x < b, \\ 1 \qquad \text{при} \quad b < x < +\infty \end{cases} \tag{1.58}$$

(рис. 1.18). Эта функция непрерывна всюду.

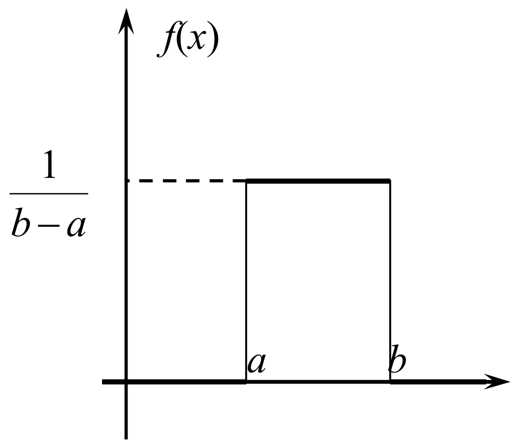

Рис. 1.17. График функции плотности распределения

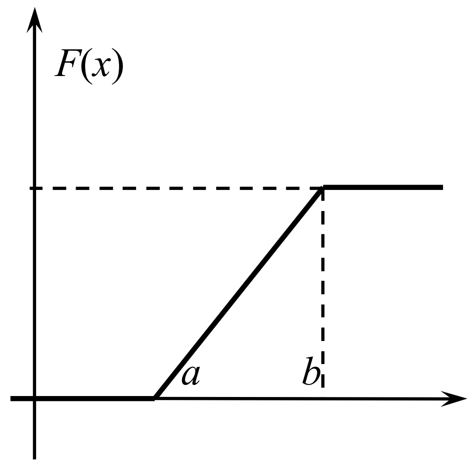

Рис. 1.18. График функции распределения

Пользуясь формулой $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$ для математического ожидания получим

$$M(x)=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}, \tag{1.59}$$

так что математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на интервале (a, b), находится в центре этого интервала. Для вычисления дисперсии найдем $M(X^2)$, пользуясь формулой (1.32)

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx:$$

$$M(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}. \tag{1.60}$$

Поэтому дисперсия равномерно распределенной случайной величины по формуле $D(X)=M\left(X^2\right)-M(X)^2$ равна

$$D(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{12}. \tag{1.61}$$

Таким образом, для случайной величины, равномерно распределенной на интервале (a, b), среднее квадратическое отклонение равно 0,288675… длины интервала.

Пользуясь формулой, для определения вероятности попадания непрерывной случайной величины X на участок от α до β получим

$$P(\alpha < X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha). \tag{1.62}$$

Задача 5. Точка бросается наугад (без прицеливания) на отрезок [0,I]. Случайная величина X–абсцисса точки попадания (считается, что бросаемая точка обязательно попадает на отрезок [0, 1]). Найти функцию плотности распределения и функцию распределения. Вычислить математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины. Найти вероятность того, что точка попадет в интервал [0; 0,5].

Решение. В этом случае мы имеем дело с непрерывной случайной величиной, все значения которой принадлежат отрезку [0, 1]. Поэтому в выражении для плотности распределения и функции распределения, $a = 0$, а $b = 1$, т. е.

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\infty < x < 0;\\ 1 \text{ при } 0 < x < 1;\\ 0 \text{ при } 1 < x < +\infty;\end{cases} \quad F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\infty < x < 0;\\ x \text{ при } 0 < x < 1;\\ 1 \text{ при } 1 < x < +\infty.\end{cases}$$

Согласно формулам (1.59), (1.61) и (1.62) $M(X)$=1/2, $D(X)$ = 1/12,

$$P(0 \le x \le 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0)=0{,}5-0=0{,}5.$$

Задача 6. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения $f(x)=1/(b–a)$, где $(b–a)$–длина интервала, в котором заключены возможные значения X; вне этого интервала $f(x) = 0$ (см. формулу (1.57)). В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна 0,1, поэтому

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < x < 0; \\ x/0{,}1=10x \text{ при } 0<x<0{,}1; \\ 1 \text{ при } 1<x<+\infty. \end{cases}$$

Легко сообразить, что ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02, 0,08).

По формуле (1.62) получим

$P(0{,}02 < x < 0{,}08) = F(0{,}08)–F(0{,}02) = 10\cdot 0{,}08 – 10\cdot 0{,}02 = 0{,}6.$

5. Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых появляется событие A с вероятностью, равной p $(0 < p < 1)$, и, следовательно, не появляется с вероятность $q= 1– p$. Как только событие A появилось, испытания прекращаются. Следовательно, если событие A появилось в $к$-м испытании, то в предшествующих $к–1$ испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые произошли до первого появления события A. Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1= 1; x_2=2;...$

Пусть в первых $к–1$ испытаниях событие A не наступило, а в $к$-м испытании появилось. Вероятность этого сложного события, по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X=к)=q^{к-1}p. \qquad (1.63)$$

Полагая $к$=l, 2, ... в формуле (1.63), получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q $(0<q<1)$:

$$p,\ qp,\ q^2p, ...,\ q^{к-1}p, ...$$

Поэтому распределение (1.63) называют *геометрическим.*

Запишем закон распределения в виде табл. 1.14.

Таблица 1.14

x_i	1	2	3	…	κ	…
p_i	p	qp	q^2p	…	$q^{\kappa\text{-}1}p$	…

Легко проверить, что

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей геометрическое распределение, равны

$$M(X)=1/p,\text{ а } D(X)=q/p^2. \qquad (1.64)$$

Задача 7. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию, p = 0,6; q = 0,4; κ = 3. Искомая вероятность по формуле (1.63)

$$P(\kappa=3) = 0{,}4^2\cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Задача 8. Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность промаха при отдельном выстреле равна p. Найти математическое ожидание числа промахов.

Решение. Возможные значения случайной величины X – числа промахов: 0, 1, 2, ..., κ, ...

$$P(x=\kappa) = p^\kappa(1-p).$$

Ряд распределения случайной величины Xприведен в табл. 1.15.

Таблица 1.15

X	0	1	2	…	κ	…
p	$1-p$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	…	$p^\kappa(1-p)$	…

Полученное распределение является геометрическим [см. (1.64)]
$M(X)=\dfrac{1}{p}$.

6. Показательное распределение

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному*** закону, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ x>0,\end{cases} \tag{1.64}$$

где $\lambda>0$ – параметр показательного закона.

Для случайной величины X, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Нетрудно показать, что дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону, равна

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

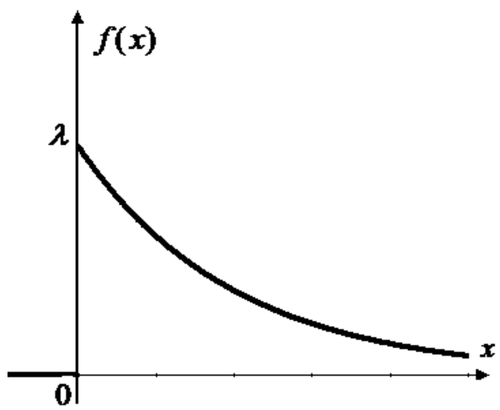

Рис. 1.19. Плотность показательного распределения

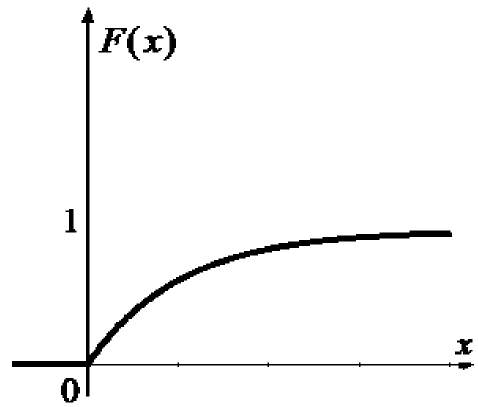

Рис. 1.20. Функция распределения показательного закона

Для нахождения функции распределения (интегрального закона распределения), воспользуемся формулой $F(X)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, получим

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & при\ x>0.\end{cases}$$

Пусть T – длительность времени безотказной работы прибора. Если прибор проработал безотказно время, меньшее t, то, следовательно, за время длительностью t наступит отказ. Таким образом, функция распределения $F(t)=P(T<t)$ определяет *вероятность отказа* за время длительностью t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время длительностью t, т. е. вероятность проти-

воположного события $T > t$ равна

$$R(t) = P(T > 1) = 1 - F(t).$$

Функцией надежности $R(t)$ прибора называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы прибора за время длительностью *t*:

$$R(t) = P(T > 1).$$

Обычно длительность времени безотказной работы прибора имеет показательное распределение, и функция надежности принимает вид

$$R(t) = P(T > 1) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} , \qquad (1.65)$$

где λ – интенсивность отказов.

Задача 9. 80% батареек теряют заряд, проработав менее 900 часов. Найти вероятность того, что у батарейки закончится заряд в промежутке от 150 до 300 часов работы.

Решение. Пусть T – время безотказной работы батарейки, оно подчинено показательному закону распределения. Найдем параметр λ, используя формулу (1.65):

$$p(T > 900) = R(t) = e^{-\lambda 900} = 0{,}2 \ ; \ln e^{-\lambda 900} = \ln 0{,}2; \ \lambda = \frac{\ln 0{,}2}{-900} = 0{,}0018.$$

Тогда искомая вероятность будет равна

$$p(150 \le t \le 300) = F(300) - F(150) = \left(1 - e^{-\lambda 300}\right) - \left(1 - e^{-\lambda 150}\right) =$$
$$= e^{-0{,}0018 \cdot 150} - e^{-0{,}0018 \cdot 300} \approx 0{,}181.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределённой по нормальному закону. Если стандартная длина равна 90 см и среднее квадратическое отклонение равно 1,5 см, то с какой вероятностью можно гарантировать что длина изделия будет больше 93 см?

2. Поезд данного маршрута городского трамвая ждут с интервалом 5 минут. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 2 минуты после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за 2 мин до прихода следующего поезда?

3. Цена деления шкалы амперметра равна 0,2 *A*. Показания амперметра определяют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка,

превышающая 0,03*A*.

4. Плотность автомобильного бензина марки АИ-95 является СВ X и подчинена нормальному закону с параметрами a =750кг/м^3; σ = 25 кг/м^3 при 15 $^{\circ}$С. Найти вероятность того, что плотность бензина попадает в интервал от 745 до 765 кг/м^3.

5. Известно, что вам могут позвонить в любой момент времени между 11 и 13 часами. Какова вероятность того, что звонка придется ждать не более 15 минут? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X– времени ожидания звонка.

6. Среднее время ремонта сложной техники в сервисном центре равно 16 дням. Найти вероятность того, что: а) на ремонт планшета потребуется не менее 10 дней; б) на ремонт телефона потребуется от 17 до 20 дней.

7. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска задается формулой $P(t) = 1 - e^{-\lambda t}\,(\lambda > 0)$. Определить математическое ожидание случайной величины T– времени поиска затонувшего судна.

8. Случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с числовыми характеристиками $a = 6,\ \sigma^2 = 2{,}4$. Определить вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[3{,}5;\ 5{,}5]$.

9. Известно, что в партии деталей имеется 10% бракованных. Найти закон распределения случайной величины Y– числа годных деталей из пяти, выбранных наудачу. Определить числовые характеристики этого закона a и σ^2.

10. Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить: а) вероятность поражения бомбардировщика; б) ту же вероятность, если число атак истребителей – неслучайная величина и в точности равна трем.

11. Монету бросают до первого появления герба. Найти среднее число бросаний.

12. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 A. Показания амперметра определяют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете сделана ошибка, превышающая 0,02 A.

Указание. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая равномерно распределена в интервале между двумя соседними целыми делениями.

13. Нагрузка на стержень подчиняется нормальному закону распределения с числовыми характеристиками $a = 5\ H$, $\sigma = 0{,}05\ H$. Усилие, разрушающее стержень, составляет $5{,}08\ \text{Н}$. Найти вероятность разрушения стержня.

14. Станок-автомат изготовляет валики, контролируя их диаметр X. Считая, что X распределен нормально, $a = 10$ мм, $\sigma = 0{,}1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

15. Вероятность взять деталь в пределах допуска из большой партии деталей равна $P = 0{,}85$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа деталей в пределах допуска из 8 деталей, взятых наудачу.

16. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M(X) = 40$ и дисперсией $D(X) = 200$. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(30;\ 80)$.

17. Считается, что отклонение длины изготовляемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна 40 см и среднее квадратичное отклонение равно $0{,}4$ см, то какую точность длины изделие можно гарантировать с вероятностью $0{,}8$?

18. Число частиц, излученных радиоактивным элементом в течение произвольного промежутка времени, имеет распределение Пуассона с параметром $a = 1{,}5\ 1/\text{с}$. Найти вероятность того, что число частиц, излученных за две секунды, будет заключено в отрезке $[2;\ 4]$.

19. Дистанция Х между двумя соседними самолетами в строю имеет показательное распределение, причем $m_x = 100$ м. Опасность столкновения самолетов возникает при уменьшении дистанции до 20 м. Найти вероятность того, что возникает опасность столкновения самолетов в воздухе.

20. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону со средним временем до первого отказа 50 часов. Найти вероятность того, что элемент проработал 100 часов.

21. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = 5e^{-5t}\ (x \ge 0)$. Найти вероятность того, что в результате испытания X будет заключено в отрезке $[0{,}4;\ 1]$.

Ответы

1. 0,023. **2.** 0,2. **3.** 0,7. **4.** 0,305. **5.** 0,125; 12; 1/3. **6.** а) 0,535; б) 0,059. **7.** $M(T)=\frac{1}{\lambda}$. **8.** $P=0{,}312$. **9.** $M(Y)=4{,}5;\ D(Y)=0{,}45$. **10**. а) $P=0{,}699$; б) $P=0{,}784$. **11.** $m_0=2$. **12.** $P=0{,}6$. **13.** $P=0{,}055$. **14.** $(9{,}7;\ 10{,}3)$. **15.** $M(X)=6{,}8;\ D(X)=1{,}02$. **16.** $P=0{,}758$. **17.** $(39{,}5;\ 40{,}5)$. **18.** $P=0{,}616$. **19.** $P=0{,}181$. **20.** P=0,14. **21.** P=0,13.

§8. Системы случайных величин

Функцией системы двух случайных величин (*x,y*) называется функция $F(x,y)=P(X<x,Y<y)$.

Плотностью распределения системы непрерывных случайных величин называется функция, определенная следующим образом:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Плотность распределения случайных величин (*x, y*) неотрицательна и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

Функция распределения *F*(*x, y*) выражается через плотность распределения формулой

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Вероятность попадания случайной величины (*x, y*) в область *D* вычисляется по формуле

$$P((x,y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Плотности распределения вероятностей случайных величин, входящих в систему, равны

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ \ f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Случайные величины *x, y* называются независимыми, если

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Система двух дискретных случайных величин может быть задана таблицей, в которой приведены пары значений случайных величин и соответствующие им вероятности (табл. 1.16).

Таблица 1.16

x / y	x_1	x_2	x_3	x_4	…	…	…	x_n		
y_1	P_{11}	P_{21}	P_{31}	P_{41}	…	…	…	P_{n1}		
y_2	P_{12}	P_{22}	P_{32}	P_{42}	…	…	…	P_{n2}		
y_3	P_{13}	P_{23}	P_{33}	P_{43}	…	…	…	P_{n3}		
…	…	…	…	…	…	…	…	…		
y_m	P_{1m}	P_{2m}	P_{3m}	P_{4m}	…	…	…	P_{nm}		

Здесь P_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i, Y = y_i$.

При этом $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$.

Законы распределения случайных величин, входящих в систему, определяются следующим образом:

$$P_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij};$$

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}.$$

Дискретные случайные величины называются *независимыми*, если

$$P_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i).$$

Многие важные характеристики пары случайных величин (x, y) достаточно просто выражаются через начальные α_{ks} и центральные μ_{ks} моменты системы случайных величин, которые находятся по формулам

$$\alpha_{ks} = M\left(X^k Y^k\right), \ \mu_{ks} = M\left\{ [X - M(X)]^k [Y - M(Y)]^s \right\}.$$

Для дискретных случайных величин

$$\mu_{ks} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^k (y_j - m_j)^s p_{ij},$$

$$\alpha_{ks} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$\alpha_{ks} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy;$$

$$\mu_{ks} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k (y-m_y)^s f(x,y)dxdy.$$

$$\alpha_{10} = M\left(X^1Y^0\right) = M(X) = m_x;$$

$$\alpha_{01} = M\left(X^0Y^1\right) = M(Y) = m_y;$$

$$\mu_{20} = M\left[(X-m_x)^2(Y-m_y)^0\right] = D(X);$$

$$\mu_{02} = M\left[(X-m_x)^0(Y-m_y)^2\right] = D(Y).$$

Точка (m_x, m_y) называется центром рассеивания системы случайных величин (x, y).

Так, например, степень линейной зависимости случайных величин характеризует *корреляционный момент*:

$$M_{11} = K_{xy} = M\left[(x-m_x)(y-m_y)\right].$$

Для непрерывных случайных величин он равен:

$$K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)(y-m_y) f(x,y)dxdy.$$

Так как k_{xy} имеет размерность *xy*, то при изменении единицы масштаба его значение будет подвергаться изменению.

Чтобы избежать этого, введем *коэффициент корреляции*

$$\tau_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} (-1 \le \tau_{xy} \le 1).$$

Если случайные величины, входящие в систему, независимы, то $\tau_{xy} = 0$. В общем случае из равенства $\tau_{xy} = 0$ не следует независимость случайных величин *X, Y*. Если $Y = aX + b$, то $\tau_{xy} = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ -1, & a < 0 \end{cases}.$

Задача 1. В двух ящиках содержатся шары, по 6 шаров в каждом. В первом ящике 1 с №1, 2 шара с №2, 3 шара с №3; во втором ящике 2 шара с №1, 3 шара с №2 и 1 шар с №3. Рассматриваются случайные величины: X – номер шара, вынутого из первого ящика; Y – номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу распределения системы случайных величин (X, Y). Найти математические ожидания, дисперсии *X* и *Y*, коэффициент корреляции.

Решение.

Таблица 1.17

	X			
Y	1	2	3	q_j
1	$1/18$	$1/9$	$1/6$	$1/3$
2	$1/12$	$1/6$	$1/4$	$1/2$
3	$1/30$	$1/18$	$1/12$	$1/6$
p_i	$1/6$	$1/3$	$1/2$	–

Вероятности P_{ij} вычисляются следующим образом:

$$p_{11} = P(X=1,\ Y=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$

т. к. шаров в первом ящике всего 6, а с номером 1 ровно один шар. Во втором ящике 2 шара с номером один, а всего 6 шаров. Эти события происходят одновременно, следовательно, их вероятности перемножают.

Аналогично

$$p_{22} = P(X=2, Y=2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

По табл. 1.17 распределения вероятностей системы случайных величин (X, Y) можно составить законы распределения случайных величин, входящих в систему. Распределение случайной величины для X получаем, складывая числа в вертикальных столбцах, а для Y – в горизонтальных строках

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{2} = 2\frac{1}{3};$$

$$M(Y) = 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6} = 1\frac{5}{6};$$

$$D(X) = M\left[(X-m_x)^2\right] = M\left(X^2\right) - m_x^2;$$

$$D(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{3} + 9\cdot\frac{1}{2} - (2\cdot\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9};$$

$$D(Y) = 1\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot\frac{1}{6} - (1\frac{5}{6})^2 = \frac{17}{36};$$

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij} =1\cdot1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot1\cdot\frac{1}{9}+3\cdot1\cdot\frac{1}{6}+$$

$$+1\cdot2\cdot\frac{1}{12}+2\cdot2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot2\cdot\frac{1}{4}+1\cdot3\cdot\frac{1}{36}+2\cdot3\cdot\frac{1}{18}+3\cdot3\cdot\frac{1}{12}=\frac{77}{18};$$

$$K_{xy}=M(XY)-m_x m_y =4\frac{5}{18}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot1\frac{5}{6}=\frac{77}{18}-\frac{77}{18}=0;$$

$$\tau_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma x\sigma y}=0.$$

Такой результат имеет место, так как X и Y независимы по условию.

Задача 2. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) \text{ в области } D; \\ 0 \qquad\qquad \text{вне этой области}. \end{cases}$$

Область D – квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$.

Требуется:

1) определить коэффициент a;

2) вычислить вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$;

3) найти математические ожидания m_x и m_y;

4) найти средние квадратические отклонения σ_x, σ_y.

Решение.

1) Коэффициент a находим из уравнения

$$a\int_0^3\int_0^3(x+y)dxdy=1, \text{ откуда}$$

$$a\int_0^3\int_0^3(x,y)dxdy=a\int_0^3\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^3 dx=a\int_0^3(3x+\frac{9}{2})dx=$$

$$=a\left[\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right]\Bigg|_0^3=a(\frac{27}{2}+\frac{27}{2})=27a, 27a=1, a=\frac{1}{27}.$$

2) $$P[(x,y)\subset Q]=\frac{1}{27}\int_0^2\int_0^2(x+y)dxdy=\frac{1}{27}\int_0^2\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_1^2(2x+2-x-\frac{1}{2})dx=\frac{1}{27}\int_1^2(x+\frac{3}{2}dx)=\frac{1}{27}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x\right]\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{27}(2+3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2})=\frac{1}{9}.$$

3) Найдём математические ожидания m_x и m_y:

$$m_x=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x(x+y)dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3\left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]\Bigg|_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3(3x^2+\frac{9}{2}x)dx=\frac{1}{27}\left[x^2+\frac{9}{4}x^2\right]\Bigg|_0^3=\frac{1}{27}(27+\frac{81}{4})=\frac{7}{4}.$$

Следовательно, и $m_y=\frac{7}{4}$.

4) Находим средние квадратические отклонения σ_x и σ_y:

$$\sigma_x^2=\iint_D(x-m_x)^2f(x,y)dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3(x-\frac{7}{4})^2(x+y)dxdy=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3(x-\frac{7}{4})^2(x-\frac{7}{4}+y+\frac{7}{4})dxdy=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3(x-\frac{7}{4})^3dydx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3(x-\frac{7}{4})^2(y+\frac{7}{4})dydx=\frac{1}{27}\int_0^3(x-\frac{7}{4})^2\cdot y\Big|_0^3dx+$$

$$+\frac{1}{27\cdot 2}\int_0^3(x-\frac{7}{4})^2(y+\frac{7}{4})^2\Big|_0^3dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{(x-\frac{7}{4})^4}{4}\Big|_0^3+$$

$$+\frac{1}{27\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}(x-\frac{7}{4})^3\cdot(\frac{361}{16}-\frac{49}{16})\Big|_0^3=\frac{11}{16}.$$

Итак, $\sigma_x=\sigma_y=\frac{\sqrt{11}}{4}$.

Задача 3. Дана плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X,Y):

$$f(x,y)=0{,}5\sin(x+y),(0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}).$$

Определить функцию совместного распределения системы (X,Y).

Решение. Определим функцию $F(x,y)$, рассматривая области $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$.

$D_1, D_2, D_3 : F(x,y) = 0$.

$$D_4 : F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 0{,}5\sin(x+y)dxdy =$$

$$= 0{,}5\cdot(\sin x + \sin y - \sin(x+y)).$$

$$D_5 : F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{0}^{y} 0{,}5\sin(x+y)dy =$$

$$= 0{,}5\cdot(1 + \sin y - \cos y).$$

$$D_6 : F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{0}^{x} 0{,}5\sin(x+y)dx =$$

$$= 0{,}5\cdot(1 + \sin x - \cos x).$$

$D_7 : F(x,y) = 1$,

т. к. какую бы точку (x, y) этой области ни взяли, возможные значения случайных величин (X, Y) будут меньше $F(x,y) = P(X < x, Y < y) = 1$.

Таким образом

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\in D_1, D_2, D_3; \\ 0{,}5\cdot(\sin x + \sin y - \sin(x+y)), & (x,y)\in D_4; \\ 0{,}5\cdot(1+\sin y - \cos y), & (x,y)\in D_5; \\ 0{,}5\cdot(1+\sin x - \cos x), & (x,y)\in D_6; \\ 1, & (x,y)\in D_7. \end{cases}$$

Задачи для решения в аудитории

1. Совместное распределение случайных величин *X, Y* задано табл. 1.18. Найти ряды распределения для *X* и *Y*. Будут ли независимы *X* и *Y* ?

Таблица 1.18

	X		
Y	-1	0	1
-1	0,1	0,3	0,2
1	0,06	0,18	0,16

2. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x,y)=\begin{cases} a(y-xy) & \text{в области } D; \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Область D определяется неравенствами: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Найти:

1) коэффициент a;

2) математические ожидания m_x и m_y;

3) средние квадратические отклонения σ_x, σ_y;

4) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник Q, ограниченный прямыми $x=0{,}7; x=3;\ y=0; y=0{,}3$;

5)корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции τ_{xy}.

3. Определить функцию совместного распределения системы (X,Y) из условия задачи 2.

4. Дана табл.1.19, определяющая закон распределения двух случайных величин (X, Y):

Таблица 19

	y		
x	20	40	60
10	16λ	12λ	8λ
20	28λ	11λ	25λ

Найти:

1) коэффициент λ;

2) математические ожидания m_x и m_y;

3) дисперсии $D(X), D(Y)$.

5. Дана плотность распределения вероятностей системы случайных величин, задаваемая функцией

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot xy & \text{в области } D; \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Область D определяется неравенствами: $x \ge 0$, $y \ge 0, x+y \le 1$.

Найти:

1) коэффициент a;

2) математические ожидания m_x и m_y;

3) дисперсии $D(X), D(Y)$;

4) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область Q, ограниченную неравенствами $x > 0{,}5$; $y \le 1$;

5) коэффициент корреляции τ_{xy}.

6. Независимые случайные величины X, Y подчинены следующим законам распределения:

$$f_1(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{при}\, x \ge 0, \\ 0, & \text{при}\, x < 0, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 4e^{-4y} & \text{при } y \ge 0, \\ 0 & \text{при } y < 1. \end{cases}$$

Написать:

1) выражение для функции плотности распределения системы двух случайных величин (X, Y);

2) выражение для функции распределения системы двух случайных величин (X, Y).

7. Совместное распределение случайных величин X, Y задано табл. 1.20.

Таблица 1.20

	Y		
X	1	1,5	2
1	$1/12$	$1/24$	$1/24$
2	$1/12$	$1/24$	$1/24$
2,5	$1/3$	$1/6$	$1/6$

Найти ряды распределения для X и Y. Установить, зависимы ли компоненты X и Y.

8. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна p_1, при втором – p_2. Построить таблицу распределения системы двух случайных величин (X,Y), где X – число попаданий при первом выстреле; Y – число попаданий при втором выстреле.

9. Найти функцию распределения системы (X, Y) из условия задачи 8.

10. Независимые случайные величины X и Y подчинены законам распределения:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2};$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0 \text{ при } y \le 0; \\ 1 \text{ при } 0 < y \le 1; \\ 0 \text{ при } y > 1. \end{cases}$$

Написать выражение для функции распределения системы двух случайных величин.

11. Дана функция распределения системы двух случайных величин (X, Y):

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \ y \le 0; \\ 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y} & \text{при } x > 0, \ y > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей системы (X, Y). Вычислить числовые характеристики $M(X), M(Y)$.

12. Определить, зависимы ли случайные величины, из условия задачи 8.11. Найти для них числовые характеристики $D(X), D(Y)$.

13. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность

$$f(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Определить величину A. Найти функцию распределения $F(X, Y)$, $M(X)$, $M(Y)$. Определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область, заданную неравенствами $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 5$.

14. Система двух случайных величин (X, Y) подчинена закону равномерной плотности внутри прямоугольника:

$$-a < x < a, \ -в < y < в, \ (в > a).$$

Найти плотность распределения вероятности и вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрат со стороной $a/2$, если центр этого квадрата совпадает с началом координат.

15. Плотность распределения вероятностей системы двух независимых случайных величин (X, Y) задана выражением

$$f(x, y) = Ce^{-\left[\frac{(x-4)^2}{50} + (y+6)^2\right]}.$$

Найти неизвестный параметр C и определить корреляционный момент.

16. Случайные величины X и Y независимы, и их плотности распределения вероятностей соответственно равны

$$f_1(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|>2;\\ 1/4 & \text{при } x\le 2;\end{cases}\qquad f_2(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0;\\ e^{-y} & \text{при } y>0.\end{cases}$$

Определить функцию распределения системы случайных величин *X*, *Y*. Найти числовые характеристики системы случайных величин (*X*, *Y*).

17. Закон распределения системы двух случайных величин (*X*,*Y*) задан табл. 1.21.

Таблица 1.21

	y	
x	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Найти следующие характеристики системы (*X*, *Y*):

$$M(X), M(Y), D(X), D(Y), R_{xy}.$$

18. Функция совместного распределения случайных величин *X* и *Y* задана выражением

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\text{ или } y\le 0;\\ (1-e^{-x})(1-e^{-2y}) & \text{при } x>0,\ y>0.\end{cases}$$

Определить, зависимы ли случайные величины *X* и *Y*. Найти плотность распределения вероятностей системы (*X, Y*).

19. Случайная точка (*X*, *Y*) имеет равномерное распределение внутри прямоугольника, ограниченного прямыми: $x=0, x=4, y=0, y=6$.

Найти функцию распределения $F(x,y)$ системы случайных величин (*X*,*Y*).

20. Система двух случайных величин (*X*,*Y*) имеет плотность распределения вероятностей $f(x,y)=(1/\pi)\cdot e^{-x^2-y^2}$. Найти следующие числовые характеристики системы: $M(X), M(Y), D(X), D(Y)$, K_{xy}.

Ответы

1.

X	-1	0	1	*Y*	-1	1
P	0,16	0,48	0,36	*P*	0,6	0,4

2. 1) $a=4$; 2) $m_x=1/3$, $m_y=2/3$; 3) $\sigma_x=1/18$, $\sigma_y=1/18$;
4) P = 0,0081; 5) $K_{xy}=\tau_{xy}=0$.

3. $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0, y<0 \text{ или } x<0, y>0 \text{ или } x>0, y<0;\\ x\cdot y^2\cdot(2-x), & (x,y)\in D;\\ y^2, & 0\le y\le 1, x>1;\\ x\cdot(2-x), & 0\le x\le 1, y>1;\\ 1, & x>1, y>1.\end{cases}$

4. 1) $\lambda=0{,}01$; 2) $m_x=16{,}4$ и $m_y=37{,}8$; 3) $D(X)=23{,}04$ и $D(Y)=303{,}16$.

5. 1) $a=24$; 2) $m_x=2/5$ и $m_y=2/5$; 3) $D(X)=1/25$, $D(Y)=1/25$;

6. 1) $f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0,\ y<0;\end{cases}$

2) $F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\cdot\left(1-e^{-4y}\right), & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0,\ y<0.\end{cases}$

7.

x_i	1	2	2,5
p_i	$1/6$	$1/6$	$2/3$
y_i	1	1,5	2
p_i	0,5	0,25	0,25

Независимы.

8.

Величины	0	1
0	q_1q_2	p_1q_2
1	q_1p_2	p_1p_2

, где $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$.

9. $F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0;\\ q_1q_2 & \text{при } 0<x\le 1,\ 0<y\le 1;\\ q_2 & \text{при } x>1,\ 0<y\le 1;\\ q_1 & \text{при } 0<x\le 1,\ y>1;\\ 1 & \text{при } x>1, y>1.\end{cases}$

10. $F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0,\\ \dfrac{y}{2}\left[1-\Phi(x)\right] & \text{при } 0<y\le 1,\\ \dfrac{1}{2}\left[1+\Phi(x)\right] & \text{при } y>1,\end{cases}$ где $\Phi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$

11. а) нет; б) $f(x,y)=\begin{cases}\alpha\beta\, e^{-\alpha x-\beta y} & \text{при } x>0 \text{ и } y>0,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0;\end{cases}$

в) $M(X)=\dfrac{1}{\alpha}$, $M(Y)=\dfrac{1}{\beta}$. **12.** $D(X)=\dfrac{1}{\alpha^2}$, $D(Y)=\dfrac{1}{\beta^2}$. **13.** а) $A=20$;

$f(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2}\right)$; $M(X)=M(Y)=0$; $P=1/16$.

14. $f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|>a \text{ или } |y|>в,\\ \dfrac{1}{4aв} & \text{при } -a<x<a \text{ и } -в<y<в;\end{cases}$ $P=\dfrac{a}{16в}$.

15. $C=\dfrac{1}{5\pi\sqrt{2}}$; $\|K_{xy}\|=\begin{Vmatrix}25 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2}\end{Vmatrix}$.

16. $F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2 \text{ или } y<0,\\ \dfrac{x+2}{4}\left(1-e^{-y}\right) & \text{при } -2<x\le 2 \text{ и } y>0,\\ 1-e^{-y} & \text{при } x>2 \text{ и } y>0;\end{cases}$

$M(X)=0$; $M(Y)=1$; $D(X)=1{,}33$; $D(Y)=1$; $r_{xy}=0$.

17. $M(X)=0{,}10$; $M(Y)=0{,}55$; $D(X)=0{,}59$; $D(Y)=0{,}2475$; $r_{xy}=-0{,}144$.

18. Нет; $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & \text{при } x>0 \text{ и } y>0,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0;\end{cases}$ $P=0{,}208\cdot 10^{-3}$.

19. $F(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \quad \text{или } y \le 0, \\ \dfrac{xy}{24} & \text{при } 0 < x \le 4,\ 0 < y \le 6, \\ \dfrac{x}{4} & \text{при } 0 < x \le 4,\ y > 6, \\ \dfrac{y}{6} & \text{при} x > 4,\ 0 < y \le 6, \\ 1 & \text{при } x > 4,\ y > 6. \end{cases}$

20. $M(X)=M(Y)=0$; $D(X)=D(Y)=0{,}5$; $K_{xy}=0$.

Вопросы и упражнения для самопроверки

1. Сформулировать основные понятия теории вероятностей.
2. Дать определения вероятности (классическое, статистическое, геометрическое).
3. Сформулировать основные понятия элементов комбинаторики.
4. Какие действия над событиями вы знаете?
5. Сформулировать теорему сложения вероятностей для несовместных событий.
6.Как определяется условная вероятность? Сформулировать основные теоремы умножения вероятностей.
7. Сформулировать теорему о вероятности появления хотя бы одного события.
8. Какие теоремы сложения вероятностей вы знаете?
9. Сформулировать основные следствия теорем сложения и умножения вероятностей (формулу полной вероятности и формулу Байеса).
10. Вывести формулу Бернулли.
11. Вывести формулу для нахождения наивероятнейшего числа наступления события.
12. Вывести формулу Пуассона.
13. Сформулировать локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа.
14. Какие вы знаете дискретные случайные величины и способы их задания?
15. Сформулировать законы распределения дискретной случай-

ной величины.

16. Дайте определение числовых характеристик дискретной случайной величины.

17. Дайте определение непрерывной случайной величины и способов ее задания.

18. Дайте определение числовых характеристик непрерывной случайной величины.

19. Сформулировать равномерный закон распределения случайной величины.

20. Сформулировать показательный закон распределения случайной величины.

21. Сформулировать нормальный закон распределения случайной величины.

22. Какие свойства случайной величины, распределенной по нормальному закону, вы знаете?

Контрольная работа по разделу «Элементы теории вероятности»

Вариант 1

1. Из двух полуфинальных групп, каждая из которых содержит по 6 команд, в финал выходит по одной команде. Сколько может быть различных вариантов участников финального матча?

2.Монета подбрасывается 3 раза. События: O – {выпал “орел”}; P – {выпала “решка”}. Записать пространство элементарных исходов и события: A – {“орел” выпал ровно 1 раз}; B – {“решка” не выпала ни разу}; C – {“орлов” выпало больше, чем “решек”}; D – {“орел” выпал не менее двух раз подряд}.

3. Имеется 8 билетов в театр, из которых 3 на места в первом ряду. Найти вероятность того, что: а) произвольно взятые 3 билета на первый ряд; б) из четырех взятых билетов нет ни одного на первый ряд; в) из четырех взятых билетов хотя бы один на первый ряд.

4. В первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую не глядя перекладывают 2 шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

5. Вероятность выиграть заезд для мотоциклиста – 0,7. Мотоциклист участвует в десяти заездах и выходит в следующий тур, если побеждает хотя бы в восьми заездах. Найти вероятность того, что мо-

тоциклист пройдет в следующий тур.

6. Случайная величина X принимает значение, равное числу дам, которые появляются, если из колоды в 36 карт произвольно вытаскиваются 4 карты. Построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения; г) найти *M(X), D(X)*.

7. Непрерывная случайная величина задана своей функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0; \\ x^3, 0 < x \le 1; \\ 1, x > 1. \end{cases}$.

Найти:

а) плотность вероятности *f(x)*; б) *M(X)* и *D(X)*;

в) вероятность $P\ (-2 < x < 1/2)$. Построить графики *F(x)* и *f(x).*

8. Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=164$ см; $\sigma=5{,}5$ см. Записать функцию плотности вероятности; найти вероятность того, что 3 наугад выбранные женщины имеют рост ниже чем 160 см.

Вариант 2

1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7, если никакая из цифр при составлении числа не должна использоваться более одного раза?

2. Игральная кость подбрасывается 2 раза. События: $A_1 -$ {на первой кости 1 или 2 очка}; $B_1 -$ {на второй кости 1 или 2 очка}; $A_2 -$ {на первой кости 3 или 4 очка}; $B_2 -$ {на второй кости 3 или 4 очка}; $A_3 -$ {на первой кости 5 или 6 очков}; $B_3 -$ {на второй кости 5 или 6 очков}. Описать события: $C -$ {на обеих костях не менее трех очков}; $D -$ {сумма очков на обеих костях не менее шести}; $E -$ {хотя бы на одной кости более пяти очков}.Что означают события: $\overline{A}_1\ \overline{B}_1$, CE, $C-D$?

3**.** На книжной полке 10 книг, из которых 4 книги одного автора. Найти вероятность того, что: а) все 4 книги этого автора стоят рядом; б) из выбранных наугад четырех книг нет книг этого автора.

4. В цехе работают 30 станков. Из них 10 станков марки *A*, 15 станков марки *B* и 5 марки *C*. Вероятность того, что выпускаемая деталь отличного качества для этих станков: *A* – 0,8; *B* – 0,9; *C* – 0,7. Сколько процентов отличных деталей выпускает цех в целом?

5. Из пятидесяти вопросов студент знает ответы на 30 вопросов. Экзамен сдан, если студент ответит хотя бы на 2 вопроса из трех. Найти вероятность того, что студент сдал экзамен.

6. Случайная величина X принимает значения, равные числу окрашенных деталей среди трех отобранных, если в ящике 10 деталей и 6 среди них окрашены. Найти закон распределения, функцию распределения, $M(X)$, $D(X)$.

7. Некоторая случайная величина задана своей функцией плотности вероятности $f(x)=\begin{cases} 0, x<0; \\ ax^2+6, 0\le x\le 24;. \\ 0, x>2. \end{cases}$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$; в) $M(X)$, $D(X)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$.

8. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции не выше 15, 3 ден.ед; не ниже 15,4 ден. ед.

Вариант 3

1. В книге из 20 страниц на каких-либо трех страницах надо поместить по одной иллюстрации. Сколькими способами это можно сделать?

2. Обозначим события: A – {из колоды карт вынута карта “черви”}; B – {из колоды карт вынута карта “буби”}; C – {из колоды карт вынута карта “пики”}, D – {из колоды карт вынута карта “крести”}. Записать с помощью событий A, B, C, D следующие события: E – {две вынутые карты “красные”}; F – {хотя бы одна карта “красная”}. Что означают события $\overline{A+B}$; $\overline{A}\,\overline{B}$?

3. Подбрасывается 6 игральных костей. Найти вероятности событий: A – {на всех костях разное число очков}; B – {сумма выпавших очков на всех костях равна 6}; C – {хотя бы на одной кости выпала “6”}.

4. В урне лежит шар с равной вероятностью белого или черного цвета. В урну опускают один белый шар и после перемешивания наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что в урне остался белый шар.

5. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью $P=5\cdot 10^{-4}$. Найти вероятность того, что за время T откажет: а) хотя бы один элемент; б) ровно один элемент.

6. Стрелок попадает в “яблочко” при одном выстреле с вероятностью 1/4 независимо от предыдущих выстрелов. Стрелок сделал 5 выстрелов. Найти: а) закон распределения случайной величины X – числа попаданий в “яблочко”; б) функцию распределения; в) $M(X)$, $D(X)$; г) вероятность P того, что стрелок попал в “яблочко” более трех раз.

7. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X $f(x)=\begin{cases} 0, x<0; \\ a\,(2x-x^2),\ 0\le x\le 4; \\ 0, x>4. \end{cases}$

Найти: а) неизвестный параметр a; б) функцию распределения $F(x)$; в) $M(X)$, $D(X)$; г) $P(2<x<3)$. Построить графики $f(x)$, $F(x)$.

8. Пусть диаметр изготавливаемой в цехе детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами a=4,5 см и σ=0,05 см. Найти вероятность того, что: а) диаметр взятой наугад детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм; б) первые две наугад взятые детали имеют диаметры от 4,45 до 4,55 см.

Вариант 4

1. Сколькими способами можно преподнести 4 различных подарка шести ученикам таким образом, что каждый ученик получил не более одного подарка?

2. Студент сдает экзамены по математике и сопромату (каждый не более двух раз). События: A_1 – {получил “неуд.” по математике}; B_1 –{получил “неуд.” по сопромату}; A_2 – {получил “уд.” по математике}; B_2 – {получил “уд.” по сопромату}; A_3 – {получил “хор.” по математике}; B_3 – {получил “хор.” по сопромату}; A_4 – {получил “отл.” по математике}; B_4 – {получил “отл.” по сопромату}. Записать пространство элементарных исходов и события: C – {оба экзамена сданы со второго раза}; D – {сдан хотя бы один экзамен}; E– {сданы оба экзамена, причем один из них на “хор.”}; F – {математика сдана

на “отл.”, а сопромат – со второго раза на положительную оценку}.

3. В урне находятся 5 белых и 7 черных шаров. Из урны извлекают 2 шара. Что более вероятно: что шары одного цвета или разных цветов?

4. Среди населения 34% имеют I группу крови, 36% – II группу, 22% – III и 8% – IV. Человеку, имеющему IV группу крови, можно перелить кровь любой другой группы, человеку со II или III группой можно перелить кровь той же или I группы, а человеку с I группой – кровь только I группы. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайного донора.

5. Два равносильных шахматиста играют матч из *n* партий. Выигравшим считается тот, кто победит в большем числе партий. В каком матче больше шансов выиграть любому из участников: в матче из 8 или из 12 результативных партий?

6. Подбрасывается 3 игральные кости. *X* – случайная величина, которая принимает значения: –1, если на всех костях одинаковое число очков; 0, – если на костях разное число очков; 1 – в остальных случаях. Найти: а) закон распределения; б) *M(X)*; *D(X).* Построить: а) многоугольник распределения; б) *F(x)*.

7. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le -1;\\ \dfrac{a}{1+x^2},\ -1<x<1;\\ 0,\ x\ge 1.\end{cases}$$

Найти: а) неизвестный параметр *a*; б) функцию распределения *F(x)*; в) *M(X), D(X)*; г) построить графики функций *f(x)* и *F(x).*

8. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону распределения с параметрами a=16 км и σ=100 м. Записать функции распределения и плотности вероятности этой случайной величины и найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами от 15,75 до 16,3 км.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 на места первого ряда.

а) Сколько имеется способов разместить на места в первом ряду пришедших 6 человек?

б) Какова вероятность того, что из трёх выбранных наугад билетов 2 окажутся на места первого ряда?

2. Вероятность прийти на финиш первым в любом из заездов для мотоциклиста равна 0,8. Найти вероятность того, что мотоциклист приедет первым хотя бы в двух заездах из трёх.

3. *У* сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом №1 и 4 детали – заводом №2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовлена заводом №1.

4. В специализированное отделение поступает в среднем 50% с заболеванием K, 30% с заболеванием L и 20% с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; болезни L – 0,8 и болезни M – 0,9.

а) Какой процент больных полностью излечивается?

б) Больной, поступивший в отделение, выписан здоровым. Какова вероятность того, что он страдал заболеванием K?

5. Какова вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным, если известно, что 3% всей продукции составляют нестандартные изделия, а 75% стандартных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта?

6. Студент знает 35 из 40 вопросов программы. Преподаватель задает три вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на эти вопросы?

7. В коробке лежат 30 электрических лампочек одинаковой величины, причем 12 из них рассчитаны на напряжение 220 В, а остальные 120 В. Какова вероятность того, что из четырех наудачу взятых одновременно электроламп две окажутся с напряжением 220.

8. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1200 испытаниях событие наступит 28 раз.

9. На производстве «Ломоносовской фарфоровый завод» выпускают фарфоровые статуэтки, которые отправляют в магазины по 200 штук в коробке. Вероятность повреждения статуэтки в пути равна 0,02. Найти вероятность повреждения в пути: а) более трех, но менее семи изделий; б) семи изделий в одной коробке.

10. Дальтоники составляют в среднем 0,1% населения. Найти вероятность того, что из 3000 человек окажутся: а) ровно десять дальтоников; б) не менее трех, но менее пяти дальтоников.

11. В партии из 10 изделий содержится 4 бракованных. С целью проверки из партии случайным образом отбирают 3 изделия. Случайная величина X– число бракованных изделий в выборке. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана функция распределения случайной величины X **.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < -1; \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{если} \; -1 \le x < 1; \\ 1, & \text{если} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Найти: $f(x), M(X), D(X)$.

Построить: $f(x), F(x)$.

Вычислить: $P\left(\dfrac{-1}{2} < x < \dfrac{1}{3}\right)$.

13. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

Вариант 2

1. Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры и решил набрать их наугад.

а) Сколько имеется способов набора этих цифр?

б) Какова вероятность набрать правильный номер, если абонент вспомнил, что 2 последние цифры различны и меньше 5?

2. Ящик содержит 90 деталей первого сорта и 10 деталей второго сорта. Наудачу извлекают 6 деталей. Какова вероятность того, что три из шести детали второго сорта?

3. В студии телевидения имеется 3 телекамеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

4. В цехе работают 20 станков, из которых 10 марки *A*, 6 марки *B* и 4 марки *C*. Вероятность того, что качество изделий, сделанных на этих станках, окажется отличным, соответственно равна 0,9; 0,8 и 0,7.

а) Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

б) Взятое наугад изделие оказалось отличного качества. Какова вероятность того, что оно изготовлено на станке марки А?

5. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения мишени при двух выстрелах равна 0,5. Найти вероятность поражения второй мишени.

6. При увеличении напряжения в 2 раза может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов соответственно с вероятностями 0,3;0,4;0,5. Определить вероятность того, что не будет разрыва в цепи.

7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах будет: а) три попадания; б) наивероятнейшее число попаданий; в) хотя бы три попадания.

8. Вероятность выигрыша в лотерею 0,025. Выпущено 400 билетов. Найти: а) количество билетов, которые надо купить, чтобы с вероятностью 0,09 можно было ожидать выигрыша; б) вероятность того, что выигрышных билетов будет от 10 до 15?

9. Вероятность случайного события равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие произойдет в большинстве случаев при 60 испытаниях?

10. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа каждого из них равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

11. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Наудачу выбираются три изделия. Построить закон распределения случайной величины X – числа бракованных изделий среди отобранных.

12. Задана функция распределения случайной величины *X*.

$$F=\begin{cases}0, & \text{если } x<1;\\ \dfrac{3\cdot x}{4}+\dfrac{3}{4}, & \text{если } -1<x<{}^{1}\!/_{3};\\ 1, & \text{если } x>{}^{1}\!/_{3}.\end{cases}$$

Найти: $f(x), M(X), D(X)$.

Построить: $f(x), F(x)$.

Вычислить: $P\left(\dfrac{-1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right)$.

13. В документации указано, что видеокарта ATi Radeon HD 4890 имеет частоту 900 МГц. Частота видеокарты является СВ Х, распределенной по нормальному закону с параметрами 900, 10 МГц. Найти вероятность того, что частота видеокарты будет превышать 910 МГц в этих условиях. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения случайной величины *X*.

Вариант 3

1. Среди имеющихся 10 одинаковых по внешнему виду телевизоров половина неисправных. Наугад выбирают 3 телевизора.

а) Сколько существует способов выбора трёх телевизоров из 10 имеющихся?

б) Какова вероятность того, что из трёх выбранных наугад телевизоров 2 окажутся исправными?

2. Стрелок произвел 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что цель будет поражена всеми тремя выстрелами?

3. В ящике лежат 10 заклепок, отличающихся друг от друга только материалом: 5 железных, 3 латунных, 2 медных. Наугад берут 2 заклепки. Какова вероятность того, что они будут из одного материала?

4. Число обучающихся в техническом университете юношей относится к числу девушек как 1:4. Каждый второй юноша занимается спортом. Среди девушек – спортсменок только 25%.

а) Какова доля студентов университета, занимающихся спортом?

б) Из списка спортсменов наугад выбрана фамилия. С какой вероятностью она принадлежит юноше?

5. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках.

6. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – равна 0,9, третий – равна 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы два экзамена будут сданы.

7. Каждый двадцатый кредит не возвращается в срок. В этом году банк планирует выдать около 300 кредитов. Найти вероятность того, что только не более 10 кредитов не будут возвращаться в срок, только 10 кредитов не будет возвращено в срок.

9. Телефонная станция обслуживает 10 000 абонентов. В течение определенного промежутка времени каждый из них может сделать вызов с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что общее число вызовов будет заключено между 1980 и 2040?

10 Вероятность сбить самолет выстрелом из винтовки равна 0,0004. Какова вероятность сбить самолет, если по нему будет сделано 2500 выстрелов.

11. Вероятность положительного ответа на первый вопрос анкеты равна 0,3; на второй – 0,5; на третий – 0,4. Случайная величина X – число вопросов, на которые даны положительные ответы. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12.Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \dfrac{a}{x^4}, & -1 \le x < 2; \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(1 < x < 2)$.

13. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина) и равна 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 40 мм.

Вариант 4

1. На первом курсе студенты слушают лекции по восьми предметам. Первого сентября в расписание включают 4 лекции по разным предметам.

а) Сколько имеется способов составить расписание на первое сентября?

б) Какова вероятность того, что студент, не знающий расписания, угадает все предметы, по которым будут прочитаны лекции 1 сентября?

2. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

3. В бригаде 15 человек, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранной смене будет мужчин не менее двух человек.

4. В трех одинаковых коробках упакованы изделия. В первой коробке 20% изделий с дефектом, во второй коробке 10% дефективных изделий, а в третьей все изделия без дефекта.

а) Какова вероятность того, что наугад взятая деталь из наудачу выбранной коробки будет без дефекта?

б) Наугад взятая деталь из наудачу выбранной коробки оказалась без дефекта. Какова вероятность того, что она взята из третьей коробки?

5. Два охотника стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в цель равна 0,7, для второго равна 0,8. Какова вероятность хотя бы одного попадания в волка, если:

а) охотники делают по одному выстрелу;

б) по два выстрела.

6. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью 1/4 попадает в любую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

7. В партии очень большого объема имеется 95% небракованных изделий. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 изделий будет менее двух бракованных?

8. Фамилия каждого десятого мужчины начинается с буквы М. Найти вероятность того, что среди 900 солдат полка окажется от 70 до 100 солдат, чьи фамилии начинаются с буквы М.

9. В подъезде многоэтажного дома 60 лампочек. Вероятность того, что каждая лампочка окажется исправной, равна 0,9. Найти вероятность того, что в течение года перегорит больше половины лампочек.

10. Завод отправил на склад 500 изделий. Для каждого изделия вероятность повреждения при транспортировке равна 0,008. Найти вероятность того, что среди прибывших на склад изделий будет: а) хотя бы 2 поврежденных изделия; б) 5 поврежденных изделий.

11. В магазине револьвера 4 патрона. Стрелок попадает в цель с вероятностью 90% и стреляет до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана функция распределения случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ \dfrac{(x^2-x)}{2} & 1\le x<2; \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$$

Найти: $f(x), M(X), D(X)$.

Построить: $f(x), F(x)$.

Вычислить: $P\left(\dfrac{-1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right)$.

13. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным трем. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее чем её математическое ожидание. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $e = 2{,}72$.

Вариант 5

1. В беге участвуют 6 студентов одинаково подготовленных. Трое из них получают призовые места.

а) Сколько имеется способов распределения призовых мест с учетом их порядка? (Места между спортсменами не делятся, то есть каждый занимает лишь одно место).

б) Какова вероятность того, что болельщик угадает тройку лидеров? (Без учета их мест).

2. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность поражения хотя бы одним выстрелом.

3. На заводе по производству стиральных машин 10% продукции содержит брак. Отдел контроля обнаруживает 95% брака. Остальные машины поступают на реализацию. Найти вероятность того, что купленная стиральная машина не содержит брака.

4. На строительную площадку поступает кирпич от трех производителей. Первый производитель поставляет 50% кирпича, второй – 30%, третий – 20%. Среди кирпичей первого производителя 40% высшего качества, второго – 60%, а третьего – 80%. Каменщик взял один кирпич.

а) Определить вероятность того, что кирпич высшего качества.

б) Оказалось, что кирпич высшего качества. Какова вероятность того, что он поставлен первым производителем.

5. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

6. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $P1 = 0,1$; $P2 = 0,15$; $P3 = 0,2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

7. Простой рабочего в течение смены может произойти по двум независимым причинам: а) разладе станка; б) непоступлении материала. Вероятность разлада станка в течение смены равна 0,1, а непоступления материала равна 0,005. Определить вероятность того, что в течение смены произойдет простой рабочего.

8. Вероятность изготовления прибора повышенной точности равна 0,3. Какова вероятность того, что среди 500 изготовленных приборов будет 140 приборов повышенной точности?

9. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0,02, если вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5.

10. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что деталь будет отштампована с браком, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 отштампованных деталей будет:

а) ровно одна бракованная;

б) хотя бы одна кованая?

Каково наивероятнейшее число деталей, бракованных среди этих 200?

11. У пользователя имеются 4 электрические лампочки, каждая из которых может оказаться бракованной с вероятностью 0,3. Пользователь ввинчивает лампочки по одной до загорания лампочки. Случайная величина X – число использованных лампочек. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана функция распределения случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0; \\ 3x^2+2x & \text{при } 0\le x<\dfrac{1}{3}; \\ 1, & \text{при } x\ge\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти: $f(x), M(X), D(X)$.

Построить: $f(x), F(x)$.

Вычислить: $P\left(-1<x<{}^{1}\!/_{4}\right)$.

13. Из пункта С ведется стрельба из орудия вдоль прямой СК. Предполагается, что дальность полета распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратичным отклонением 5 м. Определить (в %), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 м. Ответ записать с одним знаком после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(14)=0{,}5$; $\Phi(1)=0{,}3413$, $\Phi(2)=0{,}4772$, $\Phi(3)=0{,}4986$.

Вариант 6

1**.** В партии из 24 калькуляторов имеется 6 неисправных. Из партии наугад выбирают 4 калькулятора.

а) Сколько имеется способов выбрать все 4 калькулятора неисправными?

б) Какова вероятность того, что в числе отобранных четырёх калькуляторов 2 будут исправными?

2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии первый сигнализатор сработает, равна 0,95; для второго эта вероятность с равна 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

3. Группа состоит из двух стрелков. Найти вероятность попадания в цель каждым стрелком, если известно, что вероятность совместного попадания в цель при условии, что каждый сделает независимо друг от друга по одному выстрелу, равна 0,56, а вероятность совместного промаха 0,06.

4. Три станка производят соответственно 50, 30 и 20% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 1, 2 и 1,5%.

а) Какова вероятность того, что выбранное наугад изделие окажется бракованным?

б) Известно, что изделие забраковано. Какова вероятность того, что оно изготовлено на третьем станке?

5. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего для первого станка, равна 0,3, для второго равна 0,5 и для третьего равна 0,6. Найти вероятность того, что:

а) в течение часа хотя бы один станок не потребует внимания рабочего;

б) в течение двух часов ни один станок не потребует внимания рабочего.

6. Вероятность того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равна 0,8; 0,4 и 0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трех друзей.

7. Изделия некоторого производства содержат 9% брака. Найти вероятность того, что среди 5 наугад взятых изделий окажется хотя бы одна бракованная.

8. В новом доме установлено 340 лампочек. Вероятность перегореть в течение месяца для каждой лампочки равна 0,015. Какова вероятность того, что в течение месяца перегорят не менее двух лампочек?

9. Вероятность того, что первокурсник окончит университет, равна 0,4. На первый курс поступили 1500 абитуриентов. Найти: а) количество выпускников университета, которое через 4 года можно ожидать с вероятностью 0,01; б) вероятность того, что через 4 года выпускников университета будет не менее 590, но не более 605?

10. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,002. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Найти вероятность того, что с опечатками окажутся от 3 до 5 страниц.

11. На полке стоят 10 одинаковых папок с делами, из которых 4 дела ведет следователь Иванов. Случайным образом извлечены 3 папки. Случайная величина X – число дел следователя Иванова в выбранных папках. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана плотность распределения случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} & 0\le x<3; \\ 0, & x\ge 3. \end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(-1<x<1)$.

13. Количество килокалорий в одном авокадо является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону, и в среднем равно 208 Ккал. Взята партия авокадо. Оказалось, что 5% авокадо содержит не более 200 Ккал. Найти среднее квадратическое отклонение количества килокалорий в одном авокадо. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения случайной величины.

Вариант 7

1. В студсовете 15 человек, из которых 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава выбирают наугад 5 человек на предстоящую конференцию.

а) Сколько всего имеется способов выбора делегации на конференцию?

б) Какова вероятность того, что все первокурсники попадут на конференцию?

2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии первый сигнализатор сработает, равна 0,95; для второго эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

3. Студент отвечает на вопросы экзаменатора. Вероятность того, что он верно ответит на первый вопрос, равна 0,5. Если он правильно ответит на этот вопрос, то ему задают второй. Вероятность того, что оба ответа будут правильными, равна 0,45. Найти вероятность того, что он верно ответит на второй вопрос.

4. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше, чем производительность второго. Первый автомат дает в среднем 10% бракованных деталей, а второй – 5%.

а) Какой процент бракованных деталей поступает на конвейер?

б) Взятая наугад деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь произведена 1-м автоматом?

5. Два орудия ведут стрельбу по танку. Вероятность попадания в танк для первого орудия равна 0,5, для второго – 0,4. Найти вероятность хотя бы одного попадания в танк, если из каждого орудия сделано по 3 выстрела.

6. Вероятность того, что книга имеется в фондах первой библиотеки, равна 0,5, второй – 0,7, третьей – 0,4. Определить вероятность наличия книги в фондах хотя бы одной библиотеки.

7. Вероятность прибытия поезда без опоздания равна 0,9. Предполагая опоздание различных поездов независимыми событиями, определить вероятность того, что из 5 поездов опоздает не более двух.

8. Вероятность того, что появление события в каждом из независимых испытаний равна 0,64. Проведено 144 испытания. Найти вероятность того, что относительная частота явления событий отклонится от вероятности 0,64 по абсолютной величине на 0,04.

9. Вероятность того, что в партии, состоящей из 600 телевизоров, каждый из них не потребует ремонта, равна 0,8. Найти вероятность того, что от 300 до 500 телевизоров из этой партии не потребуют ремонта.

10. Вероятность того, что лампа останется исправной после 2000 часов работы, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 5 ламп после 2000 часов работы останутся исправными:

а) ровно 2;

б) не менее трех.

11. Экспедиция издательства отправила газеты в 3 почтовых отделения. Вероятность их своевременной доставки равна соответственно 90, 85 и 80%. Случайная величина X– число почтовых отделений, получивших газеты вовремя. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана плотность распределения случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(x-3)^2, & 0\le x<3;\\ 0, & x\ge 3.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(-1<x<1)$.

13. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия ошибок равна 1370 м? Ответ записать с двумя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(0{,}54)=0{,}2054$, $\Phi(1)=0{,}3413$, $\Phi(3)=0{,}4986$.

Вариант 8

1. Студенту нужно в течение 9 дней сдать 4 экзамена так, чтобы в последний день был экзамен. Каким количеством способов это можно сделать?

2. В вагоне едут шесть пассажиров. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на одной из пяти остановок. Какова вероятность того, что на одной остановке выйдут четыре пассажира, а на другой два?

3. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,64. Найти вероятность двух попаданий при двух выстрелах.

4. В опытном хозяйстве 90% всех семян обработали стимуляторами роста. Если семена были обработаны, то лишь 0,05% выросших из этих семян растений подвержены заболеваниям, для необработанных семян этот процент выше – 1,2%.

а) Найти вероятность того, что случайно взятое растение не болело.

б) Было взято здоровое растение. Найти вероятность того, что семена этого растения не были обработаны.

5. Два орудия ведут стрельбу по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого орудия равна 0,6, для второго – 0,5. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень, если из каждого орудия сделано по два выстрела.

6. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга элементов. Вероятность безотказной работы первого элемента равна 0,85, второго равна 0,72. Определить вероятность безотказной работы прибора.

7. Вероятность прибытия поезда без опоздания равна 0,9. Предполагая опоздание различных поездов независимыми событиями, определить вероятность того, что из 5 поездов опоздает не более одного.

8. В палатку к геологам залетели 1173 комара. В течение часа каждый комар может быть пойман геологами с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что через час в палатке останется ровно 470 комаров (пойманные комары уничтожаются)?

9. В лотерее выигрывает каждый третий билет. Куплено 500 билетов. Какова вероятность того, что число выигравших билетов заключено между 140 и 175?

10. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа каждого из них равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из них.

11. Из колоды, содержащей 36 карт, берут наудачу 4 карты. Случайная величина X равна количеству королей среди взятых карт.

12. Задана плотность распределения случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ a\cdot x^3, & 1\le x<3;\\ 0, & x\ge 3.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(-1<x<1)$.

13. Завод изготовляет шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 мм, и средним квадратическим отклонением 0,4 мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие диаметром 10,7 мм, и все, проходящие через круглое отверстие диаметром 9,3 мм. Какой процент шариков в среднем будет отбраковываться?

Вариант 9

1. В лотерее 100 билетов, из которых 20 выигрышные. Участник купил 5 билетов.

а) Сколько имеется способов приобрести все 5 билетов выигрышными?

б) Какова вероятность того, что из 5 купленных билетов выигрышных будет 3?

2. Десять осветительных лампочек для елки включены в цепь последовательно. Вероятность для любой лампочки перегореть при повышении напряжения в сети равна 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при повышении напряжения в сети.

3. Пусть вероятность попадания в движущуюся цель при одном выстреле постоянна и равна 0,25. Сколько необходимо сделать выстрелов для того, чтобы с вероятностью не меньшей 0,76 иметь хотя бы одно попадание?

4. Предприятие выпускает изделия, каждое из которых может оказаться дефектным. Готовая продукция осматривается одним из двух контролеров, которые работают с одинаковой интенсивностью. Вероятность, что первый контролёр обнаружит дефект, – 95%, для второго контролера эта вероятность – 90%.

а) Найти вероятность того, что бракованное изделие будет обнаружено в цехе.

б) Известно, что изделие забраковано. Найти вероятность того, что оно обнаружено вторым контролером.

5. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,5, для второго – 0,6 и для третьего – 0,7. Какова вероятность, что в мишень попали ровно 2 пули?

6. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 11. Чему равна вероятность того, что первые два дня августа будут дождливыми?

7. Вероятность хотя бы одного появления события при четырёх независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события *A* при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

8. Монета подбрасывается 100 раз. Найти вероятность того, что отклонение относительной частоты появления герба от вероятности его появления при одном броске будет меньше чем 0,15.

9. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе руды равна 0,7. Отобрано 400 таких проб руды. Определить вероятность того, что число проб с промышленным содержанием металла среди них окажется не менее 275.

10. Владельцы кредитных карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели кредитную карточку для произвольного владельца равна 0,001. Всего банк выдал карточки 2000 клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна:

а) хотя бы одна;

б) ровно одна карточка.

Найти наивероятнейшее число карточек, теряемых за неделю.

11. Рабочий обслуживает одновременно 4 станка, из которых на первом вероятность нарушения нормальной работы составляет 10%, на втором – 15%, на третьем – 20%, на четвертом –- 25%. Случайная величина *X* – количество нормально работающих станков. Составить закон распределения случайной величины *X* и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана функция распределения случайной величины *X*.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-3; \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{3} & -3\le x<3; \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию $f(x)$;

б) $M(X), D(X), \delta(x)$;

в) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$.

13. Октановое число автомобильного бензина марки АИ-95 является случайной величиной X и подчинено нормальному закону со средней плотностью, равной 95 и средним квадратичным отклонением – 0,3. Найти вероятность того, что плотность бензина будет не менее 95,3. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения случайной величины X.

Вариант 10

1. На девяти карточках написаны цифры от 0 до 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число.

а) Сколько имеется способов выбора двух карточек из 9 имеющихся?

б) Найти вероятность того, что образованное число будет четным?

2. Три станка работают независимо. Вероятность того, что первый станок во время смены выйдет из строя, равна 0,1; для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,2 и 0,3. Найти вероятность того, что:

1) 2 станка выйдут из строя;

2) все 3 станка выйдут из строя.

3. В мешке смешаны нити, среди которых 30% белых, а остальные красные. Найти вероятность того, что вынутые наудачу 2 нити будут одного цвета.

4. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники.

1) Какова вероятность того, что выбранное наугад лицо страдает дальтонизмом? (соотношение мужчин и женщин 48 к 52).

2) По списку дальтоников выбран наугад человек. Какова вероятность, что это мужчина?

5. Среди облигаций займа половина выигрышных. Сколько облигаций надо взять, чтобы быть уверенным в выигрыше хотя бы на одну облигацию с вероятностью, большей 0,95?

6. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

7. Вероятность одного появления события при 10 независимых опытах равна 0,5. Какова вероятность появления события A три раза?

8. В среднем 1% студентов не имеют смартфона. Какова вероятность того, что из 500 студентов факультета: а) не менее четырех не имеют смартфона; б) не имеют смартфона 5 студентов.

9. Среди студентов первого курса каждый третий получил минимальный проходной балл при сдаче ЕГЭ по математике. Опрошено 500 студентов. Какова вероятность того, что число студентов, перешагнувших через минимальный порог при сдаче ЕГЭ, колеблется между 140 и 175?

10. Вероятность повреждения аппаратуры при транспортировке равна 0,002. Какова вероятность того, что при перевозке 3000 изделий будут повреждены не более 3?

11. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2 , второй – 0,3 , третий – 0,4. Составить закон распределения числа непринятых вызовов, если после первого же принятого вызова прием заканчивается, а также найти среднее значение этой случайной величины.

12. Задана функция распределения случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3;\\ A(x-2) & -3\le x<3;\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

Найти:

а) функции $F(x)$ и $f(x)$;

б) $M(X), D(X), \delta(x)$;

в) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$.

13. Автомат изготовляет подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превосходит 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если X – случайная величина, распределенная нормально с $\sigma = 0{,}4$ мм?

Вариант 11

1. В ящике имеется 15 деталей, 10 из которых окрашены. Сборщик наугад вынимает 4 детали.

1) Сколькими способами можно выбрать все 4 детали окрашенными?

2) Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся 3 окрашенных?

2. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком равна 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

3. Студент выучил 20 вопросов из 25. Ему предлагается ответить на 3 случайно заданных вопроса. Какова вероятность того, что он ответит: а) на все 3 вопроса; б) только на 2 вопроса; в) только на 1 вопрос; г) ни на один вопрос; д) хотя бы на один вопрос?

4. Сборщик получает 50% деталей завода №1, 30% – завода №2, 20% – завода №3. Вероятность того, что деталь первого завода отличного качества, равна 0,7; для второго и третьего заводов эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена заводом №1.

5. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее на удачу. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более чем в 3 места.

6. Вероятность перегорания 1, 2 и 3-й ламп равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной, двух и трех ламп равны соответственно 0,25; 0,6 и 0,9. Определить вероятность выхода прибора из строя.

7. Каждый пятый клиент приходит в банк брать процент с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания 6 человек. Найти вероятность того, что из них будут брать проценты:

а) только 2 человека;

б) хотя бы 1.

8. Бракованные изделия составляют 3% всей продукции завода. Какова вероятность того, что из 300 наудачу взятых изделий окажется: а) не более 3 некачественных изделий; б) 4 или 5 некачественных изделий.

9. Имеется 800 коробок с шурупами. Вероятность наличия хотя бы одного дефектного шурупа в любой из коробок равна 0,4. Какова вероятность того, что не меньше 350 коробок содержат дефектные шурупы?

10. В среднем левши составляют 1%. Какова вероятность того, что среди 200 студентов найдутся 4 левши?

11. Вероятность того, что из трех независимых процессов адвокат выиграет первый процесс, 90%, для второго процесса эта вероятность 50%, для третьего 60%. Случайная величина X – число выигранных процессов. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана функция распределения случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<1; \\ \dfrac{x^2-x}{2} & \text{при } 1\le x<2; \\ 1, & \text{при } x\ge 2. \end{cases}$$

Найти: $f(x), M(X), D(X)$.

Построить: $f(x), F(x)$.

Вычислить: $P(1<x<1{,}5)$.

13. Диаметр деталей, изготовленных цехом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Дисперсия ее равна 0,0001 см^2, а математическое ожидание 2,5 см. В каких границах можно практически гарантировать диаметр детали (за достоверное принимается событие, вероятность которого 0,9973)?

Вариант 12

1. Из партии из 20 изделий, в которой 2 бракованных, ОТК проверяет половину и признает годной всю партию, если среди проверенных изделий бракованных не более одного.

1) Сколько имеется способов выбрать на проверку все изделия небракованными?

2) Какова вероятность того, что партия этих изделий будет признана годной?

2. В урне находится 10 шаров, пронумерованных от 0 до 10. Наудачу извлекают сначала один шар, смотрят его номер и кладут назад в урну. Ту же операцию проделывают еще 2 раза. Какова вероятность того, что последовательно появятся шары с номерами 1,2,3?

3. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок, равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего какие-либо два станка.

4. Из 50 первокурсников экономического факультета 20 человек сдали вступительный экзамен по математике на отлично, 25 человек на хорошо и остальные на удовлетворительно. На первой экзаменационной сессии свои отличные оценки подтвердили 10%, хорошие оценки подтвердили 60% студентов, все «троечники» снова получили по три балла.

а) Какова доля студентов, подтвердивших свои оценки, полученные на вступительном экзамене?

б) Студент Петров подтвердил свою оценку. Какова вероятность того, что он отличник по математике?

5. Вероятность того, что изготовленная на одном станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность – 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

6. Электрическая цепь имеет два параллельно соединенных дублирующих друг друга элемента и один элемент, соединенный с ними последовательно. Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение заданного времени равна 0,9. Отказ каждого элемента не зависит от отказа других. Определить вероятность безотказной работы всей цепи.

7. В партии арбузов 80% спелых, остальные недоспелые. Наугад отобраны 4 арбуза. Найти вероятность того, что среди них:

а) не менее трёх спелых;

б) не все спелые.

8. Вероятность появления герба при бросании гнутой монеты равна 0,45. Монету бросают 660 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет при этом 295 раз?

9. По дороге в течение одной секунды с вероятностью p=0,46 проезжает автомобиль. Какова вероятность того, что количество автомобилей, проехавших по дороге в течение часа, заключено между 1600 и 1700?

10. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытание.

11. Два стрелка стреляли по мишени независимо друг от друга.

Вероятность попадания первым в цель равна 0,3, вторым – 0,4. Составить закон распределения общего числа попаданий.

12. Задана плотность распределения случайной величины *X*.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{(x-3)^2}{9}, & 0\le x<3;\\ 0, & x\ge 3.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр *a*;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д) вычислить: $P(0<x<1)$.

13. Рост взрослых женщин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Математическое ожидание ее пусть равно 164 см, а среднее квадратическое отклонение 5,5 см. Найти плотность вероятности и функцию распределения этой случайной величины. Вычислить вероятность того, что ни одна из пяти наудачу выбранных женщин не будет иметь рост более 160 см.

Вариант 13

1. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Две из них одна за другой извлекаются наугад и укладываются на стол в порядке их появления.

1) Сколько имеется способов выбора двух карточек из пяти имеющихся?

2) Какова вероятность, что число на второй карточке будет больше, чем на первой?

2. Вероятность прийти на финиш первым в любом из заездов для мотоциклиста равна 0,8. Найти вероятность того, что мотоциклист победит в двух заездах из трёх?

3. Среди 50 электроламп три нестандартные. Найти вероятность того, что две взятые одновременно электролампы окажутся нестандартными.

4. В магазин поставляется минеральная вода с объемом тары 0,5 и 1,5 л от четырех производителей в соотношении 1:2:3:4. 90% бутылок у первого производителя составляют бутылки объема 0,5 л, 75% – у второго, 40% – у третьего, 50% – у четвертого. Покупатель приобрел бутылку минеральной воды.

1) Найти вероятность того, что была приобретена бутылка объема 1,5 л.

2) Покупатель приобрел бутылку объема 1,5 л. Найти вероятность того, что она от четвертого производителя.

5. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определённой последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель каждого из охотников одинаковые и равны по 0,8. Найти вероятность того, что будет произведено:

а) один;

б) два;

в) три;

г) четыре выстрела.

6. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на одной кости очков будет больше.

7. Ящик содержит сто деталей первого сорта и 10 деталей второго сорта. Наудачу извлекают три детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна из трех деталей второго сорта?

8. Партия изделий содержит 150 изделий первого сорта, 30 изделий второго сорта, 16 третьего сорта и 4 бракованных. Найти вероятность того, что из трех одновременно взятых изделий все окажутся одного сорта.

9. Срок службы энергосберегающей лампы является случайной величиной X и подчинен нормальному закону распределения. Ее средний срок службы равен 15 000 ч , а среднее квадратическое отклонение равно 1000 ч . Какова вероятность того, что лампа проработает от 14 000 до 17 000 ч ?

10. На хранении 500 деталей. Вероятность порчи одной детали равна 0,002. Найти вероятность того, что при хранении испортится:

а) не более двух деталей,

б) равно 3 деталям.

Найти ожидаемое количество испорченных деталей.

11. Следователь может получить нужную ему информацию от четырёх свидетелей. Вероятность того, что каждый из свидетелей предоставит следователю необходимую информацию, равна соответственно 0,6; 0,5; 0,4; 0,3. Следователь производит опрос свидетелей в указанном порядке до получения нужной информации. Случайная величина X – число опрошенных свидетелей. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана функция распределения случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<2; \\ (x-2)^2, & \text{при } 2\le x<3; \\ 1, & \text{при } x\ge 3. \end{cases}$$

Найти: $f(x), M(X), D(X)$.

Построить: $f(x), F(x)$.

Вычислить: $P(1<x<1{,}5)$.

13. Длительность безотказной работы прибора имеет показательное распределение с параметром 0,01. Найти вероятность того, что за время $x = 70$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Вариант 14

1. Группа лиц из 8 человек занимают места в ряду, где имеется 8 мест.

1) Сколько имеется различных способов разместиться по местам?

2) Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

2. Три станка работают независимо. Вероятность того, что первый станок в смены выйдет из строя, равна 0,1; для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,2 и 0,3. Найти вероятность того, что:

1) хотя бы один станок выйдет из строя;

2) только один станок выйдет из строя.

3. Найти наименьшее число монет, которое необходимо бросить, чтобы вероятность утверждения, что выпадет хотя бы один герб, превосходила 0,999.

4. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 25% всех деталей, второй 35% , третий 40%. В продукции первого рабочего брак составляет 5%, в продукции второго 4%, в продукции третьего 2%.

1) Найти вероятность того, что случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной.

2) Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной? Какова вероятность того, что она изготовлена вторым рабочим?

5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найти вероятность поражения цели.

6. В группе 75% сдали все экзамены и зачеты, а 25% имеют академическую задолженность. Найти вероятность того, что среди 5 наугад выбранных студентов окажутся без академической задолженности не более двух студентов.

7. В партии арбузов 80% спелых, остальные недоспелые. Наугад отобраны 4 арбуза. Найти вероятность того, что среди них:

а) не менее трёх спелых;

б) не все спелые.

8. Производится 700 независимых испытаний. В каждом из них событие A появляется с вероятностью 0,4. С какой вероятностью можно гарантировать появление события A в 300 испытаниях?

9. Методами современной экстрасенсорики установлено, что люди с аномальным биомагнитным полем встречаются с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что среди наудачу выбранных 10 000 человек количество людей, обладающих указанным свойством, заключено между 3950 и 4100?

10. В среднем 2% студентов носят контактные линзы. Найти вероятность того, что из 400 студентов факультета: а) не менее четырёх носят контактные линзы; б) контактные линзы носят 3 или 5 студентов.

11. Следователь может получить нужную ему информацию от четырёх свидетелей. Вероятность того, что каждый из свидетелей предоставит следователю необходимую информацию, равна соответственно 0,6; 0,5; 0,4; 0,3. Следователь производит опрос свидетелей в указанном порядке до получения нужной информации. Случайная величина X – число опрошенных свидетелей. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана плотность распределения случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x+4)}{21}, & \text{при } -4\le x\le -1;\\ A(x-3), & \text{при } -1<x\le 3;\\ 0, & \text{при } x<-4, x\ge 3.\end{cases}$$

Найти: $f(x), M(X), D(X)$.

Построить: $f(x), F(x)$.

Вычислить: $P(-2<x<2)$.

13. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным 3 годам. Определить вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(1{,}66)=0{,}4515$, $\Phi(1)=0{,}3413$, $\Phi(0)=0$.

Вариант 15

1. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 на места первого ряда.

1) Сколько имеется способов разместить на места в первом ряду пришедших 6 человек?

2)Какова вероятность того, что из трёх выбранных наугад билетов 2 окажутся на места первого ряда?

2. Вероятность прийти на финиш первым в любом из заездов для мотоциклиста равна 0,8.

Найти вероятность того, что мотоциклист приедет первым хотя бы в двух заездах из трёх.

3. В магазин поступает 6 кухонных гарнитуров, изготовленных заводом №1 и 4 гарнитура – заводом №2. Два покупателя приобрели по одному гарнитуру. Найти вероятность того, что хотя бы один из них окажется изготовлен заводом №1.

4. Иван Иванович на даче посадил 5 флоксов, 10 роз и 8 хризантем. Эти растения требуют особого укрытия и все-таки иногда вымерзают. В Сибири в суровые зимы вымерзают в среднем 50% флоксов, 60% роз и 20% хризантем. Весной было освобождено от укрытия одно из растений.

1) Найти вероятность того, что это растение успешно перезимовало.

2) Растение успешно перезимовало. Найти вероятность того, что это была роза.

5. Какова вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным, если известно, что 3% всей продукции составляют нестандартные изделия, а 75% стандартных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта?

6. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равно 0,936. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

7. Вероятность сдачи зачета для каждого из 14 студентов равна 0,3. Найти вероятность того, что зачет сдадут 6 студентов.

8. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 произведенных изделий окажется стандартных не менее 84.

9. Проверяется качество 950 изделий. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,95. Найти: а) интервал, в который будет заключено число стандартных изделий среди проверенных, с вероятностью 0,9; б) вероятность того, что среди проверенных будет равно 910 стандартных изделий.

10. Устройство состоит из 2500 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного из них в течение гарантийного срока равна 0,002. Найти вероятность отказа в течение гарантийного срока: а) ровно четырех узлов; б) не менее трех, но менее шести узлов.

11. В партии из 8 изделий содержится 4 бракованных. С целью проверки из партии случайным образом отбирают 3 изделия. Случайная величина X – число бракованных изделий в выборке. Составить закон распределения случайной величины X и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

12. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \text{ } или \text{ } x>4,\\ a(x^2-5x+4), & 1<x<4.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д) вычислить: $P(1<x<2)$.

13. Цена деления шкалы амперметра равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка меньшая, чем 0,04, но большая, чем 0,03.

Вариант 16

1. У одного студента есть 7 разных книг по математике, а у другого – 9. Каким количеством способов они могут обменять 3 книги одного на 3 книги другого?

2. Ящик содержит 90 деталей первого сорта и 10 деталей второго сорта. Наудачу извлекают 3 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна из трех деталей второго сорта?

3. В студенческой столовой имеется три комплексных обеда. Для каждого обеда вероятность того, что он имеется в наличии в послеобеденное время, равна 0,8. Найти вероятность того, что студент, пришедший после обеда, застанет хотя бы один комплексный обед.

4. У Ивана Ивановича на даче растут три сорта крупноплодных томатов: «алсу» (6 кустов), «сахарный бизон» (8 кустов), «бычье сердце» (10 кустов). Процент крупных плодов (более 400 грамм) на кустах различный: 50, 30, 80% соответственно. Иван Петрович взял помидор для салата.

а) Найти вероятность того, что ему попался крупный помидор.

б) Был взят крупный помидор. Найти вероятность того, что взятый помидор сорта «бычье сердце».

5. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения мишени при двух выстрелах равна 0,5. Найти вероятность поражения второй мишени.

6. На производстве стиральных машин с конвейера сходит 2% бракованных изделий. Служба контроля обнаруживает 97% брака. Остальные машины попадают в розничную сеть продаж. Найти вероятность того, что купленная стиральная машина не бракованная.

7. В партии из 100 деталей 5 бракованные. Наудачу отобрали 10 деталей. Найти вероятность того, что среди них будет 3 бракованных изделия.

8. Стая пустынной саранчи, состоящая из миллиона особей, подверглась химической обработке. Вероятность гибели отдельного насекомого составляет при этом 0, 75. Какова вероятность того, что после обработки количество насекомых будет заключено между 249 000 и 251 000?

8. Вероятность того, что студент первого курса окончит институт, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 1000 первокурсников только 110 студентов не окончат институт?

10. Машинистка сделала 10 опечаток в 20 000 символах. Найти вероятность того, что при печати 2000 символов будет сделано 2 опечатки.

11. На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомобилю дальнейшее движение. Найти закон распределения вероятностей числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

12. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ или } x>3;\\ \dfrac{2x}{5}, & 0<x<1;\\ a, & 1<x<3.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$.

13. Производят взвешивание вещества. Случайная ошибка взвешивания распределена нормально с математическим ожиданием 20 кг и средним квадратичным отклонением 2 кг. Найти вероятность того, что вес вещества отличается от математического ожидания не более чем на 100 г. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления.

Вариант 17

1. Среди имеющихся в прачечной 12 одинаковых по внешнему виду стиральных машин половина неисправных. Для стирки белья наугад выбирают 4 машины.

а) Сколько существует способов выбора 4 машин из 12 имеющихся?

б) Какова вероятность того, что из 4 выбранных наугад машин 2 окажутся исправными?

2. Спортсмен произвел 3 прыжка в длину. Вероятность выполнить квалификационную норму при одном прыжке равна 0,95. Какова вероятность того, что норма будет выполнена всеми тремя прыжками?

3. В ящике лежат 10 заклепок, отличающихся друг от друга только материалом: 5 железных, 3 латунных, 2 медных. Наугад берут 2 заклепки. Какова вероятность того, что они будут из одного материала?

4. Число обучающихся в университете потребительской кооперации юношей относится к числу девушек как 1:4. Каждый второй юноша занимается спортом. Среди девушек – спортсменок только 25%.

а) Какова доля студентов университета, занимающихся спортом?

б) Из списка спортсменов наугад выбрана фамилия. С какой вероятностью она принадлежит юноше?

5. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках.

6. Вероятность изготовления изделия первого сорта равна 0,9. Сколько должно быть изготовлено изделий, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было бы ожидать, что среди них есть хотя бы одно изделие первого сорта?

7. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Найти вероятность 6 попаданий из 10 бросков.

8. Вероятность случайного события равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие произойдет в большинстве случаев при 60 испытаниях?

9. Методами современной экстрасенсорики установлено, что люди с аномальным биомагнитным полем встречаются с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что среди наудачу выбранных

10 000 человек количество людей, обладающих указанным свойством, заключено между 3950 и 4100?

10 Считается, что вероятность встретить белую ворону составляет 0,0003. Некий орнитолог встретил за свою жизнь 10 000 ворон. Какова вероятность того, что ровно три из них были белыми?

11. Вероятность того, что случайно выбранный пассажир электропоезда Москва – Тула везёт с собой самовар, равна 0,05. Наудачу выбираются 4 пассажира указанного поезда. Случайная величина *X* равна количеству тех из них, которые везут с собой самовар.

12. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<-1 \text{ или } x>4; \\ \dfrac{(x+1)}{12}, & \text{при} \quad -1<x<3; \\ a, & \text{при} \quad 3<x<4. \end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр *a*;

б) функцию *F(x)*;

в) *M(X), D(X)*;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(2<x<3)$.

13. Каждый двадцатый кредит не возвращается в срок. В этом году банк планирует выдать около 300 кредитов. Найти вероятность того, что только не более 10 кредитов не будут возвращаться в срок.

Вариант 18

1. На первом курсе студенты изучают восемь предметов, по которым число лекций и практик совпадает. В понедельник расписание должно содержать одну лекцию и три практики.

а) Сколько имеется способов составить расписание на понедельник?

б) Какова вероятность того, что студент, не знающий расписания, угадает все предметы?

2. Вероятность того, что баскетболист сумеет бросить мяч по кольцу, равна 0,4. Вероятность того, что мяч попадет в корзину, равна 0,1. Найти вероятность того, что баскетболист принесет очки команде, если ему достался мяч.

3. В корзине с грибами 15 грибов, из них 3 белых. Вынимают 3 гриба. Найти вероятность того, что при случайном выборе будет не менее двух белых грибов.

4. В группе спортсменов 10 пловцов, 12 гимнастов и 8 теннисистов. Вероятность выполнить квалификационную норму для пловца 0,9; для гимнаста 0,7; для теннисиста 0,8.

а) Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

б) Выбранный наудачу спортсмен выполнил норму, какова вероятность того, что он теннисист?

5. Два охотника стреляют в лису. Для первого охотника вероятность попадания в цель равна 0,6, для второго равна 0,7. Какова вероятность хотя бы одного попадания в лису, если:

а) охотники делают по одному выстрелу;

б) по два выстрела.

6. Чтобы приготовить торт «Королевский», состоящий из 3 коржей, необходимы изюм, грецкие орехи и мак (все остальные ингредиенты для приготовления торта у хозяйки уже есть). Вероятность того, что хозяйка найдет эти ингредиенты в соседнем магазине, равна 0,5; 0,4; 0,1 соответственно.

а) Найти вероятность того, что хозяйке не удалось испечь торт.

б) Торт не был испечен. Найти вероятность того, что хозяйка не смогла найти мак.

7. Брак на производстве стиральных машин составляет 8%. Найти вероятность того, что из взятых наугад шести машин, будет: а) пять небракованных; б) наивероятнейшее число небракованных; в) хотя бы четыре небракованные машины.

8. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брака) равна 0,02. Сверла вкладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что в наудачу взятой коробке число бракованных сверл окажется не более 3?

9. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найти вероятность того, что будет: а) хотя бы два попадания в десятку; б) только два попадания в десятку.

10. По дороге в течение одной секунды с вероятностью, равной 0,46, проезжает автомобиль. Какова вероятность того, что количество автомобилей, проехавших по дороге в течение часа, заключено между 1600 и 1700?

11. Одновременно бросают три монеты. Найти закон распределения случайной величины X – числа выпавших гербов.

12. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<1 \text{ или } x\geq 2;\\ \dfrac{a}{x^4}, & \text{при } 1\leq x<2.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр a;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(-1<x<1{,}5)$.

13. Трамваи данного маршрута идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 1 мин после ухода предыдущего трамвая, но не позднее чем за 2 мин до отхода следующего трамвая? Ответ записать с одним знаком после запятой без округления.

Вариант 19

1. У одного студента есть 7 разных шляп, а у другого – 9. Каким количеством способов они могут обменять 3 шляпы одного на 3 шляпы другого?

2. Сколько нужно взять игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,8, можно ожидать выпадения трех очков хотя бы на одной кости?

3. В вазе 16 конфет, из них три «Красные Шапочки». Найти вероятность того, что при случайном выборе половины конфет все «Красные Шапочки» будут в одной половине.

4. Первая партия состоит из 15 одинаковых изделий, среди которых 2 бракованных. Во второй партии 20 таких изделий, из которых 3 бракованных. Наудачу взятое изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно окажется из первой партии.

5. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что: а) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания; б) для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.

6. Дана система S, состоящая из двух независимых блоков a_1 и a_2, такая, что она исправна тогда и только тогда, когда исправен хотя бы один из блоков: a_1 или a_2. Надежность каждого блока равна 0,8. Найти надежность системы.

7. Прыгун в воду прыгает 6 раз. Вероятность того, что он наберет за один прыжок более 80 очков, равна 0,3. Найти вероятность того, что прыгун в воду наберет более 80 очков: а) 4 раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы 5 раз.

8. Вероятность изготовления изделия первого сорта равна 0,9. Сколько должно быть изготовлено изделий, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было бы ожидать, что среди них есть хотя бы одно изделие первого сорта?

9. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0,02; если вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5.

10. Аппаратура состоит из 10 000 элементов, каждый из которых выходит из строя за время T с вероятностью $p = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятность того, что за время T откажут: а) ровно 3 элемента; б) не менее пяти элементов.

11. На полке 4 книги, одна из которых – «Краткий курс теории вероятностей», остальные книги не имеют отношения к теории вероятностей. Студент, желающий подготовиться к экзамену по теории вероятностей, берет наудачу книги с полки (по одной), пока не возьмет нужную. Случайная величина X равна количеству взятых книг.

12. Задана плотность распределения случайной величины X.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-4)}{3}, & \text{при } x \in [4;5]; \\ A, & \text{при } x \in (5;6]; \\ 0, & \text{при } x \notin [4;6]. \end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр A;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(3 < x < 5)$.

13. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку, равную 5 м, и среднее квадратическое отклонение случайной ошибки – 75 м. (Предполагается, что возникающие ошибки распределены по нормальному закону.) Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м?

Вариант 20

1. В партии из 20 смартфонов имеется 4 неисправных. Из партии наугад выбирают 3 телефона.

а) Сколько имеется способов выбрать все 3 телефона неисправными?

б) Какова вероятность того, что в числе отобранных трёх телефонов два будут исправными?

2. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при пожаре первый сигнализатор сработает, равна 0,98; для второго эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы один сигнализатор.

3. Группа состоит из двух стрелков. Найти вероятность попадания в цель каждым стрелком, если известно, что вероятность совместного попадания в цель при условии, что каждый сделает независимо друг от друга по одному выстрелу, равна 0,56; а вероятность совместного промаха 0,06.

4. За неспортивный (технический) удар соперника в баскетболе назначается штрафной бросок потерпевшей стороне. В предыдущих играх команд *A* и *B* игроки команды *A* чаще получали штрафные броски, чем игроки команды *B*. Из десяти штрафных, как правило, шесть приходится на команду *A*. Половина бросков у команды *A* являются успешными, а у команды *B* этот процент выше – 60%.

а) Был назначен штрафной бросок. Найти вероятность того, что он будет успешным.

б) Штрафной бросок оказался успешным. Найти вероятность того, что штрафной получила команда *A*.

5. Клиента в банке обслуживает 3 менеджера-консультанта. Вероятность того, что в течение десяти минут освободится первый консультант, равна 0,3, для второго равна 0,5 и для третьего равна 0,6. Найти вероятность того, что:

а) в 15 минут хотя бы один консультант освободится;

б) в 15 минут ни один консультант не освободится

6. Вероятность того, что каждый из трех друзей придет в условленное место соответственно равно 0,8; 0,4 и 0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трех друзей.

7. Изделия некоторого производства содержат 9% брака. Найти вероятность того, что среди 5 наугад взятых изделий окажется хотя бы одна бракованная.

8. Покупатель, зашедший в секцию сувениров, делает покупку с вероятностью, равной 0,25. Найти вероятность того, что из двадцати человек:

а) сделает покупку хотя бы один; б) ровно два.

9. В лотерее выигрывает каждый третий билет. Куплено 500 билетов. Какова вероятность того, что число выигравших билетов заключено между 140 и 175?

10. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,002. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Найти вероятность того, что с опечатками окажутся от 3 до 5 страниц.

11. Два равносильных противника играют в шахматы. Найти закон распределения случайной величины X – числа выигранных партий первым шахматистом в четырех партиях.

12. Задана плотность распределения случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} A\sin 3x, & \text{при } x\in\left(0;\pi/6\right]; \\ 0, & \text{при } x\notin\left(0;\pi/6\right] \end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр A;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P\left(0<x<\pi/12\right)$.

13. Случайная величина X – отклонение размера детали от стандарта – имеет нормальное распределение вероятностей со средним квадратическим отклонением, равным 0,2, и математическим ожиданием, равным 0. Найдите вероятность изготовления детали, отвечающей требованиям стандарта, если задан допуск $\pm$ 0,5. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\varPhi(2{,}5)=0{,}4938$, $\varPhi(1)=0{,}3413$, $\varPhi(0)=0$.

Вариант 21

1. Каким количеством способов можно выбрать 12 человек из 17, если среди них есть двое, которые хотят быть вместе?

2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии первый сигнализатор сработает, равна 0,95; для второго эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

3. Из последовательности чисел 1,....,20 выбирают наудачу 3 различных числа. Какова вероятность, что среди выбранных чисел есть хотя бы одно, кратное трём?

4. Футбольная команда за нарушение и недисциплинированное поведение наказывается тремя видами ударов: штрафной удар, пенальти, свободный удар. Замечено, что команда «Арсенал» получает из 10 наказаний-ударов в среднем 6 штрафных ударов, 1 пенальти и 3 свободных удара. Вероятность забить мяч противником в этом случае составит 0,3; 0,5; 0,2 соответственно.

а) Найти вероятность того, что команде забили мяч в результате наказания.

б) Команде забили мяч в результате наказания. Найти вероятность того, что команду наказали пенальти.

5. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,64. Найти вероятность двух попаданий при двух выстрелах.

6. Производится стрельба по самолету зажигательными снарядами. Горючее на самолете сосредоточено в четырех баках, расположенных в фюзеляже один за другим. Поверхности баков одинаковы. Чтобы зажечь самолет, достаточно попасть двумя снарядами либо в один и тот же бак, либо в соседние баки. Известно, что в область баков попало 2 снаряда. Найти вероятность того, что самолет загорится.

7. Вероятность хотя бы одного появления события при четырёх независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события А при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

8. В большой партии деталей бракованные составляют 1,2%. Детали упаковываются в коробки по 250 штук. Какова вероятность того, что в наудачу взятой коробке будет ровно 3 бракованные детали?

9. Телефонная станция обслуживает 10 000 абонентов. В течение определенного промежутка времени каждый из них может сделать вызов с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что общее число вызовов будет заключено между 1980 и 2040?

10. Дальтоники составляют в среднем 0,1% населения. Найти вероятность того, что из 3000 человек окажутся: а) ровно десять дальтоников; б) не менее трех, но менее пяти дальтоников.

11. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания в неё первым стрелком равна 0,5, вторым – 0,4. Составить закон распределения числа попаданий при двух выстрелах, найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

12. Задана плотность распределения случайной величины *X*.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1;\\ C\cdot x^3, & \text{если} \, 1<x<3;\\ 0, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр C;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$;

д)вычислить: $P(1<x<1{,}5)$.

13. Поезда метро идут с интервалом в 5 минут. Пассажир приходит на остановку в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 2 минуты после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за 2 минуты до прихода следующего. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – времени ожидания пассажира.

Вариант 22

1. В группе 20 человек, из которых 3 отличника, 5 хорошистов и 12 троечников. Из этого состава выбирают наугад 5 человек на предстоящую олимпиаду по математике.

а) Сколько всего имеется способов выбора делегации на олимпиаду?

б) Какова вероятность того, что все отличники попадут на олимпиаду?

2. 60% студентов на экзамене пытаются пользоваться мобильной связью. В 95% случаев преподаватель замечает это и переносит для этих студентов экзамен на другой день. Остальные студенты сдают его. Сколько студентов (в процентном отношении) сдали экзамен в этот день?

3. Компьютерный класс оборудован 15 компьютерами, 5 из которых неисправны. Какова вероятность того, что студент, пришедший на интернет - олимпиаду, выберет исправный компьютер, если он может сделать не более трех попыток поменять место.

4. В баскетбольной команде 5 игроков. Вероятности передач на каждого из них зависят от результативности их бросков по корзине и относятся как 3:3:2:1:1. Получив передачу, игроки забивают мяч в корзину с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3 соответственно.

а) Найти вероятность того, что после передачи на одного из игроков команды будет забит мяч.

б) Был забит мяч одним из игроков команды. Найти вероятность того, что мяч забил игрок под вторым номером.

5. Среди 20 экзаменационных билетов студент знает только 4. Найти вероятность вытащить счастливый билет, если экзаменатор дает не более двух попыток вытянуть экзаменационный билет.

6. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула находится в первом справочнике, – 0,6; во втором – 0,7; в третьем – 0,8. Определить вероятность наличия формулы хотя бы одном справочнике.

7. Определить вероятность того, что партия из 50 изделий, среди которых 4 нестандартных, будет принята при испытании произвольно выбранной половины партии, если по условию приема допускается не более одного нестандартного изделия.

8. Вероятность того, что появление события в каждом из независимых испытаний равно 0,9. Проведено 100 испытаниях. Найти вероятность того, что событие появится хотя бы в пяти испытаниях.

9. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Производится 800 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий заключено между 540 и 580?

10. Вероятность попасть в самолёт из винтовки при одном выстреле равна 0,005. Производится 1000 выстрелов. Какова вероятность того, что будет не менее трёх попаданий?

11. В партии из 20 деталей 3 бракованные. Наудачу отобрали 6 деталей. случайная величина X – число бракованных изделий среди 6 отобранных. Найти: а) закон распределения случайной величины X;

б) $M(X)$, $D(X)$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

12.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1;\\ A\cdot x^2, & \text{если} \, 1\le x<3;\\ 0, & \text{если} \quad x\ge 3.\end{cases}$$

Найти:

а) неизвестный параметр A;

б) функцию $F(x)$;

в) $M(X)$, $D(X)$;

г) построить графики $f(x)$, $F(x)$.

13. Вероятность хотя бы одного появления события при четырёх независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

Вариант 23

1. В корзине 100 огурцов, из которых 20% горьких. Мария Николаевна выбрала 5 огурцов.

а) Сколько имеется способов выбрать все 5 огурцов горькими?

б) Какова вероятность того, что из 5 выбранных огурцов будет 3 горьких?

2. Десять осветительных приборов включены в цепь последовательно для освещения территории автостоянки. Вероятность для любого прибора перегореть при повышении напряжения в сети равна 0,2. Определить вероятность того, что территория останется без освещения при повышении напряжения в сети.

3. Вероятность попадания в движущуюся цель при одном выстреле постоянна и равна 0,15. Сколько необходимо сделать выстрелов для того, чтобы с вероятностью не меньшей 0,55 иметь хотя бы одно попадание?

4. Магазин рыболовных товаров торгует палатками с хлопковым покрытием и брезентовым покрытием от трех поставщиков. Палатки поступают от трех производителей в соотношении 2:3:5. Среди палаток от первого поставщика 60% имеют брезентовое покрытие, от второго – 40%, от третьего – 30%. Покупатель приобрел одну палатку.

а) Найти вероятность того, что была приобретена палатка с брезентовым покрытием.

б) Покупатель приобрел палатку с брезентовым покрытием.

Найти вероятность того, что она от второго поставщика.

5. Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что число 6 появится: а) 2 раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы один раз.

6. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события *A* – появление туза, *B* – появление карты красной масти. Зависимы или независимы эти события.

7. Найти вероятность выигрыша в автомобильных соревнованиях «Формула 1» гоночного болида фирмы «Ferari», если за предшествующие 10 лет болиды этой фирмы занимали первое место 8 раз. В кубковом зачете принимают участие претенденты на первое место: 2 команды фирмы Renaylt; 3-Ferari;3- Mercedes;1-Honda.

8. Хлебопекарня выпекает 70% продукции из пшеницы высшего сорта с содержанием белка не менее12 %, остальная прдукция выпекается из муки высшего сорта с меньшим содержанием белка. Какова вероятность того, что среди 70 наугад выбранных изделий будет 60 изделий из пшеницы высшего сорта с содержанием белка не менее 12 %.

9. В среднем 8 рыб из 10 имеют вес, близкий к 370 граммам. Найти вероятность того, что не менее половины из 80 пойманных рыб будет иметь вес, близкий к 370 граммам.

10. Производятся испытания 500 приборов. Вероятность отказа любого из них равна 0,008. Какова вероятность того, что при испытаниях откажут более двух приборов?

11. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равно 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

12. Задана функция распределения случайной величины *X*.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ (x-2)^2 & 2\le x<3; \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию $f(x)$;

б) $M(X), D(X), \delta(x)$;

в) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$;

д)вычислить: $P(-1<x<1{,}5)$.

13. Процент содержания золы в угле является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием, равным 16%, и средним квадратическим отклонением 4%. Определить вероятность того, что в наудачу взятой пробе угля будет от 12 до 24% золы.

Вариант 24

1. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Каким количеством способов это можно сделать?

2. Вероятность прийти на финиш первым в любом из заездов для автомобилистов равна 0,9. Найти вероятность того, что автомобилист победит в трех заездах из четырех?

3. Из 10 книг, находящихся на книжной полке, 4 сборника стихов. Найти вероятность того, что взятые наугад 3 книги – сборники стихов.

4. Василий Иванович треть семян томатов обработал стимулятором роста эпином, треть семян – цирконом. Эпин приводит к повышению урожайности томатов в среднем на 18%, а циркон – на 21%, а остальные семена он не обрабатывал. Василий Иванович проанализировал урожайность одного куста томатов.

а) Найти вероятность того, что урожайность этого куста была повышена.

б) Был взят куст томатов повышенной урожайности. Найти вероятность того, что он был обработан цирконом.

5. При стрельбе из орудий поражение цели возможно или при попадании в цель осколков снаряда, разорвавшегося вблизи от цели, или же при прямом попадании. Прямое попадание в цель стрелком танка происходит в 40% случаев, а в 50% снаряд разбивается вблизи от цели. Найти вероятность поражения цели.

6. Лучник стреляет 8 раз. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) 4 раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы 1 раз.

7. Ожидается прибытие трех судов с бананами. Статистика показывает, что в 1% случаев груз бананов портится в дороге. Найти вероятность того, что придут с испорченным грузом:

а) одно судно;

б) два судна;

в) все три;

г) ни одного.

8. В книге 900 страниц. Вероятность наличия опечатки на одной странице равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что в книге не меньше 320 опечаток?

9. Вероятность того, что случайно выбранный пассажир электропоезда Москва – Омск не прошел электронную регистрацию, равна 0,25. Найти вероятность того, что из всех пассажиров плацкартного вагона четверть не прошли электронную регистрацию, если всего пассажиров в вагоне 52 человека.

10. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,1. Найти вероятность того, что из 5 ламп после 1000 часов работы останутся исправными:

а) ровно 2; б) не менее трех.

11. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Составить закон распределения числа выстрелов, производимых до первого поражения цели, если наибольшее число выстрелов пять.

12. Задана функция распределения случайной величины *X*.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^2}{4} & 0 \le x < 2; \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию $f(x)$;

б) $M(X)$,$D(X)$,$\delta(x)$;

в) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$;

д)вычислить: $P(1 < x < 2)$.

13. Рост мужчины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 170 см, и дисперсией, равной 49 см^2. Найти вероятность того, что трое наугад выбранных мужчин будут иметь рост от 170 до 175 см. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(1{,}28) = 0{,}3997$, $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(0) = 0$.

Вариант 25

1. Группа лиц из 8 человек занимают места в ряду, где имеется 8 мест.

а) Сколько имеется различных способов разместиться по местам?

б) Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

2. Три станка работают независимо. Вероятность того, что первый станок в смены не выйдет из строя, равна 0,6; для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы один станок выйдет из строя;

б) только один станок выйдет из строя.

3. Найти наименьшее число монет, которое необходимо бросить, чтобы вероятность утверждения, что выпадет хотя бы один герб, превосходила 0,999.

4. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 25% всех деталей, второй 35%, третий 40%. В продукции первого рабочего брак составляет 5%, в продукции второго – 4%, в продукции третьего – 2%.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной.

б) Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым рабочим?

5. При попадании камнем в ствол дерева с него взлетает стая птиц с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что стая взлетела, если вероятность попадания камнем в ствол дерева равна 0,96.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найти вероятность поражения цели.

7. В группе 75% сдали все экзамены и зачеты, а 25% имеют академическую задолженность. Найти вероятность того, что среди 5 наугад выбранных студентов окажутся без академической задолженности не более двух студентов.

8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях.

9. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 произведенных изделий окажется стандартных не менее 84.

10. Сложное электронное устройство состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью 0,003. Найти вероятность того, что: а) за время T откажут ровно 4 элемента; б) за время T откажут более трех элементов.

11. Из партии, состоящей из 100 изделий, среди которых 10 бракованных, выбраны случайным образом четыре изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке.

12. Задана функция распределения случайной величины X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ (x-2)^2 & 2 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию $f(x)$;

б) $M(X), D(X), \sigma(x)$;

в) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$;

д)вычислить: $P(1 < x < 2)$.

13. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превосходит 0,77мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если X – случайная величина, распределенная нормально с $\sigma = 0{,}4$ мм.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. Задачи математической статистики

Математическая статистика возникла и создавалась параллельно с теорией вероятностей в XVII в. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX и начало XX в.) обязано в первую очередь П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову и др.

Математическая статистика – раздел математики, который посвящен способам получения выводов из *опытных данных* (результатов наблюдений). Поскольку математическая статистика изучает общие закономерности массовых явлений в абстрактной форме, безразличной к природе рассматриваемых объектов, ее выводы могут быть применены к самым разнообразным явлениям при условии, что в них реально осуществляются основные положения общей теоретической схемы.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Отсюда вытекают основные разделы математической статистики.

1. Теория оценок.

Эта теория позволяет приближенно вычислить и оценить параметры случайных величин (математическое ожидание, дисперсию и т.д.) *по данным опыта.*

2. Статистическая проверка гипотез.

Эта теория позволяет проверить справедливость интересующих нас гипотез *по данным опыта*.

3. Дисперсионный анализ.

Эта теория позволяет найти слабые (статистические) зависимости между величинами, т. е. направлена на поиск зависимостей в экспериментальных данных путём исследования значимости различий в средних значениях. В данном пособии будут рассмотрены только первые два раздела.

§ 2. Выборка из генеральной совокупности. Вариационный ряд. Гистограмма относительных частот

Определим основные понятия математической статистики. Предположим, что исследуется случайная величина X. Раз за разом воспроизводится опыт, в результате которого случайная величина X принимает какое-то значение. Но закон распределения X нам неизвестен. Как его определить? Очевидно, нет другой возможности, чем раз за разом проводить опыты, фиксировать значения, которые принимает случайная величина, и пытаться по ряду этих значений определить ее закон распределения, хотя бы приближенный. Совокупность всех значений, которые может принять случайная величина в результате проводимых опытов, называется *генеральной совокупностью* G.

Генеральная совокупность – достаточно большая совокупность однородных объектов, некоторая характеристика которых меняется случайным образом, от объекта к объекту. Наша цель научиться определять, как распределена эта характеристика по всей генеральной совокупности.

Исследовать все элементы генеральной совокупности невозможно и нецелесообразно, т.к. генеральная совокупность может быть очень велика. В связи с этим из генеральной совокупности отбирают определенное число элементов:

$$x_1,\quad x_2,\ldots,\ x_n \tag{2.1}$$

и их изучают. Результаты исследований показали, что выводы, сделанные по этим элементам, точно характеризуют данное явление. Такой метод называется выборочным. Часть объектов, которая попала на проверку, называется *выборочной совокупностью* X или просто *выборкой*.

Число элементов в генеральной совокупности и в выборке будем называть их объемами. Объем генеральной совокупности равен N, а выборки – n. Набор чисел (2.1) называют *элементами выборки* или *вариантами*. Расположенные в порядке возрастания значения $x_1,\quad x_2,\ldots,\ x_n$ образуют ряд, называемый *вариационным рядом:*

$x_{\min},\quad \ldots\quad, x_{\max}$ – вариационный ряд.

Число $R = x_{\max} - x_{\min}$ называется *размахом выборки*.

Для построения вариационного ряда выполним действия:

1. Разделим отрезок $[x_{\min},\quad x_{\max}]$ на некоторое число l интерва-

лов одинаковой длины $\Delta = \left(\dfrac{R}{k}\right)$. Величину κ приближенно вычисляют по формуле $l = [1 + 3{,}2\lg n]$, где n – объём выборки.

$$x_i = x_{i-1} + i\Delta.$$

2. Подсчитаем число элементов выборки, попадающих в каждый интервал:

$$n_1, n_2, \quad \dots \quad , n_m. \tag{2.2}$$

Очевидно, $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Числа (2.2) называются *частотами попадания в интервал.* Составим табл. 2.1.

Таблица 2.1

$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$		x_{n-1} -
n_i	n_1		n_m
$\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$	$\dfrac{n_1}{n}$		$\dfrac{n_m}{n}$

Элементы третьей строки называются *относительными частотами попадания в интервал.* Очевидно, $\dfrac{n_1}{n} + \dfrac{n_2}{n} + \dots + \dfrac{n_m}{n} = 1$.

Полученная таблица называется *выборочным распределением случайной величины* X.

3. Изобразим выборочное распределение на графике (рис. 2.1). Для этого на оси OX отложим интервалы $x_i - x_{i+1}$ и на каждом из них как на основании построим прямоугольник, площадь которого ω_i, т.е. высота i-го прямоугольника $\dfrac{\omega_i}{\Delta}$.

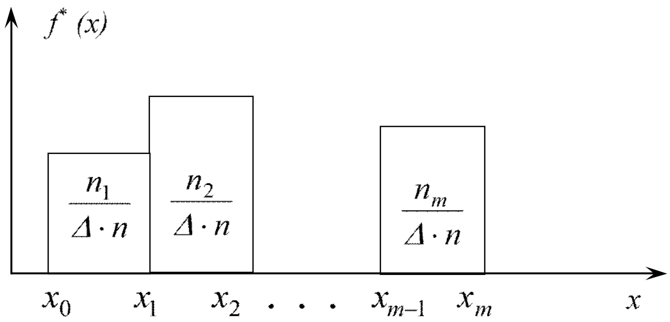

Рис. 2.1. Гистограмма относительных частот

Построенный график называется *гистограммой относительных частот* и представляет собой *выборочный аналог* плотности вероятности случайной величины. Площадь гистограммы равна единице.

Пример 1.

При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1,1,4,0,1,2,1,2,2,0,5,3,3,1,0,2,2,3,4,1. Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид (табл. 2.2).

Таблица 2.2

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$

§ 3. Эмпирическая функция распределения

Построим *выборочный аналог* функции распределения $F(x)$.

Для этого вначале на каждом интервале (рис. 2.2) выберем середину $\tilde{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ $(i = 1,\ldots,m)$ и составим табл. 2.3.

Таблица 2.3

$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_1$		$\tilde{x}_n$
n_i	n_1		n_m
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$		$\frac{n_m}{n}$

Определение. Выборочной (эмпирической) функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Таким образом, $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x,

n – объем выборки. Из определения эмпирической функции распределения видно, что ее свойства совпадают со свойствами $F(x)$, а именно:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$.
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

На оси ординат откладываем накопленные относительные частоты. Кружочки на графике означают, что соответствующие точки выброшены (рис.2.2).

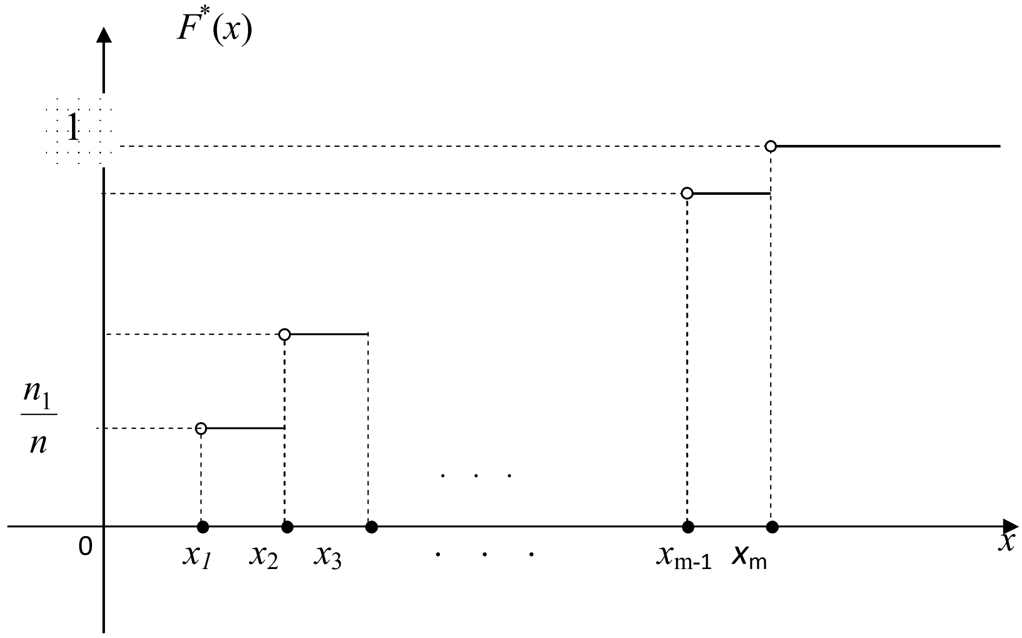

Рис. 2.2. Выборочная функция распределения

Можно доказать, что при достаточно большом объеме выборки и при достаточно мелком делении интервалов с практической достоверностью близка к истинной функции распределения $F(x)$.

§ 4. Числовые характеристики статистического распределения: выборочное среднее, дисперсия

Параметры распределения

Одна из задач математической статистики: по имеющейся выборке оценить значения числовых характеристик исследуемой случайной величины. Основными числовыми характеристиками выборки являются выборочное среднее $\overline{x}_в$ и выборочная дисперсия $D_в$.

Определение. *Выборочным средним* называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \text{ или } \bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i n_i}{n}. \tag{2.3}$$

Выборочное среднее $\bar{x}_в$ служит для точечной оценки математического ожидания $M(X)$ исследуемой случайной величины

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Определение. *Выборочной дисперсией* называется

$$D_в(X) = \frac{\sum_{i=1}^{l} (x_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i^{\,2} \cdot n_i}{n} - \bar{x}_в^{\,2}. \tag{2.4}$$

Выборочная дисперсия $D_в(X)$ служит для точечной оценки дисперсии $D(X)$.

Несмещенность, состоятельность, эффективность параметров распределения

Получив статистические оценки параметров распределения (выборочное среднее, выборочную дисперсию и т.д.), нужно убедиться, что они в достаточной степени служат приближением соответствующих характеристик генеральной совокупности. Определим требования, которые должны при этом выполняться.

Пусть θ^* – статистическая оценка неизвестного параметра θ теоретического распределения. Извлечем из генеральной совокупности несколько выборок одного и того же объема n и вычислим для каждой из них оценку параметра θ: $\theta_1^{\,*}, \theta_2^{\,*}, \theta_3^{\,*}, \ldots, \theta_n^{\,*}$.

Тогда оценку θ^* можно рассматривать как случайную величину, принимающую возможные значения $\theta_1^{\,*}, \theta_2^{\,*}, \theta_3^{\,*}, \ldots, \theta_n^{\,*}$.

1. Если математическое ожидание θ^* не равно оцениваемому параметру, мы будем получать при вычислении оценок систематические ошибки одного знака (с избытком, если $M(\theta^*) > 0$, и с недостатком, если $M(\theta^*) < 0$). Следовательно, необходимым условием отсутствия систематических ошибок является требование $M(\theta^*) = 0$.

Оценка θ^* называется *несмещенной,* если ее математическое ожидание совпадает с истинным значением параметра $\theta : M\left(\theta^*\right) = \theta$.

2. *Определение.* Оценка θ^* называется *эффективной,* если она несмещенная и при этом имеет наименьшую дисперсию (наименьший разброс относительно θ) по сравнению с другими несмещенными оценками параметра θ.

3. *Определение.* Оценка θ^* называется *состоятельной,* если при неограниченном увеличении объема выборки θ^* сходится по вероятности к истинному значению параметра $\theta : \theta^* \to \theta$ при $n \to \infty$.

Состоятельной несмещенной оценкой математического ожидания a является

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i n_i}{n}.$$

В отличие от выборочного среднего, выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности. Пользуясь оценкой $D_в$ вместо D, мы будем совершать некоторую систематическую ошибку, так как её математическое ожидание несколько меньше истинного значения. Чтобы её ликвидировать, достаточно ввести поправку, умножив $D_в$ на $\frac{n}{n-1}$. Таким образом, можно предложить другую оценку дисперсии – *исправленную дисперсию* s^2, вычисляемую по формуле $s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} (x_i - \overline{x}_в)^2 n_i}{n-1}$. Эта оценка является состоятельной несмещенной оценкой дисперсии D.

Такая оценка будет являться *несмещенной.* Ей соответствует *исправленное среднее квадратическое отклонение (СКО)*

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{l} (x_i - \overline{x}_в)^2 n_i}{n-1}}. \tag{2.5}$$

При больших n поправка $\frac{n}{n-1}$ становится близкой к единице и её применение теряет смысл.

Пример 1. Оптический пирометр установлен на светящуюся нить накала, различными операторами было произведено несколько измерений температуры. Получены следующие результаты (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Температура, °С	925	950	975	1000	1025	500
Число измерений	1	9	6	18	10	2

Требуется найти среднюю квадратическую и вероятную ошибки в предположении, что эта выборка взята из нормально распределенной совокупности.

Решение. Найдем сначала выборочное среднее значение $\overline{x}_в$.

Проще находить среднее для 1000 – x, а не для x (табл. 2.5).

Таблица 2.5

$1000–x_i$	Число измерений n	$n\cdot(1000–x_i)$	$(1000–x_i)^2$	$n\cdot(1000–x_i)^2$
1	2	3	4	5
75	1	75	5625	5625
50	9	450	2500	22500
25	6	150	625	3750
0	18	0	0	0
-25	10	-250	625	6250
-50	2	-100	2500	5000
$\sum_{i=1}^{l}$	46	325	–	43125

$$1000-\overline{x}_в=\frac{\sum_{i=1}^{l}x_i n_i}{n}=\frac{325}{46}=7{,}1 \text{ или } \overline{x}_в=1000-7{,}1=992{,}9°.$$

$$D_в(X)=\frac{\sum_{i=1}^{l}x_i^{\;2}\cdot n_i}{n}-\overline{x}_в^{\;2}=\frac{43125}{46}-7{,}1^2=887.$$

Найдем исправленную дисперсию s^2,

$$s^2=\frac{n}{n-1}D_в=\frac{46}{45}\cdot 887=906{,}7\ ^\circ\text{С}.$$

Интервальные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, что приводит к грубым ошибкам. Поэтому в таком случае лучше пользоваться *интервальны-*

ми оценками, то есть указывать интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение оцениваемого параметра. Разумеется, чем меньше длина этого интервала, тем точнее оценка параметра.

Поэтому, если для оценки θ^* некоторого параметра θ справедливо неравенство $|\ \theta^* - \theta\ | < \delta$, число $\delta > 0$ характеризует *точность оценки* (чем меньше δ, тем точнее оценка). Но статистические методы позволяют говорить только о том, что это неравенство выполняется с некоторой вероятностью.

Определение. *Доверительным интервалом* называется интервал $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$, в котором с заданной вероятностью γ заключено истинное значение неизвестного параметра θ. Величина γ называется доверительной вероятностью или надежностью. Из определения доверительной вероятности следует, что

$\gamma = P\ (\ \theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\ ).$

На практике обычно берут γ=0,95 или γ=0,99.

Рассмотрим построение доверительных интервалов для математического ожидания и среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины.

1. *Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.*

Если известно, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону с неизвестным средним квадратическим отклонением, то для поиска доверительного интервала для ее математического ожидания a построим новую случайную величину

$$T = \frac{\bar{x}_в - a}{s} \cdot \sqrt{n},$$

где $\bar{x}_в$ – выборочное среднее; s^2 – исправленная дисперсия; n – объем выборки. Эта случайная величина, возможные значения которой будем обозначать через t, имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Плотность распределения Стьюдента явным образом не зависит от a и σ (неизвестное СКО), а зависит только от n.

По определению доверительного интервала с заданной надежностью γ имеем

$$\gamma = P(\bar{x}_в - \delta < a < \bar{x}_в + \delta) = P(|\bar{x}_в - a| < \delta) =$$

$$= P\left(\frac{|\bar{x}_в - a| \cdot \sqrt{n}}{s} < \frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{s}\right) = P(|T| < t_\gamma), \qquad (2.6)$$

где $t_\gamma = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{s}$.

Число $t_\gamma(\kappa)$называется критерием Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 1$. Его определяем по таблице для распределения Стьюдента (прил. 3). При определении доверительных интервалов задаются обычно надежностями γ=1–α, равными 0,9; 0,95; 0,99. Затем из (2.6) определяем величину $\delta = \dfrac{s \cdot t_\gamma}{\sqrt{n}}$, которую находим из соотношения $t_\gamma = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{s}$. Таким образом, доверительный интервал с надежностью γ для математического ожидания a при неизвестном s есть интервал вида

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}.$$

При больших n (n >30) распределение Стьюдента практически совпадает с нормальным. В этом случае t_γ можно найти из уравнения

$$2\Phi(t_\gamma) = 1 - \alpha = \gamma.$$

Пример 2. По 25 деталям выборочные характеристики прочности X составили: $x_в$ = 3; s = 1,5. Найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X и точность оценки δ при γ= 0,99.

Решение. Из таблицы распределения Стьюдента (см. прил. 3) находим, что t_γ (n = 25; κ=25–1; α = 1–γ=1–0,99=0,01) = 2,80.

Тогда

$$3 - \frac{2{,}8 \cdot 1{,}5}{\sqrt{25}} < a < 3 + \frac{2{,}8 \cdot 1{,}5}{\sqrt{25}},$$

или 2,16< a < 3,84 – доверительный интервал, в который попадает a с вероятностью 0,99. Точность оценки δ = 0,84.

2. *Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.*

Пусть по выборке объёма n получено исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_в}$, которое является точечной оценкой среднего квадратического отклонения σ случайной величины X. Будем искать для s нормально распределенной случайной величины доверительный интервал вида $(s-\delta; s+\delta)$, где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение. По определению, доверительный интервал с заданной надежностью $P(\ |\sigma - s| < \delta\ ) = \gamma$ имеет вид $s-\delta<\sigma<s+\delta$.

Запишем это неравенство в виде $s\left(1-\frac{\delta}{s}\right)<\sigma<s\left(1+\frac{\delta}{s}\right)$ или обозначим $\frac{\delta}{s}=q$ и, подставив q в рассмотренное выше неравенство, получим

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q) \text{ при } q<1;$$

$$0<\sigma<s(1+q) \qquad \text{ при } q>1,$$

где $q=q(n,\gamma)$.

Существуют таблицы, из которых можно найти q по заданным n и γ (прил. 5). Случайная величина q имеет распределение, зависящее только от n.

Для дисперсии оценка имеет вид

$$s^2(1-q)^2 < D < s^2(1+q)^2 \text{ при } q<1;$$

$$0 < D < s^2(1+q)^2 \qquad \text{ при } q>1.$$

Пример 3. Произведено 20 измерений одним прибором некоторой случайной величины, имеющей нормальное распределение. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерений равно 1,3. Найти точность прибора с надежностью 0,95.

Решение. Точность прибора – это среднее квадратическое отклонение σ случайных ошибок измерений. По условию задачи, $n = 20$; $s = 1{,}3$. Найдем доверительный интервал для σ при заданной надежности $\gamma = 0{,}95$. По прил. 5 находим q ($n = 20$; $\gamma = 0{,}95$) = 0,37. Следовательно, границы доверительного интервала: 1,3(1–0,37) = 0,819 и 1,3(1+0,37) = 1,781. Итак, $0{,}819 < \sigma < 1{,}781$ с вероятностью 0,95.

3. *Доверительные интервалы для оценки дисперсии.*

Считаем, что математическое ожидание неизвестно, а известна только точечная несмещенная оценка дисперсии s^2. Тогда доверительный интервал для дисперсии, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 1-\alpha$, имеет вид

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} \le D \le \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}. \tag{2.7}$$

Так как по заданной вероятности γ можно построить множество доверительных интервалов для дисперсии, то принято χ_1^2 и χ_2^2 выбирать так, чтобы

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \text{ а } P(\chi^2 < \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2},$$

где числа χ_1^2 и χ_2^2 находят по прил. 4 при числе степеней свободы $k = n–1$ и соответственно при $p = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ и $p = \dfrac{\alpha}{2}$.

Пример 4. Пользуясь 90%-ным доверительным интервалом, оцените в условиях примера 2 изменение прочности деталей во всей генеральной совокупности.

Решение. По условию, n=25; s=1,5; γ=0,9. Найдем доверительный интервал для оценки дисперсии.

Согласно формуле (2.7) $\sqrt{\dfrac{(n-1)s^2}{\chi_2^2}} \le \sigma \le \sqrt{\dfrac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}}$, а так как при k=n–1=25–1=24 верхняя доверительная граница равна

$$\chi_2^2(p;\kappa) = \chi_2^2\left(\frac{1-\gamma}{2};\kappa\right) = \chi_2^2(0{,}05;24) = 36{,}4,$$

нижняя определяется как

$$\chi_1^2(p;\kappa) = \chi_1^2\left(1 - \frac{1-\gamma}{2};\kappa\right) = \chi_1^2(0{,}95;24) = 13{,}8 \text{ (см. прил.4)},$$

то $\sqrt{\dfrac{24 \cdot 1{,}5^2}{36{,}4}} \le \sigma \le \sqrt{\dfrac{24 \cdot 1{,}5^2}{13{,}8}}$ или $1{,}22 \le \sigma \le 1{,}98$ – эта оценка не симметрична относительно σ.

§ 5. Статистическая проверка статистических гипотез

Сопоставление высказанной гипотезы относительно генеральной совокупности с имеющимися выборочными данными, сопровождаемое количественной оценкой степени достоверности получаемого вывода и осуществляемое с помощью того или иного статистического критерия, называется проверкой статистических гипотез.

Определение. *Статистической гипотезой* называют гипотезу о виде неизвестного распределения генеральной совокупности или о параметрах известных распределений.

Определение. *Нулевой (основной)* называют выдвинутую гипотезу H_0. *Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Если выдвигаемая гипотеза сводится к утверждению о том, что значение некоторого неизвестного параметра генеральной совокупности в точности равно заданной величине, то эта гипотеза называется простой. В других случаях гипотеза называется сложной.

Выдвинутая нулевая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость статистической проверки справедливости основной гипотезы H_0 (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Нулевая гипотеза H_0	Результаты решения относительно H_0	
	Отклонена	Принята
Верна	Ошибка 1-го рода, её вероятность $P(H_1/H_0) = \alpha$	Правильное решение, его вероятность $P(H_0/H_0) = 1 - \alpha$
Неверна	Правильное решение, его вероятность $P(H_1/H_1) = 1 - p$	Ошибка 2-го рода, её вероятность $P(H_0/H_1) = p$

Так как проверка статистических гипотез осуществляется на основании выборочных данных, то решение неизбежно сопровождается вероятностью ошибочного заключения как в ту, так и в другую сторону.

В какой-то небольшой доле случаев нулевая гипотеза может оказаться отвергнутой, в то время как она справедлива. Такую ошибку называют *ошибкой первого рода*, а её вероятность – *уровнем значимости* α. Другими словами, это та вероятность, которой можно пренебречь.

Наоборот, в какой-то небольшой доле случаев нулевая гипотеза принимается, в то время как на самом деле она ошибочна. Такую ошибку называют *ошибкой второго рода*. Вероятность ошибки второго рода p. Вероятность $1 - p$ называют мощностью критерия.

Для проверки нулевой гипотезы пользуются специально подобранной случайной величиной, распределение которой известно. В общем случае её обозначают K – критерий согласия, устанавливающий, когда полученное в действительности указанное отклонение следует принять несущественным, а когда существенным. Критерий *К* является функцией от результатов наблюдения.

Пример. Пусть H_0 заключается в том, что математическое ожидание генеральной совокупности $a = 3$. Тогда возможные варианты H_1: а) $a \neq 3$; б) $a > 3$; в) $a < 3$.

Основной прием проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины, имеющей известный закон распределения.

Определение. *Статистическим критерием* называется случайная величина *К* с известным законом распределения, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Определение. *Критической областью* называют область значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, *областью принятия гипотезы* – область значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Поскольку критерий *К* – одномерная случайная величина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю или левостороннюю) и двустороннюю критические области.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{\text{кр}}$, где $k_{\text{кр}}$ – положительное.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{\text{кр}}$, где $k_{\text{кр}}$ – отрицательное число.

Односторонней называют правостороннюю или левостороннюю критическую область.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$; $K > k_2$, где $k_2 > k_1$.

Для отыскания критической области, как было сказано раньше, задаются уровнем значимости α. Критическую точку находят исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы выполнялись равенства:

а) для правосторонней критической области

$P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha$ $(k_{\text{кр}} > 0)$;

б) для левосторонней критической области

$P(K < k_{кр}) = \alpha$ ($k_{кр} <0$);

в) для двусторонней симметричной области

$P(K > k_{кр}) = (\alpha/2)$ ($k_{кр} > 0$), $P(K < -k_{кр}) = (\alpha/2)$.

Итак, процесс проверки гипотезы состоит из следующих этапов:

1. Выбирается статистический критерий K.
2. Вычисляется его значение $K_{выб}$ по имеющейся выборке.
3. Поскольку закон распределения K известен, определяется (по известному уровню значимости) *критическое значение* $K_{кр}$, разделяющее критическую область и область принятия гипотезы (например, если $P(K > K_{кр}) = \alpha$, то справа от $K_{кр}$ располагается критическая область, а слева – область принятия гипотезы).
4. Если вычисленное значение $K_{выб}$ попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается, если в критическую область – нулевая гипотеза отвергается. Таким образом, если $K_{выб} < K_{кр}$ – гипотеза принимается, если $K_{выб} > K_{кр}$ – гипотеза отвергается.

§ 6. Критерий Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины

С помощью критерия Пирсона можно проверять гипотезы о различных законах распределения. Для данного критерия в качестве величины, характеризующей степень различия между теоретическим и выборочным законами распределения, выбирается статистика

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i}, \tag{2.8}$$

которая учитывает расхождения между теоретическими n_i и выборочными n_i^* частотами. Эта случайная величина называется χ^2 («хи квадрат») статистикой Пирсона. Смысл ее очевиден: суммируются квадраты отклонений эмпирических частот от теоретических. Целью исследования является сравнение эмпирических и теоретических частот, которые, конечно, отличаются друг от друга, и выяснить, являются ли эти различия несущественными, не опровергающими гипотезу о выбранном законе распределении исследуемой случайной величины, или они настолько велики, что противоречат этой гипотезе.

Можно доказать, что вне зависимости от реального закона распределения генеральной совокупности, закон распределения случайной величины при $n \to \infty$ стремится к закону распределения с числом степеней свободы $k = l - 1 - r$, где r – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки, l-число интервалов. Для выбранного критерия строится критическая область, определяемая условием

$$P\left(\chi_{\text{выб}}{}^2 < \chi^2_{\text{крит}}(l;\alpha)\right) = \alpha,$$

где α – уровень значимости. Следовательно, критическая область задается неравенством $\chi_{\text{выб}}{}^2 < \chi^2_{\text{крит}}(l;\alpha)$, а область принятия гипотезы $\chi_{\text{выб}}{}^2 < \chi^2_{\text{крит}}(l;\alpha)$.

Таким образом, для проверки нулевой гипотезы H_0 *генеральная совокупность распределена по выбранному закону* – нужно вычислить по выборке наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{выб}} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i},$$

а по таблице критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{\text{крит}}(l;\alpha)$, используя известные значения α и $k = l - 1 - r$.

Если $\chi_{\text{выб}}{}^2 < \chi^2_{\text{крит}}(k;\alpha)$ нулевую гипотезу принимают, при $\chi_{\text{выб}}{}^2 > \chi^2_{\text{крит}}(k;\alpha)$ ее отвергают.

Замечание. Число параметров распределения r, оцененных по данным выборки для нормального и равномерного распределений равно двум, а для показательного – одному.

Из вышесказанного следует, что для проверки данной гипотезы H_0 необходимо найти теоретические и эмпирические частоты.

Пусть получена выборка достаточно большого объема n с большим количеством различных значений вариант. Для удобства её обработки разделим интервал от наименьшего до наибольшего из значений вариант на k равных частей по методике, предложенной в § 2. Будем считать, что значения вариант, попавших в каждый интервал, приближенно равны числу, задающему середину интервала. Подсчитав число вариант, попавших в каждый интервал, составим так называемую сгруппированную выборку (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Варианты $\bar{x}_i$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1$	…		$\tilde{x}_k$
Частоты n_i	n_1	n_2	…		n_k

Примечание. $\widetilde{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ – значения середин интервалов, а n_i – число вариант, попавших в i-й интервал (эмпирические частоты).

По полученным данным можно вычислить выборочное среднее $\bar{x}_в$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$. Тип закона определим по построенной гистограмме или из общих соображений. Например, ошибки измерений в основном распределены по нормальному закону, а надежность безотказной работы прибора – по показательному. Для проверки предположения, что генеральная совокупность распределена по выбранному закону с параметрами $M(X) = \bar{x}_в ; D(X) = \sigma_в^2$, необходимо вычислить теоретические частоты по формуле

$$n_i = p_i \cdot n,$$

где $p_i = p_i(x_i < X < x_{i+1}) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ – вероятность попадания в i-й интервал; n – объем выборки.

Здесь и далее $f(x)$ – функция плотности распределения вероятностей случайной величины X, выбранного закона распределения. Для простоты вычислений можно воспользоваться приближенной формулой вычисления определенного интеграла

$$p_i = p_i(x_i < X < x_{i+1}) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = f(\widetilde{x}_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = f(\widetilde{x}_i) \cdot h, \qquad (2.9)$$

где $\widetilde{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

Рассмотрим практические приёмы нахождения теоретических вероятностей и теоретических частот для основных законов распределения.

1. *Нормальный закон распределения.*

Функция плотности распределения задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_в \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x - \bar{x}_в)^2}{2\sigma_в^2}} = \frac{1}{\sigma_в} \cdot \varphi\left(\frac{x - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right).$$

График функции $f(x)$ называют нормальной кривой или кривой Гаусса (рис. 2.3).

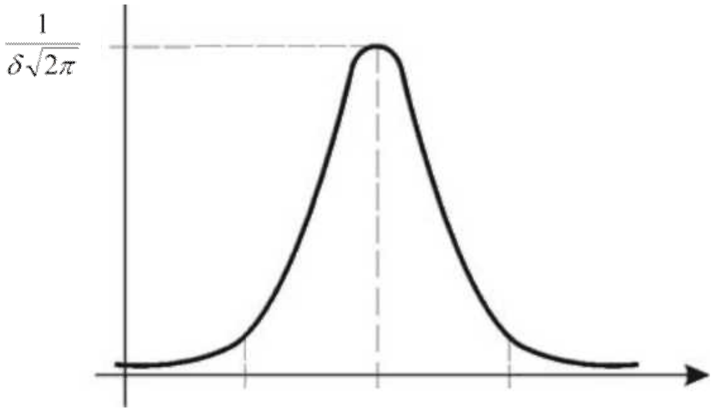

Рис. 2.3. Кривая Гаусса

Тогда вероятности p_i вычисляются по формуле

$$p_i = p_i(x_i < X < x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа, её значения находят по прил. 2.

Чаще всего пользуются приближенной формулой

$$p_i = p_i(x_i < X < x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{1}{\sigma_в} \cdot \varphi\left(\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}\right) \cdot \Delta,$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – табулированная функция (см. прил. 1).

Умножив полученные вероятности на объем выборки *n*, найдем теоретические частоты: $n_i = p_i \cdot n$.

2. *Равномерный закон распределения.*

При использовании критерия Пирсона для проверки гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности с предполагаемой плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \notin [a,b]; \\ \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \end{cases}$$

необходимо, вычислив по имеющейся выборке значения $\bar{x}_в$ и $\sigma_в^2$, оценить параметры *a* и *b*.

Рис. 2.4. График функции плотности равномерного распределения

Действительно, так как для равномерного распределения $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ и $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{12}}=\dfrac{a-b}{2\sqrt{3}}$, то оценки параметров a и b – концов интервала, в котором наблюдались возможные значения случайной величины X, находим из системы (2.10), где через a^* и b^* обозначены оценки соответствующих параметров равномерного распределения.

$$\begin{cases} \dfrac{b^*+a^*}{2}=\bar{x}_в; \\ \dfrac{b^*-a^*}{2\sqrt{3}}=\sigma_в. \end{cases} \tag{2.10}$$

Решая систему уравнений, получим

$$a^*=\bar{x}_в-\sqrt{3}\sigma_в,\ b^*=\bar{x}_в+\sqrt{3}\sigma_в.$$

Тогда теоретическое распределение будет иметь вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x\notin\left[a^*,b^*\right]; \\ \dfrac{1}{b^*-a^*}, x\in\left[a^*,b^*\right]. \end{cases}$$

Вероятности p_i вычисляются по формуле

$$p_i=p_i\left(x_i<X<x_{i+1}\right)=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{b^*-a^*}dx=\frac{x_{i+1}-x_i}{b^*-a^*}=\frac{\Delta}{b^*-a^*}.$$

Умножив полученные вероятности на объем выборки n, найдем теоретические частоты: $n_i=p_i\cdot n$.

3. *Показательный закон распределения.*

Функция плотности определяется формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0.\end{cases}$$

Вычислив по имеющейся выборке значения $\bar{x}_в$ и $\sigma_в^2$, необходимо оценить параметр λ. Для показательного распределения $M(X)=\frac{1}{\lambda}$. Следовательно, в качестве оценки параметра λ возьмём величину $\lambda^*=\frac{1}{\bar{x}_в}$. Тогда теоретическое распределение будет иметь вид

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ \frac{1}{\bar{x}_в}e^{-\frac{1}{\bar{x}_в}x}, x\ge 0.\end{cases}$$

Вероятности p_i вычисляются по формуле

$$p_i=p_i(x_i<X<x_{i+1})=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{\bar{x}_в}e^{-\frac{1}{\bar{x}_в}x}dx=e^{-\frac{1}{\bar{x}_в}x_i}-e^{-\frac{1}{\bar{x}_в}x_{i+1}}.$$

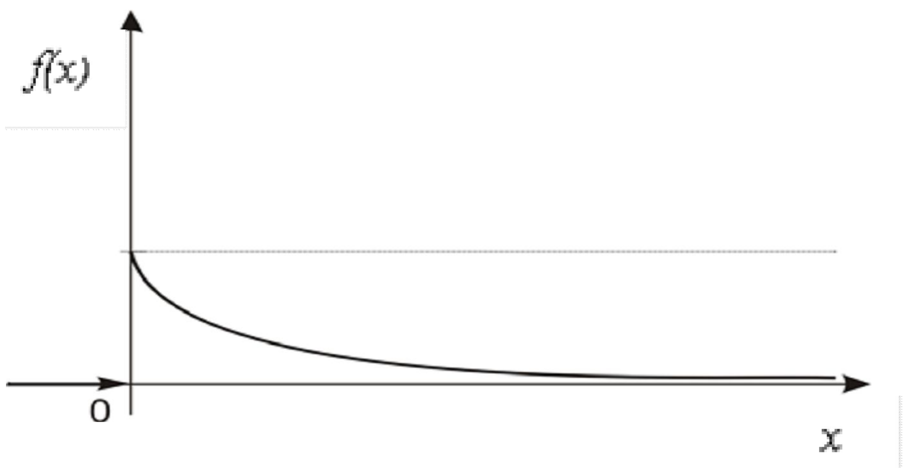

Рис. 2.5. График функции плотности показательного распределения

Чаще всего пользуются приближенной формулой

$$p_i=p_i(x_i<X<x_{i+1})=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx=\frac{1}{\bar{x}_в}e^{-\frac{1}{\bar{x}_в}\tilde{x}_i}\cdot\Delta,\ \text{где}\ \tilde{x}_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}.$$

Тогда теоретические частоты вычисляются по формуле

$$n_i=p_i\cdot n,$$

где n – объем выборки.

§ 7. Примеры проверки гипотез о законе распределения выборочных данных

Пример 1. В табл. 2.8 приведен вариационный ряд значений логарифма долговечности образцов диаметром 8 мм из алюминиевого сплава *АВ*, испытанных на консольный изгиб с вращением при напряжении σ_{max}=15 кгс/мм^2.

1. Составить выборочное распределение.

2. Построить гистограмму и график выборочной функции распределения.

3. Найти состоятельные несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с уровнем доверия $\gamma = 0{,}95$.

5. На основании анализа формы построенной гистограммы выдвинуть гипотезу о законе распределения и проверить справедливость гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 2.8

i	$x_i = \lg N_i$	i	$x_i = \lg N_i$	i	$x_i = \lg N_i$	i	$x_i = \lg N_i$
1	5,8669	26	6,3310	51	6,5224	76	6,7275
2	5,9164	27	6,3688	52	6,5431	77	6,7275
3	6,0216	28	6,3746	53	6,5464	78	6,7392
4	6,0386	29	6,3811	54	6,5578	79	6,7432
5	6,0426	30	6,3829	55	6,5603	80	6,7538
6	6,0445	31	6,3829	56	6,5607	81	6,7809
7	6,0645	32	6,3918	57	6.5654	82	6,7975
8	6,0799	33	6,3967	58	6.5655	83	6,7975
9	6,0821	34	6,4076	59	6,5793	84	6,7988
10	6,1062	35	6,4089	60	6,5823	85	6,8038
11	6,1082	36	6,4094	61	6,5916	86	6,8142
12	6,1183	37	6,4216	62	6,5957	87	6,8169
13	6,1186	38	6,4328	63	6,6096	88	6,8649
14	6,1238	39	6,4342	64	6,6471	89	6,8717
15	6,1605	40	6,4620	65	6,6474	90	6,8977
16	6,1685	41	6,4630	66	6,6739	91	6,9051
17	6,1746	42	6,4646	67	6,6739	92	6,9109
18	6,1801	43	6,4704	68	6,6780	93	6,9189
19	6,1892	44	6,4713	69	6,6896	94	6,9299
20	6,1951	45	6,4842	70	6,6916	95	6,9545
21	6,2071	46	6,4975	71	6,7000	96	7,0824
22	6,2100	47	6,4984	72	6,7086	97	7,1682
23	6,2297	48	6,5179	73	6,7132	98	7,2603
24	6,2608	49	6,5201	74	6,7178	99	7,2775
25	6,3115	50	6,5214	75	6,7197	100	7,4586

Решение

1. Сначала построим ранжированный ряд. В табл. 2.8 случайные величины уже представлены в виде ранжированного ряда. Ранжированный ряд – это перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака (см. табл. 2.8).

Для построения интервального вариационного ряда выполняем следующие действия:

1. Длина частичного интервала Δ задана и равна 10.

$$x_i = x_{i-1} + i\Delta,$$

где $i = 0,1,\ldots,n$; $x_0 = x_{\min} - \frac{\Delta}{2}$; $x_n = x_{\max} + \frac{\Delta}{2}$.

2. Подсчитаем число элементов (*частот*) выборки, попадающих в каждый интервал. Очевидно, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 100$.

Строим интервальный статистический ряд (табл. 2.9).

Таблица 2.9

i	Границы интервалов	Число наблюдений n_i
1	5,825 - 5,97	2
2	5,975 - 6,12	12
3	6,125 - 6,27	10
4	6,275 - 6,42	13
5	6,425 - 6,57	21
6	6,575 - 6,72	17
7	6,725 - 6,87	14
8	6,875 - 7,02	6
9	7,025 - 7,17	2
10	7,175 - 7,32	2
11	7,325 - 7,47	1

2. *Построение гистограммы плотностей относительных частот* – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной Δ, а высоты равны отношению $h_i^* = \frac{p_i^*}{\Delta} = \frac{p_i^*}{10}$.

Полученные значения высот вносим в табл. 2.10.

Таблица 2.10

i	Границы интервалов $(x_i; x_{i+1})$	Середина интервала $\widetilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	Число наблю-дений n_i^*	p_i^*	$h_i^* = \frac{p_i^*}{\Delta}$	$\widetilde{x}_i \cdot n_i^*$	$\widetilde{x}_i^2 \cdot n_i^*$
1	5,825;5,97	5,90	2	0,02	0,13	11,80	69,6200
2	5,975;6,12	6,05	12	0,12	0,8	72,60	439,2300
3	6,125;6,27	6,20	10	0,10	0,67	62,00	384,4000
4	6,275;6,42	6,35	13	0,13	0,86	82,55	524,1925
5	6,425;6,57	6,50	21	0,21	1,4	136,50	887,2500
6	6,575;6,72	6,65	17	0,17	1,13	113,05	751,7825
7	6,725;6,87	6,80	14	0,14	1,08	95,20	647,3600
8	6,875;7,02	6,95	6	0,06	0,4	41,70	289,8150
9	7,025;7,17	7,10	2	0,02	0,13	14,20	100,8200
10	7,175;7,32	7,25	2	0,02	0,13	14,50	105,1250
11	7,325;7,47	7,40	1	0,01	0,07	7,40	54,7600
Сумма			100	1,00		651,50	4254,3550

Строим гистограмму по данным 6-го столбца табл. 2.10.

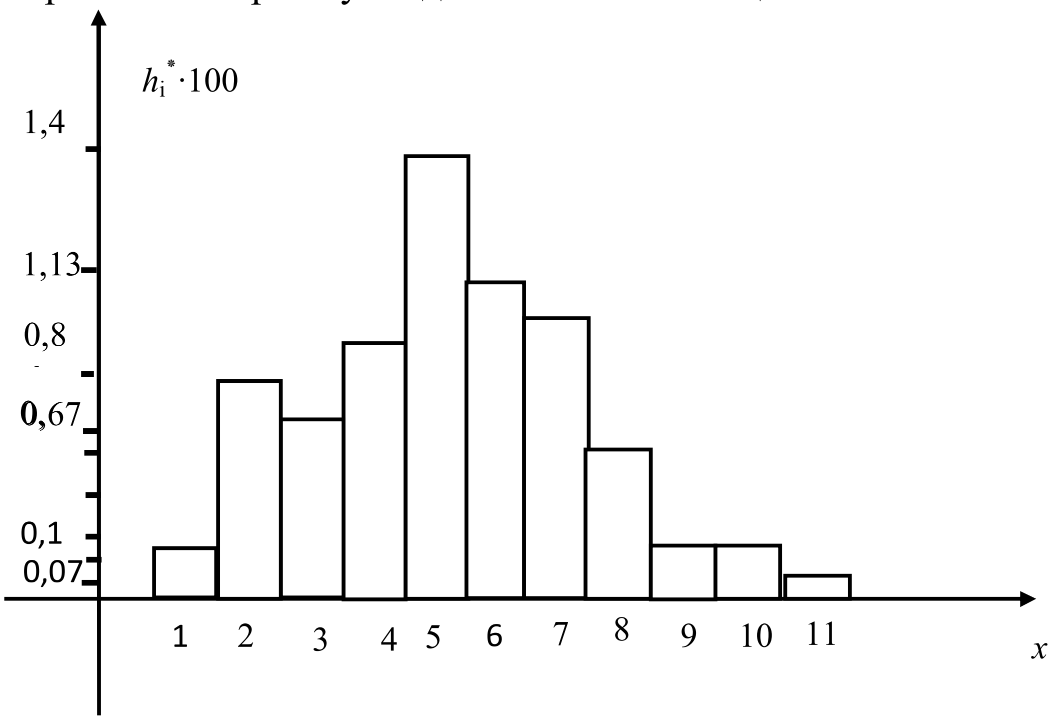

Рис. 2.6. Гистограмма плотностей относительных частот

По виду гистограммы (рис. 2.6) подбираем подходящий для данного случая теоретический закон распределения.

Сравниваем гистограмму с теоретическими кривыми основных законов (нормальный, показательный, равномерный). По виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины *X*.

3. *Нахождение состоятельных несмещенных оценок математического ожидания и дисперсии. Найдем оценки математического ожидания a и дисперсии D.*

$$a \approx \bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} \tilde{x}_i \cdot n_i^*}{n} = \frac{651{,}5}{100} = 6{,}515;$$

$$\sigma^2 \approx D_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} (\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i^*}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \frac{4254{,}355}{100} - 6{,}515^2 =$$

$$= 0{,}09823,$$

т.е.

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = 0{,}09823.$$

Согласно определению исправленной выборочной дисперсией называется произведение выборочной дисперсии на величину $\frac{n}{n-1}$, т.е. исправленная дисперсия равна

$$s^2 = \frac{100}{99} 0{,}09823 = 0{,}09922,$$

а исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $s = 0{,}315$.

4. *Построим доверительный интервал для математического ожидания по формуле*

$$I_p = \left(\bar{x}_в - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Ввиду большего объема выборки можно считать, что распределение Стьюдента близко к нормальному закону. По таблице значений функции Лапласа найдем $t_\gamma = 1{,}96$ (см. прил. 2), тогда

$$I_p = \left(6{,}515 - 1{,}96 \frac{0{,}09922}{10}; 6{,}515 + 1{,}96 \frac{0{,}09922}{10} \right)$$

или

$$I = (6{,}4955; 5{,}5345).$$

Доверительный интервал для дисперсии построим по формуле

$$s^2(1-q)^2 < D < s^2(1+q)^2 \text{ при } q<1;$$

$$0 < D < s^2(1+q)^2 \text{ при } q>1.$$

Найдем доверительный интервал для D при заданной надежности $\gamma = 0{,}95$. По прил. 5 находим q ($n = 100$; $\gamma = 0{,}95$) = 0,143. Следовательно, границы доверительного интервала:

$$0{,}09922(1-0{,}143)^2 = 0{,}0729 \text{ и } 0{,}09922(1+0{,}143)^2 = 0{,}1134.$$

Итак, $1{,}0729 < D < 0{,}1134$ с вероятностью 0,95.

5. *Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения исследуемой случайной величины X.*

Проверим гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона. В качестве меры расхождения между теоретическим распределением $f(x)$ и эмпирическим распределением $f^*(x)$ используем статистику $\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i^* - np_i\right)^2}{np_i}$, где n – число опытов; p_i – вероятность попадания возможных значений случайной величины в i-й разряд статистического ряда; l – число разрядов.

Так как выдвинута гипотеза в пользу нормального закона распределения генеральной совокупности, теоретические вероятности находим по формуле

$$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x_в}}{\sigma_в}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа (см. прил.2); $i = 1,2,\ldots,12$.

Имеем

$$\overline{x_в} = 240{,}5; \; \sigma_в = 19{,}8.$$

Обозначим через $z_i = \frac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}$, затем определим теоретические вероятности p_i и теоретические частоты $n_i = p_i \cdot n$, для чего составим расчетную табл. 2.11.

По условию, объём выборки n =100, значения случайной величины разбиты на 11 интервалов. Так как частоты n_i^* попадания в каждый из первого и трех последних интервалов малы (меньше 5), объединяем их соответственно в первый и последний. Вычисление $\chi^2_в$ приведено в табл. 2.11. Элементы 5-го столбца определяем по прил.2, вероятности p_i – элементы 6-го столбца – вычисляются следующим образом:

$$p_1 = P(-\infty < X < 6{,}125) = \Phi(-1{,}24) - \Phi(-\infty) = -0{,}3925 + 0{,}5 = 0{,}0053;$$

$$p_2 = P(6{,}125 < X < 6{,}275) = \Phi(-0{,}76) - \Phi(-1{,}24) = -0{,}2764 + 0{,}3925 = 0{,}1161;$$

…;

$$p_7 = P(6.875 < X < 7{,}025) = \Phi(1{,}61) - \Phi(1{,}14) = 0{,}4463 - 0{,}3729 = 0{,}0734;$$

$$p_8 = P(7{,}025 < X < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(1{,}61) = 0{,}5 - 0{,}4463 = 0{,}0537.$$

Таблица 2.11

i	Границы интервалов $[x_i ; x_{i+1}]$	n_i^*	Координаты границ интервалов в долях σ относительно $\overline{x}_{выб}$, $z_i = \frac{x_i - \overline{x}_{выб}}{\sigma}$	Значение функции Лапласа на границах интервала. $\Phi(z_i)$	Оценка вероятности попадания в интервал p_i	np_i	$\frac{(n^*i - np_i)^2}{np_i}$
1	5,825÷5,975	2 }14	$-\infty$ ÷ -1,71	- 0,5 ÷ −0,4564 }	0,1075	10,75	0,984
2	5,975÷6,125	12	−1,71÷-1,24	- 0,4564 ÷ −0,3925			
3	6,125÷6,275	10	−1,24-÷-0,76	−0,3925÷−0,2764	0,1161	11,61	0,223
4	6,275÷6,425	13	−0,76÷−0,29	−0,2764÷-0,1141	0,1623	16,23	0,643
5	6,425÷6,575	21	−0,29÷0,19	−0,1141÷0,0753	0,1894	18,94	0,224
6	6,575÷6,725	17	0,19÷0,67	0,0753÷0,2486	0,1733	17,33	0,006
7	6,725÷6,875	14	0,67÷1,14	0,2486÷0,3729	0,1243	12,43	0,198
8	6,875÷7,025	6	1,14÷1,61	0,3729÷0,4463	0,0734	7,34	0,244
9	7,025÷7,175	2	1,61÷2,09	0,4463÷0,4817			
10	7,175÷7,325	2 }5	2,09÷2,57	0,4817÷0,4949 }	0,0537	5,37	0,025
11	7,325÷7,475	1	2,57÷∞	0,4949÷0,5			
Сумма		n= 100	–	–	1,000	100	$\chi^2_в$ ==2, 547

Найдем меру расхождения между теоретическим распределением и эмпирическим распределением по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Для эгого суммируем элементы 8-го столбца табл. 2.11 и получим

$$\chi^2_{в.} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 2{,}547\,.$$

Согласно теореме Пирсона при $n \to \infty$ распределение величины χ^2 зависит от параметра k, который называют числом степеней свободы. $k = l - 1 - r$, где r – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки; l – число интервалов. Число степеней свободы $k = 8 - 1 - 2 = 5$. Выберем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ и по таблице квантилей χ^2– распределения для числа степеней свободы $k = 5$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ (см. прил. 4) найдем критическое значение $\chi_{\text{кр}}^2(0{,}05;5) = 11{,}1$; так как наблюденное значение оказалось меньше табличного значения, то можно сделать вывод: выдвинутая гипотеза о нормальном законе распределения не противоречит опытным данным. Следовательно, гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем.

Пример 2. Для определения надежности металлорежущих станков на заводе фиксировались значения наработки на отказ (время τ непрерывной работы до первого отказа). Полученные данные для τ (в месяцах) приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

3,0	3,6	4,4	1,3	2,1	5,0	4,9	6,0	1,1	2,3
5,9	3,6	1,3	3,7	4,9	5,6	1,3	2,0	4,3	1,9
4,0	3,7	5,3	4,2	2,5	2,7	3,6	4,8	6,0	1,7
2,5	4,9	3,2	4,0	4,3	2,8	3,8	1,0	4,2	4,8
4,9	5,0	1,9	2,6	1,7	6,0	5,7			

1. Составить выборочное распределение.

2. Построить гистограмму и график выборочной функции распределения.

3. Найти состоятельные несмещенные оценки для математиче-

ского ожидания и дисперсии.

4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с уровнем доверия $p = 0{,}95$.

5. На основании анализа формы построенной гистограммы выдвинуть гипотезу о законе распределения и проверить справедливость гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение

1. *Первым этапом статистического изучения вариации являются построение вариационного ряда* – упорядоченного распределения единиц совокупности по возрастающим (чаще) или по убывающим (реже) значениям признака и подсчет числа единиц с тем или иным значением признака. Для этого сначала построим ранжированный ряд.

Ранжированный ряд – это перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака (табл. 2.13).

Таблица 2.13

x_i	1,0	1,1	1,3	1,7	1,9	2,0	2,1	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8
n_i	1	1	3	2	2	1	1	1	2	1	1	1
x_i	3,0	3,2	3,6	3,7	3,8	4,0	4,2	4,3	4,4	4,8	4,9	5,0
n_i	1	1	3	2	1	2	2	2	1	2	4	2
x_i	5,3	5,6	5,7	5,9	6,0							
n_i	1	1	1	1	3							

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частностями попаданий в каждый из них значений величины.

Для его построения выполняем следующие действия:

1. Найдем размах выборки

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Имеем $R = 6{,}0 - 1{,}0 = 5{,}0$.

2. Определим длину частичного интервала. Δ – шаг разбиения по формуле Стерджеса:

$$\Delta \approx \frac{R}{1 + 3{,}322 \lg n} = \frac{R}{k},$$

где n – объём выборки; k – число частичных интервалов. Так как

$n = 47$, то $k = 1 + 3{,}322 \log 47 \approx 7$; $\Delta = \dfrac{5}{7} = 0{,}7$.

$$x_i = x_{i-1} + i\Delta,$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$; $x_0 = x_{\min} - \dfrac{\Delta}{2}$; $x_n = x_{\max} + \dfrac{\Delta}{2}$.

3. Подсчитаем число элементов (*частот*) выборки, попадающих в каждый интервал. Очевидно, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 47$.

Строим интервальный статистический ряд (табл. 2.14).

Элементы третьей строки называются *относительными частотами попадания в интервал.* Очевидно, $\dfrac{n_1}{n} + \dfrac{n_2}{n} + \ldots + \dfrac{n_m}{n} = 1$.

Таблица 2.14

$(x_i; x_{i+1})$	$[1{,}0;1{,}7)$	$[1{,}7;2{,}4)$	$[2{,}4;3{,}1)$	$[3{,}1;3{,}8)$	$[3{,}8;4{,}5)$	$[4{,}5;5{,}2)$	$[5{,}2;6{,}0)$
n_i	5	7	6	6	8	8	7
$\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$	$\dfrac{5}{47}$	$\dfrac{7}{47}$	$\dfrac{6}{47}$	$\dfrac{6}{47}$	$\dfrac{8}{47}$	$\dfrac{8}{47}$	$\dfrac{7}{47}$

2. *Построение гистограммы плотностей относительных частот.*

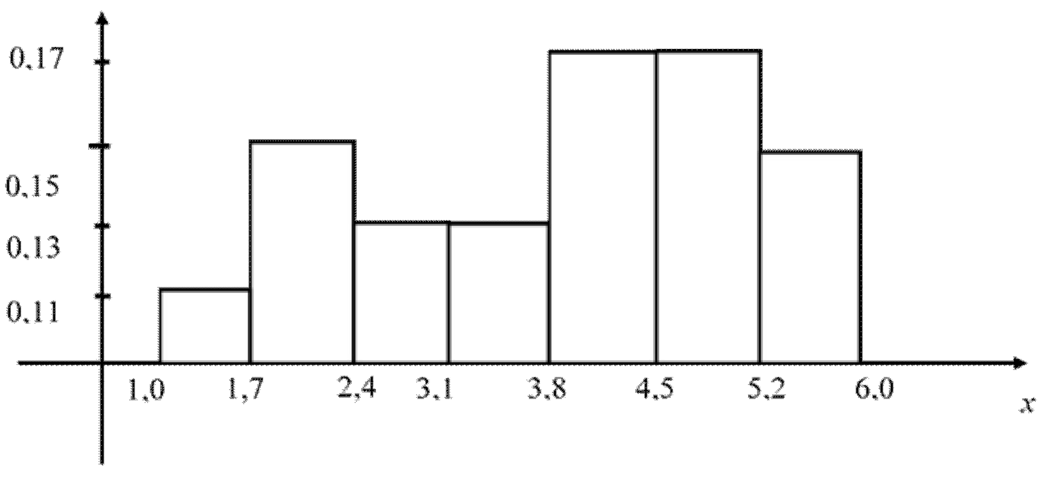

Рис. 2.7. Гистограмма относительных частот

Построим гистограмму относительных частот – ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $\Delta = 0,7$, а высоты равны отношению $h_i^* = \frac{p_i^*}{\Delta}$. Площадь всей гистограммы должна быть равна 1. Гистограмма является оценкой генеральной функции плотности $f(x)$.

Полученные значения высот вносим в табл. 2.15.

Таблица 2.15

i	$[a_i; a_{i+1}]$	n_i^*	p_i^*	$h_i^* = \frac{p_i^*}{\Delta}$	$\widetilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$\widetilde{x}_i \cdot n_i^*$	$\widetilde{x}_i^2 \cdot n_i^*$
1	$[1,0;1,7)$	5	$\frac{5}{47}$	0,11	1,35	6,75	9,1125
2	$[1,7;2,4)$	7	$\frac{7}{47}$	0,15	2,05	14,35	29,4175
3	$[2,4;3,1)$	6	$\frac{6}{47}$	0,13	2,75	16,5	45,375
4	$[3,1;3,8)$	6	$\frac{6}{47}$	0,13	3,45	20,7	71,415
5	$[3,8;4,5)$	8	$\frac{8}{47}$	0,17	4,15	33,20	137,78
6	$[4,5;5,2)$	8	$\frac{8}{47}$	0,17	4,85	38,8	188,18
7	$[5,2;6,0)$	7	$\frac{7}{47}$	0,15	5,6	39,2	219,52
	$\sum = 47$	$\sum = 1$				169,02	697,48

Примечание. h_i^* – плотность относительной частоты; $\widetilde{x}_i$ – середина частичных интервалов;* – определяет эмпирические значения.

По виду гистограммы (рис. 2.7) подбираем подходящий для данного случая теоретический закон распределения. Для этого сравним полученную ступенчатую фигуру с теоретическими кривыми основных законов: нормальным, показательным и равномерным.

По виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о равномерном законе распределения случайной величины X (см. рис. 2.7).

3. *Нахождение состоятельных несмещенных оценок математического ожидания и дисперсии. Найдем оценки математического ожидания a и дисперсии D.*

Основными параметрами генеральной совокупности являются математическое ожидание (генеральная средняя) $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение s. Это постоянные величины, которые можно оценить по выборочным данным. Оценка генерального параметра, выражаемая одним числом, называется точечной.

Точечной оценкой генеральной средней a является выборочное среднее. Выборочным средним называется среднее арифметическое всех значений величины, встречающихся в выборке.

Если выборочное среднее вычисляется по несгруппированным данным, то для его определения сумму всех значений делят на количество элементов в выборке. В данном случае определяем по сгруппированным данным (см. табл. 2.15):

$$a \approx \bar{x}_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} \tilde{x}_i \cdot n_i^*}{n} = \frac{169,2}{47} = 3,6\,.$$

$$\sigma^2 \approx D_в = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} (\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i^*}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \frac{697,48}{48} - 3,6^2 = 1,88,$$

т.е.

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = 1,88\,.$$

Согласно определению исправленной выборочной дисперсией называется произведение выборочной дисперсии на величину $\dfrac{n}{n-1}$.

Следовательно, исправленная дисперсия равна

$$s^2 = \frac{47}{46} 1,88 = 1,92\,,$$

т.е. исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $s = 1,3856$.

4. *Построим доверительный интервал для математического ожидания по формуле* $I_p = \left(\bar{x}_в - t_\gamma \dfrac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + t_\gamma \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right)$.

Ввиду большого объема выборки можно считать, что распределение Стьюдента близко к нормальному закону. По таблице значений функции Лапласа найдем (см. прил. 2) $t_\gamma = 1,96$, тогда

$$I_p = \left(3{,}6 - 1{,}96\frac{1{,}4}{6{,}8};\ 3{,}6 + 1{,}96\frac{1{,}4}{6{,}8}\right) \text{или } I = (3{,}2;4).$$

Доверительный интервал для дисперсии построим по формуле

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} \le D \le \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}.$$

Для $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ найдем значения χ_1^2 и χ_2^2:

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975;\ P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2} = 0{,}25.$$

По прил. 4 найдем

$$\chi_1^2(0{,}975;46) = 16{,}8;\ \chi_2^2(0{,}025;46) = 47{,}0.$$

Тогда

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} = \frac{46 \cdot 1{,}92}{47{,}0} = 1{,}89,\ \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2} = \frac{46 \cdot 1.92}{16{,}8} = 5{,}2.$$

Таким образом, доверительный интервал для дисперсии будет иметь вид (1,89;5,2).

5. *Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу о равномерном законе распределения исследуемой случайной величины X.*

Найдем выравнивающую кривую. Функция плотности нормального распределения имеет вид (см. 2.10)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Поскольку $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$ и $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{12}} = \dfrac{a-b}{2\sqrt{3}}$,

то оценки параметров a и b – концы интервала, в котором наблюдались возможные значения X, находим из системы (через a^* и b^* обозначены оценки параметров)

$$\begin{cases} \dfrac{b^* + a^*}{2} = \overline{x_B}; \\ \dfrac{b^* - a^*}{2\sqrt{3}} = \sigma_B. \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно a^* и b^*, получим

$$a^* = \overline{x_B} - \sqrt{3}\sigma_B;\quad b^* = \overline{x_B} + \sqrt{3}\sigma_B.$$

Тогда теоретическое распределение для данных значений параметров примет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b]\\ \dfrac{1}{b^*-a^*}, & x\in[a,b],\end{cases}$$

где

$$a^*=\overline{x_B}-\sqrt{3}\sigma=3{,}6-\sqrt{3}\cdot 1{,}3856=1{,}18;$$

$$b^*=\overline{x_B}+\sqrt{3}\sigma=3{,}6+\sqrt{3}\cdot 1{,}3856=5{,}52.$$

Таким образом, получено теоретическое распределение

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(1{,}18;5{,}52);\\ 0{,}23, & x\in[1{,}18;5{,}52].\end{cases}$$

Проверим гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона. В качестве меры расхождения между теоретическим распределением $f(x)$ и эмпирическим распределением $f^*(x)$ используем статистику $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{\left(n_i^*-np_i\right)^2}{np_i}$, где n– число опытов; p_i– вероятность попадания возможных значений случайной величины в i -й разряд статистического ряда; l– число разрядов.

Теоретические вероятности находим по формуле

$$p_i=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{1}{b^*-a^*}dx;$$

$$p_1=\int\limits_{a^*}^{x_2}0{,}23dx=\int\limits_{1{,}18}^{1{,}7}0{,}23dx=0{,}23x\Big|_{1{,}18}^{1{,}7}=0{,}1196;$$

$$p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\int\limits_{1{,}7}^{2{,}4}0{,}23dx=0{,}23x\Big|_{1.7}^{2.4}=0{,}161;$$

$$p_7=\int\limits_{x_{n-1}}^{b^*}0{,}23dx=\int\limits_{5.2}^{5{,}52}0{,}23dx=0{,}23x\Big|_{5{,}2}^{5{,}52}=0{,}0736.$$

Вычисления сведем в табл. 2.16.

Таблица 2.16

$(x_i;x_{i+1})$	$[1.0;1.7)$	$[1.7;2.4)$	$[2.4;3.1)$	$[3.1;3.8)$	$[3.8;4.5)$	$[4.5;5.2)$	$[5.2;6.0)$
n_i	5	7	6	6	8	8	7
p_i	0,1196	0,161	0,161	0,161	0,161	0,161	0.0736

Окончание табл. 2.16

np_i	5.6212	7.567	7.567	7.567	7.567	7.567	3.4592
$n_i - np_i$	-0.6212	-0.567	-1.567	-1.567	0.433	0.433	3.5408
$(n_i - np_i)^2$	0.38	0.32	2.46	2.46	0.19	0.19	12.53

$$\chi^2_{выб} = \frac{0{,}38}{5{,}62} + \frac{0{,}32}{7{,}56} + \frac{2{,}46}{7{,}56} + \frac{2{,}46}{7{,}56} + \frac{0{,}19}{7{,}56} + \frac{0{,}19}{7{,}56} + \frac{12{,}53}{3{,}45} = 4{,}44.$$

Согласно теореме Пирсона при $n \to \infty$ распределение величины χ^2 зависит от параметра k, который называют числом степеней свободы. $k = l - 1 - r$, где r – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки: l – число интервалов. Число степеней свободы $k = 7 - 1 - 2 = 4$. Выберем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ и по таблице квантилей χ^2– распределения для числа степеней свободы $k = 4$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ (см. прил. 4) найдем критическое значение $\chi^2(0{,}05;4) = 9{,}5$; так как наблюденное значение оказалось меньше табличного значения, то можно сделать вывод: выдвинутая гипотеза о равномерном законе распределения не противоречит опытным данным. Следовательно, гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности принимаем.

Пример 2. Произведен выбор 100 проволок и проведены испытания их на прочность. В табл. 2.17 приведены разрывные усилия проволок (Н/мм^2), полученные при испытаниях.

Первоначальную длину интервала при группировке взять равной 10 Н/мм^2.

Таблица 2.17

221	233	175	215	235	260	201	234	211	237
200	254	245	207	243	251	210	245	250	223
223	265	285	239	195	250	245	227	231	256
244	213	257	243	225	242	254	238	241	261
248	275	224	273	243	282	235	264	280	248
251	212	247	198	232	233	236	244	225	234
240	237	235	258	241	233	232	263	305	243
223	231	253	201	233	231	220	245	255	219
262	251	250	215	228	257	229	221	244	284
252	245	265	232	248	221	242	226	247	239

1. Составить выборочное распределение.

2. Построить гистограмму и график выборочной функции распределения.

3. Найти состоятельные несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с уровнем доверия γ=0,95.

5. На основании анализа формы построенной гистограммы выдвинуть гипотезу о законе распределения и проверить справедливость гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение

1. Сначала построим ранжированный ряд. Ранжированный ряд – это перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака (табл. 2.18).

Таблица 2.18

x_i	175	195	198	200	201	207	210	211	212	213
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x_i	215	219	220	221	223	224	225	226	227	228
n_i	2	1	1	3	3	1	2	1	1	1
x_i	229	230	231	232	233	234	235	237	238	239
n_i	1	1	3	3	4	2	3	3	1	2
x_i	240	241	242	243	245	247	244	245	247	248
n_i	1	2	2	4	5	2	3	5	2	3
x_i	248	250	251	252	253	254	255	256	257	258
n_i	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1
x_i	260	261	262	263	264	265	273	275	280	282
n_i	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1
x_i	284	305	–	–	–	–	–	–	–	–
n_i	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–

Для построения интервального вариационного ряда выполняем следующие действия:

1. Длина частичного интервала Δ задана и равна 10.

$$x_i = x_{i-1} + i\Delta,$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$; $x_0 = x_{\min} - \dfrac{\Delta}{2}$; $x_n = x_{\max} + \dfrac{\Delta}{2}$.

2. Подсчитаем число элементов (*частот*) выборки, попадающих в каждый интервал. Очевидно, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 100$.

Строим интервальный статистический ряд (табл. 2.19).

Таблица 2.19

$(x_i; x_{i+1})$	$[180;190)$	$[190;200)$	$[200;210)$	$[210;220)$	$[220;230)$	$[230;240)$
n_i	1	2	3	7	14	22
$\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$	0,01	0,02	0,03	0,07	0,14	0,22
$(x_i; x_{i+1})$	$[240;250)$	$[250;260)$	$[260;270)$	$[270;280)$	$[280;290)$	$[290;300)$
n_i	22	15	8	2	3	1
$\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$	0,22	0,15	0,08	0,02	0,03	0,01

2. *Построение гистограммы плотностей относительных частот* – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной Δ, а высоты равны отношению $h_i^* = \dfrac{p_i^*}{\Delta} = \dfrac{p_i^*}{10}$.

Полученные значения высот вносим в табл. 2.20.

Таблица 2.20

i	$[a_i; a_{i+1}]$	n_i^*	p_i^*	$h_i^* = \dfrac{p_i^*}{\Delta}$	$\tilde{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$\tilde{x}_i \cdot n_i^*$	$\tilde{x}_i^2 \cdot n_i^*$
1	$[180;190)$	1	0,01	0,001	185	185	34225
2	$[190;200)$	2	0,02	0,002	195	390	76050
3	$[200;210)$	3	0,03	0,003	205	615	126075
4	$[210;220)$	7	0,07	0,007	215	1505	323575
5	$[220;230)$	14	0,14	0,014	225	3150	708750
6	$[230;240)$	22	0,22	0,022	235	5170	1214950
7	$[240;250)$	22	0,22	0,022	245	5390	1320550

Окончание табл. 2.20

8	$[250;260)$	15	0,15	0,015	255	3825	975375
9	$[260;270)$	8	0,08	0,008	265	2120	561800
10	$[270;280)$	2	0,02	0,002	275	550	151250
11	$[280;290)$	3	0,03	0,003	285	855	243675
12	$[290;300)$	1	0,01	0,001	295	295	87025
		$\sum = 100$	$\sum = 1$			240500	5823300

Строим гистограмму по данным 5-го столбца табл. 2.20.

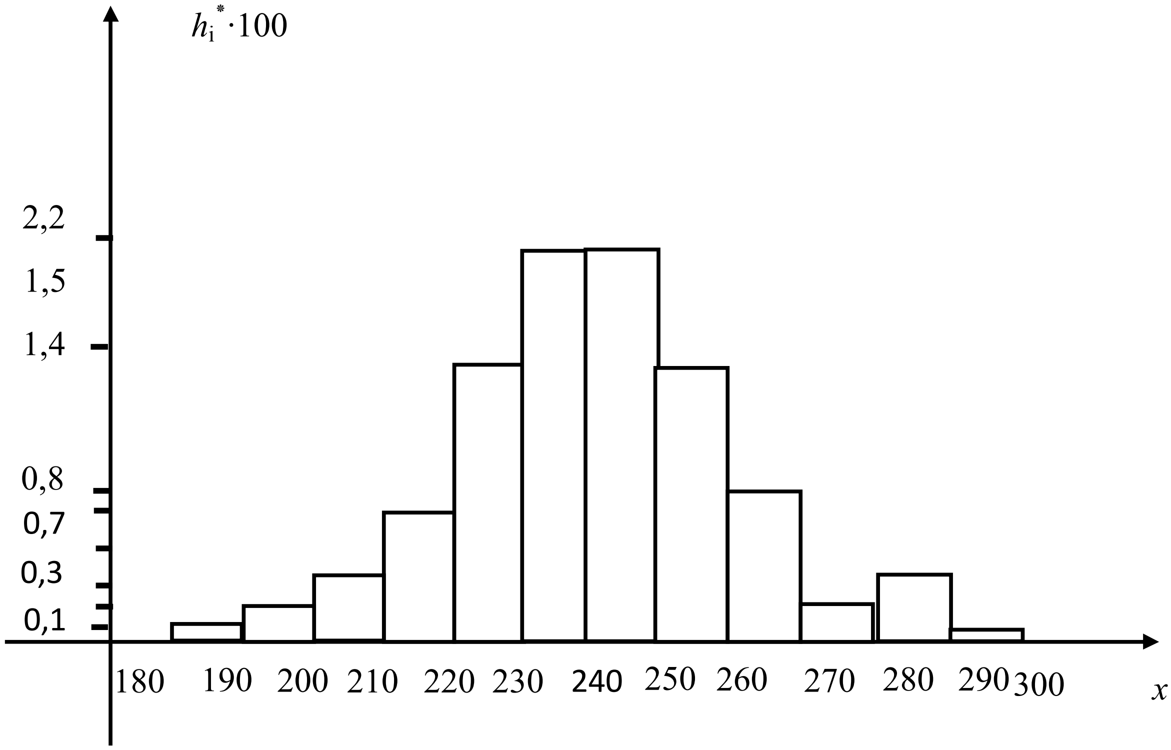

Рис. 2.8. Гистограмма плотностей относительных частот

По виду гистограммы (рис. 2.8) подбираем подходящий для данного случая теоретический закон распределения.

Сравниваем гистограмму с теоретическими кривыми основных законов (нормальный, показательный, равномерный). По виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины X.

3. *Нахождение состоятельных несмещенных оценок математического ожидания и дисперсии. Найдем оценки математического ожидания a и дисперсии D.*

$$a \approx \bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} \tilde{x}_i \cdot n_i^*}{n} = \frac{24050}{100} = 240{,}5;$$

$$\sigma^2 \approx D_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} (\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i^*}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \frac{5823300}{100} - 240{,}5^2 =$$

$= 392{,}75$, т.е.

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = 392{,}75.$$

Согласно определению исправленной выборочной дисперсией называется произведение выборочной дисперсии на величину $\frac{n}{n-1}$, т.е. исправленная дисперсия равна

$$s^2 = \frac{100}{99} 392{,}75 = 396{,}7,$$

а исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $s = 19{,}8173$.

4. *Построим доверительный интервал для математического ожидания по формуле* $I_p = \left(\bar{x}_в - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$.

Ввиду большего объема выборки можно считать, что распределение Стьюдента близко к нормальному закону. По таблице значений функции Лапласа найдем $t_\gamma = 1{,}96$ (см. прил. 2), тогда

$$I_p = \left(240{,}5 - 1{,}96 \frac{19{,}8}{10}; 240{,}5 + 1{,}96 \frac{19{,}8}{10} \right) \text{или } I = (236;244).$$

Доверительный интервал для дисперсии построим по формуле

$$s^2(1-q)^2 < D < s^2(1+q)^2 \text{ при } q<1;$$

$$0 < D < s^2(1+q)^2 \text{ при } q>1.$$

Найдем доверительный интервал для D при заданной надежности $\gamma = 0{,}95$. По прил. 5 находим q ($n = 100$; $\gamma = 0{,}95$) = 0,143. Следовательно, границы доверительного интервала: $396{,}7(1 - 0{,}143)^2 = 293{,}1$ и $396{,}7(1+0{,}143) = 518{,}27$.

Итак, $293{,}1 < D < 518{,}27$ с вероятностью 0,95.

5. *Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения исследуемой случайной величины X.*

Проверим гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона. В качестве меры расхождения между теоретическим распределением $f(x)$ и эмпирическим распределением $f^*(x)$ используем статистику $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i^* - np_i\right)^2}{np_i}$, где n – число опытов; p_i – вероятность попадания возможных значений случайной величины в i-й разряд статистического ряда; l – число разрядов.

Так как выдвинута гипотеза в пользу нормального закона распределения генеральной совокупности, теоретические вероятности находим по формуле

$$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_в}{\sigma_в}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа (см. прил.2); $i = 1, 2, \ldots, 12$.

Имеем

$$\overline{x}_в = 240{,}5; \ \sigma_в = 19{,}8.$$

Обозначим через $z_i = \frac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$, затем определим теоретические вероятности p_i и теоретические частоты $n_i = p_i \cdot n$, для чего составим расчетную табл. 2.21.

Таблица 2.21

<table>
<tr><th>i</th><th>$[x_i; x_{i+1}]$</th><th>n_i^*</th><th>z_i</th><th>$\Phi(z_i)$</th><th>p_i</th><th>$n_i = p_i \cdot n =$
$= p_i \cdot 100$</th><th>$\frac{\left(n^*_i - n_i\right)^2}{n_i}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$[180;190)$</td><td rowspan="3">$\left.\begin{array}{l}1\\2\\3\end{array}\right\}6$</td><td>$-\infty$</td><td>-0,5</td><td>0,0053</td><td rowspan="3">$\left.\begin{array}{l}0{,}53\\1{,}54\\4{,}11\end{array}\right\}6{,}17$</td><td rowspan="3">0,0047</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$[190;200)$</td><td>-2,55</td><td>-0,4947</td><td>0,0154</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$[200;210)$</td><td>-2,04</td><td>-0,4793</td><td>0,0411</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$[210;220)$</td><td>7</td><td>-1,54</td><td>-0,4382</td><td>0,0897</td><td>8,97</td><td>0,4327</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$[220;230)$</td><td>14</td><td>-1,03</td><td>-0,3485</td><td>0,1466</td><td>14,66</td><td>0,0297</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$[230;240)$</td><td>22</td><td>-0,53</td><td>-0,2019</td><td>0,1899</td><td>18,99</td><td>0,4502</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$[240;250)$</td><td>22</td><td>-0,03</td><td>-0,0120</td><td>0,1964</td><td>19,64</td><td>0,2836</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$[250;260)$</td><td>15</td><td>0,48</td><td>0,1844</td><td>0,1521</td><td>15,21</td><td>0,0029</td></tr>
</table>

Окончание табл. 2.21

9	$[260;270)$	8	0,98	0,3365	0,0954	9,54	0,2486
10	$[270;280)$	2	1,49	0,4319	0,0448	4,48	0,963
11	$[280;290)$	3 } 6	1.99	0,4767	0,0171	1,71 } 6,81	
12	$[290;300)$	1	2,5	0,4938	0,0062	0,62	
			∞	0,5			
		$\sum = 100$	$\sum = 1$			≈ 100	$\sum = \chi^2_{в} = 1{,}5487$

По условию, объём выборки n=100, значения случайной величины разбиты на 12 интервалов. Так как частоты n_i^* попадания в каждый из трех первых и трех последних интервалов малы (меньше 5), объединяем их соответственно в первый и последний. Вычисление $\chi^2_в$ приведено в табл. 2.21. Элементы 4-го столбца определяем по прил.2, вероятности p_i– элементы 6-го столбца – вычисляются следующим образом:

$$p_1 = P(-\infty < X < 190) = \Phi\left(\frac{190 - 240{,}5}{19{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 240{,}5}{19{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(-2.55) - \Phi(-\infty) = -0{,}4947 + 0{,}5 = 0{,}0053,$$

$$p_2 = P(190 < X < 200) = \Phi\left(\frac{200 - 240{,}5}{19{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 240{,}5}{19{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(-2.04) - \Phi(-2.55) = -0{,}4793 + 0{,}4947 = 0.0154, \ \ldots$$

$$p_{11} = P(280 < X < 290) = \Phi\left(\frac{290 - 240{,}5}{19{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{280 - 240{,}5}{19{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(2.5) - \Phi(1.99) = 0{,}4938 - 0{,}4767 = 0{,}0171.$$

$$p_{12} = P(290 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 240{,}5}{19{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{290 - 240{,}5}{19{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(2{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4938 = 0{,}0062.$$

Найдем меру расхождения между теоретическим распределением и эмпирическим распределением по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Вычисления сведем в табл. 2.21. Сложив элементы 8-го столбца, получим

$$\chi^2 = \frac{0{,}2209}{0{,}53} + \frac{0{,}2116}{1{,}54} + \frac{1{,}2321}{4{,}11} + \frac{3{,}88}{8{,}97} + \frac{0{,}4356}{14{,}66} + \frac{9{,}06}{18{,}99} + \frac{5{,}56}{19{,}64} +$$

$$+ \frac{0{,}0441}{15{,}21} + \frac{2{,}37}{9{,}54} + \frac{6{,}15}{4{,}48} + \frac{0{,}3741}{1{,}71} + \frac{0{,}2704}{0{,}48} = 4{,}5.$$

Согласно теореме Пирсона при $n \to \infty$ распределение величины χ^2 зависит от параметра k, который называют числом степеней свободы. $k = l - 1 - r$, где r – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки, l – число интервалов. Число степеней свободы $k = 8 - 1 - 2 = 5$. Выберем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ и по таблице квантилей χ^2– распределения для числа степеней свободы $k = 5$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ (см. прил. 4) найдем критическое значение $\chi_{кр.}^2(0{,}05;5) = 11{,}1$; так как наблюденное значение оказалось меньше табличного значения, то можно сделать вывод: выдвинутая гипотеза о нормальном законе распределения не противоречит опытным данным. Следовательно, гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем.

Индивидуальные задания

1. Измерения скорости света c, произведенные Майкельсоном, Пизом и Пирсоном, дали результаты, приведенные в табл. 2.22. Для сокращения записи в таблице приведены значения (c_i – 299 000) км/с. Получены следующие оценки математического ожидания $\bar{c}$ и среднего квадратического отклонения $\bar{\sigma}$, вычисленные по опытным данным: $\bar{c}$=299 733,85 км/с, $\bar{\sigma}$ =14,7 км/с.

Проверить, используя критерий χ^2, согласие опытных данных с полученным законом распределения при уровне значимости α = 0,05.

Таблица 2.22

Границы интервала	n_i		Границы интервала	n_i		Границы интервала	n_i		Границы интервала	n_i
735 ; 740	3		755 ; 760	17		775 ; 780	40		795 ; 800	5
740 ; 745	7		760 ; 765	23		780 ; 785	17		800 ; 805	2
745 ; 750	4		765 ;770	29		785 ; 790	16		805 ; 810	3
750 ;755	8		770 ; 775	45		790 ; 795	10		810 ; 815	4

2. Произведен выбор 200 деталей из текущей продукции прецизионного токарного автомата. Проверяемый размер деталей измерен с точностью до 1 мк. В табл. 2.23 приведены отклонения x_i от номинального размера, разбитые на разряды, численности разрядов n_i.

Таблица 2.23

Номер разряда i	Границы интервала $x_i \div x_{i+1}$	n_i	Номер разряда i	Границы интервала $x_i \div x_{i+1}$	n_i
1	-20 ; -15	7	6	5 ; 10	41
2	-15 ; -10	11	7	10 ; 15	26
3	-10 ; -5	15	8	15 ; 20	17
4	-5 ; 0	24	9	20 ;25	7
5	0 ; 5	49	10	25 ; 30	3

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении отклонений x_i от номинального размера.

3. Имеется 60 деталей, обработанных на одном станке. Данные об измерениях характерного размера x приведены в табл. 2.24.

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении размера x детали.

Таблица 2.24

Номер детали	Размер x, см	Номер детали	Размер x, см	Номер детали	Размер x, см
1	72,58	21	72,50	41	72,30
2	72,35	22	72,69	42	72,28
3	72,33	23	72,54	43	72,51
4	72,54	24	72,48	44	73,37
5	72,24	25	72,36	45	72,14
6	72,42	26	72,50	46	72,42
7	72,58	27	72,43	47	72,39
8	72,47	28	72,46	48	72,28
9	72,54	29	72,56	49	72,20
10	72,24	30	72,48	50	72,4$
11	72,38	31	72,43	51	72,66
12	72,70	32	72,56	52	72,64
13	72,47	33	72,34	53	72,73
14	72,49	34	72,38	54	72,43
15	72,28	35	72,56	55	72,28
16	72,47	36	72,32	56	72,64
17	71,95	37	72,41	57	72,72
18	72,18	38	72,14	58	72,34
19	72,66	39	72,89	59	72,60
20	72,35	40	72,81	60	72,46

4. В табл. 2.25 приведены отклонения диаметров валиков, обработанных на станке, от заданного размера.

Таблица 2.25

Границы интервала, мк	0 ; 5	5 ; 10	10 ; 15	15 ; 20	20 ; 25
Численность разряда n_i	15	75	100	50	10

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении полученных отклонений.

5. Образовано 250 чисел *x,* каждое из которых представляет собой сумму цифр пяти случайных однозначных чисел. Полученные суммы разбиты на 15 интервалов в соответствии с табл. 2.26.

Таблица 2.26

Границы интервала	n_i	Границы интервала	n_i	Границы интервала	n_i
0 ; 3	0	15 ; 18	28	30 ; 33	27
3 ; 6	1	18 ; 21	39	33 ; 36	8
6 ; 9	1	21 ; 24	41	36 ; 39	1
9 ; 12	10	24 ; 27	45	39 ; 42	1
12 ; 15	18	27 ; 30	30	42 ; 45	0

Суммы, кратные трем, условно отнесены к обоим граничащим интервалам, к каждому из которых отнесена половина числа этих сумм.

Установить, используя критерий χ^2, согласуется ли приведенное статистическое распределение с законом нормального распределения, за параметры которого приняты оценки математического ожидания и дисперсии, определенные по наблюденным данным, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

6. Результаты наблюдения за среднесуточной температурой воздуха в течение 320 суток приведены в табл. 2.27.

Таблица 2.27

x_i°C	n_i	x_i°C	n_i
-40 ÷ 30	5	10 ÷ 20	81
-30 ÷ 20	11	20 ÷ 30	36
-20 ÷ -10	25	30 ÷ 40	20
-10 ÷ 0	42	40 ÷ 50	8
0 ÷ 10	88	50 ÷ 60	4

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении данных наблюдений при уровне значимости α =0,05.

7. Имеется 60 деталей, обработанных на одном станке. Данные об измерениях характерного размера x приведены в табл. 2.28.

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении размера x детали.

Таблица 2.28

Номер детали	Размер x, см	Номер детали	Размер x, см	Номер детали	Размер x, см
1	72,50	21	72,35	41	72,31
2	72,35	22	72,16	42	72,46
3	72,69	23	72,51	43	72,36
4	72,60	24	72,50	44	72,39
5	72,54	25	72,50	45	72,30
6	72,42	26	72,48	46	72,30
7	72,68	27	72,53	47	72,38
8	72,54	28	72,25	48	72,55
9	72,55	29	72,48	49	72,36
10	72,33	30	72,36	50	72,24
11	72,56	31	72,53	51	72,23
12	72,86	32	72,23	52	72,16
13	72,36	33	72,55	53	72,17
14	72,15	34	72,51	54	72,37
15	72,48	35	72,25	55	72,38
16	72,46	36	72,11	56	72,46
17	72,36	37	72,44	57	72,12
18	72,38	38	72,51	58	72,28
19	72,40	39	72,55	59	72,23
20	72,38	40	72,24	60	72,38

8. Проверяется партия небольших внешне одинаковых электрических предохранителей для определения тока, при котором происходит их перегорание. Полученные результаты представлены в табл. 2.29.

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении тока, вызывающего перегорание предохранителей.

Таблица 2.29

Ток, вызывающий перегорание предохранителя, мА	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101
Число предохранителей	3	44	9	10	13	10	8	8	2	2

9. По данным каталога Воронцова-Вельяминова, распределение расстояний до планетарных туманностей представлено в табл. 2.30, где x_i – расстояние (в килопарсеках) до туманности, а n_i – число случаев (численность разряда).

Таблица 2.30

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
0 ; 0,5	9	3,0 ; 3,5	12	6,0 ; 6,5	3	9,0 ; 9,5	2
0,5 ; 1,0	11	3,5 ; 4,0	7	6,5 ; 7,0	2	9.5; 10,0	0
1,0 ; 1,5	8	4,0 ; 4,5	10	7,0 ; 7,5	1	10,0 ; 10,5	0
1,5 ; 2,0	12	4,5 ; 5,0	8	7,5 ; 8,0	0	$n=\sum\limits_{i-1}^{21} n_i = 119$	
2,0 ; 2,5	13	5,0 ; 5,5	5	8,0 ; 8,5	0		
2,5 ; 3,0	16	5,5 ; 6,0	0	8,5 ; 9,0	0		

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении данных наблюдений при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

10. В табл. 2.31 приведены результаты измерения некоторой величины X.

Таблица 2.31

Границы интервала x_i	mn_i	Границы интервала x_i	n_i	Границы интервала x_i	n_i
75 ÷ 77	2	85 ÷ 87	32	95 ÷ 97	8
77 ÷ 79	4	87 ÷ 89	24	97 ÷ 99	3
79 ÷ 81	12	89 ÷ 91	23	99 ÷ 101	1
81 ÷ 83	24	91 ÷ 93	22	$n=\sum_{i=1}^{13} n_i = 200$	
83 ÷ 85	25	93 ÷ 95	20		

Проверить, используя критерий χ^2, согласие опытных данных с законом нормального распределения, параметры которого следует определить на основании результатов измерений. Принять уровень значимости α =0,05.

11. Прибор для сортировки электронно-лучевых трубок проверяется путем многократного пропускания через него одной и той же трубки, полученные результаты приведены в табл. 2.32.

Таблица 2.32

Отсчет, см	28,8	31,3	33,8	36,3	38,8	41,3
Число отсчетов	2	6	22	38	57	44
Отсчет, см	43,8	46,3	48,8	51,3	53,8	–
Число отсчетов	19	10	0	0	2	–

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении полученных отсчетов при уровне значимости α = 0,05.

12. В табл. 2.33 даны результаты 228 измерений чувствительности X телевизора (в микровольтах).

Таблица 2.33

x_k	n_k	x_k	n_k	x_k	n_k
200	1	450	33	700	13
250	2	500	34	750	8
300	11	550	31	800	3
350	20	600	25	–	–
400	28	650	19	–	–

Проверить, используя критерий χ^2, согласование результатов измерения с законом нормального распределения. Принять уровень значимости α =0,05.

13. В табл. 2.34 приведена сгруппированная выборка значений случайной величины X объема n = 300.

Таблица 2.34

Границы интервала	n_i	Границы интервала	n_i	Границы интервала	n_i
50 ; 60	1	100 ; 110	56	150 ; 160	16
60 ; 70	2	110 ; 120	61	160 ; 170	4
70 ; 80	9	120 ; 130	49	170 ; 180	2
80 ; 90	23	130 ; 140	25	–	–
90 ; 100	33	140 ; 150	19	–	–

Проверить, используя критерий χ^2 при уровне значимости α = 0,05, согласие опытных данных с законом нормального распределения.

14. Измерения скорости света c, произведенные Майкельсоном, Пизом и Пирсоном, дали результаты, приведенные в табл. 2.35. Для сокращения записи в таблице приведены значения (c_i – 299 000), км/с.

Таблица 2.35

Границы интервала	n_i	Границы интервала	n_i	Границы интервала	n_i	Границы интервала	n_i
735 ; 740	3	755 ; 760	17	775 ; 780	40	795 ; 800	5
740 ; 745	7	760 ; 765	23	780 ; 785	17	800 ; 805	2
745 ; 750	4	765 ; 770	29	785 ; 790	16	805 ; 810	3
750 ; 755	8	770 ; 775	45	790 ; 795	10	810 ; 815	4

Проверить, используя критерий χ^2, согласие опытных данных с законом нормального распределения при уровне значимости α = 0,05.

15. В табл. 2.36 приведены наблюденные на опыте сроки устранения отказов электронной аппаратуры в часах с точностью до 1 минуты.

Проверить, используя критерий χ^2, согласие наблюденных данных с законом логарифмически нормального распределения, при котором $x=lgy$ подчиняется закону нормального распределения, приняв за уровень значимости α = 0,05.

Таблица 2.36

Номер интервала i	Границы интервала $y_i ; y_{i+1}$	Численность разряда n_i	Номер интервала i	Границы интервала $y_i ; y_{i+1}$	Численность разряда n_i
1	1/60 ; 3/60	2	8	1,8 ; 3,2	10
2	3/60 ; 6/60	5	9	3,2 ; 5,6	7
3	6/60 ; 10/60	7	10	5,6 ; 10	4
4	10/60 ; 18/60	11	11	10 ; 18	2
5	18/60 ; 35/60	15	12	18 ; 30	1
6	35/60 ; 1,04	21	13	более 30	0
7	1,04 ; 1,8	15			

16. Произведен выбор 300 деталей из текущей продукции прецизионного токарного автомата. Проверяемый размер деталей измерен с точностью до 1 мк. В табл. 2.37 приведены отклонения x_i от номинального размера, разбитые на разряды, численности разрядов n_i.

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении размера x детали.

Таблица 2.37

Номер разряда i	Границы интервала $x_i ; x_{i+1}$	n_i	Номер разряда i	Границы интервала $x_i \div x_{i+1}$	n_i
1	-20 ÷ -10	20	5	20 ÷ 30	40
2	-10 ÷ 0	47	6	30 ÷ 40	16
3	0 ÷ 10	80	7	40 ÷ 50	8
4	10 ÷ 20	89	–	$n = \sum_{i=1}^{7} n_i = 300$	

17. Взяли 120 деталей, обработанных на одном станке, и рассмотрели у них отклонения характерного размера от заданного. Проверяемый размер деталей измерен с точностью до 1 мк. В табл. 2.38 приведены отклонения x_i от номинального размера, разбитые на разряды, численности разрядов n_i.

Таблица 2.38

Номер разряда i	Границы интервала $x_i \div x_{i+1}$	n_i	Номер разряда i	Границы интервала $x_i \div x_{i+1}$	n_i
1	-20 ÷ -15	8	5	0 ÷ 5	35
2	-15 ÷ -10	16	6	5 ÷ 10	6
3	-10 ÷ -5	7	7	10 ÷ 15	5
4	-5 ÷ 0	15	8	15 ÷ 20	8

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении размера x детали.

18. Результаты испытания крепости в граммах нитей приведены далее. При первоначальной группировке длину интервала выбрать равной 20 г.

325 341 285 302 275 284 281 295 220 303 330 286 248 288 261 304 337
305 318 270 285 317 247 301 277 281 247 347 263 280 333 359 325 318
280 271 318 324 287 272 307 286 278 337 348 305 265 287 328 317 282
255 308 275 285 319 270 301 317 325 305 333 268 319 274 339 324 355
299 293 291 350 307 290 308 259 315 273 308 330 315 273 310 331 293
272 292 321 291 297 380 312 325 296 263 305 328 307 295 271

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении крепости x нитей.

19. Имеется 50 пружин, изготовленных в одинаковых условиях. Данные об измерениях жесткости пружин x приведены в табл. 2.39. Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении жесткости пружин.

Таблица 2.39

Номер пружины	Жесткость x, кН/м	Номер пружины	Жесткость x, кН/м	Номер пружины	Жесткость x, кН/м
1	32,140	18	32,203	35	32,231
2	32,152	19	32,207	36	32,244
3	32,163	20	32,212	37	32,247
4	32,173	21	32,173	38	32,250
5	32,169	22	32,216	39	32,240
6	32,178	23	32,231	40	32,264
7	32,212	24	32,236	41	32,231
8	32,216	25	32,212	42	32,236
9	32,189	26	32,240	43	32,271
10	32,192	27	32,252	44	32,240
11	32,198	28	32,255	45	32,264
12	32,199	29	32,236	46	32,274
13	32,203	30	32,260	47	32,278
14	32,195	31	32,264	48	32,293
15	32,220	32	32,293	49	32,302
16	32,223	33	32,278	50	32,330
17	32,226	34	32,286	–	–

20. Ниже приведены данные обследования 100 предприятий области по росту выработки на одного рабочего (в % к предыдущему году). Длину интервала взять 10%.

80 100 91 102 103 115 122 118 119 120 104 82 107 111 102 112 115 116 114 115 106 92 109 117 99 98 118 108 107 112 108 102 108 101 103 105 101 106 106 115 109 106 104 107 106 114 116 119 114 123 101 108 105 107 91 104 102 94 103 130 105 109 106 93 105 102 106 108 96 109 108 102 101 95 102 101 100 107 98 108 109 103 111 96 103 104 105 95 99 104 107 104 100 91 115 106 116 101 102 103 2.20.

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении роста выработки x.

21. Получено следующее распределение 100 рабочих цеха по выработке в отчетном году (в процентах к предыдущему году).

Таблица 2.40

Выработка в отчетном году (в % к предыдущему)	94-104	104-114	114-124	124-134	134-144	$\sum$
Количество рабочих	6	20	45	24	5	100

На уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины x – выработки рабочих – с помощью критерия χ^2 Пирсона.

22. Произведен выбор 100 проволок и проведены испытания их на прочность. Результаты испытаний приведены в табл. 2.41

Таблица 2.41

Разрывное усилие	Количество проволок n_i	Разрывное усилие	Количество проволок n_i
$38 \div 40$	0	$48 \div 50$	26
$40 \div 42$	1	$50 \div 52$	18
$42 \div 44$	5	$52 \div 54$	2
$44 \div 46$	16	$54 \div 56$	3
$46 \div 48$	28	$56 \div 58$	1

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении разрывного усилия проверенных проволок.

23. Из партии резисторов взяли 50 образцов и произвели замер их сопротивлений. Данные об их отклонениях от номинального значения сопротивления 1 кОм приведены в табл. 2.42.

Таблица 2.42

Номер резистора	Отклонение x_i, Ом	Номер резистора	Отклонение x_i, Ом	Номер резистора	Отклонение x_i, Ом
1	0.5	18	0.5	35	-1,5
2	-14,1	19	-5,5	36	8,5
3	1.0	20	2,0	37	12
4	-3,0	21	4,0	38	13
5	1.5	22	-1,0	39	12
6	2,0	23	5,0	40	-17,0
7	-8,0	24	6,0	41	14
8	2,5	25	-10,5	42	17,0
9	5,0	26	7,0	43	19,0
10	4,5	27	7,5	44	-4,0
11	3,5	28	0,0	45	21
12	-11,5	29	8,5	46	18,0
13	4,0	30	9,5	47	23,5
14	6,5	31	-20,0	48	19,5
15	7,0	32	10,5	49	-9,0
16	-6,5	33	10,0	50	14,5
17	7,5	34	11	–	–

Оценить с помощью критерия χ^2 гипотезу о нормальном распределении отклонений x_i от номинального сопротивления при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

24. Проверяется партия небольших внешне одинаковых электрических предохранителей для определения тока, при котором происходит их перегорание. Полученные результаты представлены в табл. 2.43. Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении тока, вызывающего перегорание предохранителей.

Таблица 2.43

Ток, вызывающий перегорание предохранителя, мА	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101
Число предохранителей	3	44	9	10	13	10	8	8	2	2

25. Результаты обследования роста студентов приведены далее. Первоначально длину интервала при группировке взять равной 4 см.

151 168 170 188 158 170 148 162 166 180 176 176 182 162 173 181 164 166 183 172 174 166 154 167 158 166 173 166 162 169 165 178 164 167 176 153 167 173 165 170 174 168 171 162 177 169 153 169 166 175 172 189 163 160 173 185 170 178 171 172 158 162 170 160 175 166 157 167 153 164 174 180 168 173 181 171 155 173 179 165 184 172 170 175 170 162 159 164 172 193 169 173 174 169 171 168 170 168 177 169

Проверить с помощью критерия соответствия Пирсона гипотезу о нормальном распределении роста x студентов.

§8. Критерий равенства двух средних значений

Критерий χ^2 применяется в том случае, когда рассматриваются целые числа. Критерий t Стьюдента позволяет использовать проценты, дробные числа и т. п. Этот критерий применяется для проверки гипотез различного рода, но мы рассмотрим гипотезу, которая находит наиболее широкое применение в инженерной практике: «Средние двух выборок относятся к одной и той же совокупности». Можно привести следующие примеры применения этой гипотезы:

«10 резисторов из коробки A имеют среднее сопротивление, равное 12,4 кОм, а 10 резисторов из коробки B имеют среднее сопротивление 11,9 кОм. В обеих коробках находятся резисторы с одинаковым номинальным сопротивлением». «Измерение расхода горючего на трассе протяженностью 100 км, производимое через каждый километр пути, показало, что автомобиль A потребляет в среднем 0,122 л/км, а автомобиль B – 0,128 л/км. Имеется ли различие в расходе горючего между автомобилями A и B?»

Когда проверяется различие между двумя средними в предположении, что неизвестные генеральные дисперсии равны между собой, формула для критерия t имеет вид

$$t_{\text{набл}} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s_{\text{сум}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}. \tag{2.11}$$

Величина $s_{\text{сум}}$ определяется из выражения

$$s_{\text{сум}}^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}. \qquad (2.12)$$

Таким образом, для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $a_1 = a_2$ о равенстве математических ожиданий (*генеральных средних*) двух нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1*:* $a_1 \neq a_2$*,* надо вычислить наблюдаемое значение критерия по формуле (2.11) и по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. прил. 3) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$. Величину доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ выбирают в пределах 0,90–0,99.

Если $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$ *– нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если* $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$ *– нулевую гипотезу отвергают.*

Пример 1. Из партии бетона, замешанной 25 мая, взяты восемь проб и подвергнуты испытаниям на сжатие. Получены следующие данные о прочности на сжатие: 305,6; 270,8; 298,0; 218,6; 273,3; 270,8; 229,4 и 265,8 кг/см^2. Из партии бетона, замешанной 4 июня, взято 17 проб, и после испытаний получены следующие результаты: 298,0; 263,4; 288,2; 300,7; 327,9; 303,1; 278,2; 296,0; 316,3; 290,7; 318,0; 270,8; 305,6; 320,5; 293,2; 285,5; 316,3 кг/см^2. Насколько известно, состав бетона и методика испытаний не менялись. Определите, относятся ли эти две группы данных к одной и той же совокупности, т. е. на уровне значимости, например, $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве их средних.

Решение. В этом случае применим критерий t. Для упрощения расчетов составим расчетную табл. 66.

Для первой выборки $\bar{x}_1 = \dfrac{2132{,}3}{8}$ = 266,7 кг/см^2*,* а для второй $\bar{x}_2 = \dfrac{5072{,}4}{17}$ = 298,1 кг/см^2. Используя таблицу результатов (2.44), по формуле (2.11) вычислим сводную дисперсию для обеих выборок.

$$s_{\text{сум}}^2 = \frac{6275{,}79 - 5218{,}52}{8 + 17 - 2} \approx 45{,}97.$$

При вычислении s_1^2 и s_1^2 воспользовались тем фактом, что

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{8} \left(x_i - \overline{x_1}\right)^2 \Big/ (8 - 1), \text{ а } s_2^2 = \sum_{j=1}^{17} \left(x_j - \overline{x_2}\right)^2 \Big/ (17 - 1).$$

Откуда $s = \sqrt{45{,}97} \approx 7{,}1$ кг/см^2.

Таблица 2.44

x_i, кг/см^2	$\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2$	x_j, кг/см^2	$\left(x_j - \overline{x_2}\right)^2$
305,6	1513,21	298,0	0,16
270,8	16,81	263,4	1225,00
298,0	979,69	288,2	104,04
270,8	2313,61	300,7	5,29
229,4	43,56	327,9	870,25
265,8	16,81	303,1	20,25
229,4	1391,29	278,2	408,04
265,8	0,81	296,0	5,76
–	–	316,3	320,41
–	–	290,7	52,29
–	–	318,0	384,16
–	–	270,8	761,76
–	–	305,6	51,84
–	–	320,5	488,41
–	–	293,2	27,04
–	–	285,5	166,41
–	–	316,3	320,41
$\sum\limits_{i=1}^{8} x_i = 2132{,}3$	$\sum\limits_{i=1}^{8}\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2 = 6275{,}79$	$\sum\limits_{j=1}^{17} x_j = 5072{,}4$	$\sum\limits_{j=1}^{17}\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2 = 5218{,}52$

Это среднее квадратическое отклонение для двух выборок, рассматриваемых совместно. Заметим, что для майского замеса характерен значительно больший разброс данных, чем для июньского. Находим t по формуле (2.12):

$$t_{\text{набл}} = \frac{298{,}4 - 266{,}7}{7{,}1 \cdot \sqrt{1/8 + 1/17}} = \frac{31{,}7}{3{,}03} = 10{,}5\,.$$

Число степеней свободы равно ($n_1 + n_2$ - 2) = (8+17-2) = 23. Теперь с помощью таблицы прил. 3 находим, что $t_{\text{двуст. кр}}(0{,}05;23) = 2{,}07$. Так как $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}$, нулевую гипотезу о равенстве двух средних отвергаем. Другими словами, справедливость гипотезы, согласно которой обе партии бетона и методика исследований одинаковы, весьма сомнительна.

Пример 2. Рассмотрим эксперимент для оценки четырёх различных приборов для измерения скоростей вращения вала двигателя: стробоскопического тахометра, небольшого визуального устройства «Визутак», механического счетчика оборотов и ручного тахометра.

Таблица 2.45

Группа 1					
Измерительные приборы	Тахометр, об/мин	«Визутак», об/мин	Стробоскопический тахометр, об/мин	Счетчик, об/мин	Осциллограф, об/мин
1	2	3	4	5	6
Скорость вращения вала двигателя	1080 1073 1079 1079 1078	1094 1080 1078 1075 1075	1070 1069 1070 1070 1070	1094 1088 1083 1088 1082	1092 1089 1092 1086 1086
Среднее значение	1078	1080	1070	1087	1089
Отклонение среднего от истинного значения	11	9	19	2	–
Размах	7	19	1	14	6

Группа 2					
1	2	3	4	5	6
Скорость вращения вала двигателя	909 909 909 910 909	910 900 908 898 902	905 902 901 902 901	916 910 914 916 908	902 914 914 916 916
Среднее значение	909	904	902	913	912
Отклонение среднего от истинного значения	3	8	10	-1	–
Размах	1	12	4	8	14
Группа 3					
Скорость вращения вала двигателя	848 847 848 852 844	810 820 820 820 817	840 840 840 840 841	856 848 849 844 850	855 855 855 855 855
Среднее значение	849	817	840	850	855
Отклонение среднего от истинного значения	6	38	15	5	–

Окончание табл.2.45

Размах	4	10	1	12	0
Скорость вращения вала двигателя	729 728 728 729 729	735 735 725 720 724	728 727 725 725 724	736 730 728 728 726	734 734 734 734 734
Среднее значение	729	728	726	730	734
Отклонение среднего от истинного значения	5	6	8	4	–
Размах	1	15	4	8	0

Испытания проводятся следующим образом. Устанавливается определенная скорость вращения вала, и на экране осциллографа получают определенную картину фигур Лиссажу. После этого с четырех различных приборов снимаются данные о скорости вращения об/мин. Если картина на экране осциллографа медленно перемещается, то генератор сигналов перестраивается и для каждого из четырех приборов проводится вторая серия измерений. При каждой заданной скорости вращения снимается пять отсчетов в произвольном порядке чередования скоростей. Лучший план эксперимента состоит в том, что при определенной скорости вращения снимают показания для всего комплекта приборов, затем берут другую скорость, а потом снова возвращаются к первоначальной скорости.

В результате описанного выше эксперимента получены данные о скорости вращения вала, которые представлены в табл. 2.45.

Таблица 2.46

Тахометр	$(x_i - \overline{x_1})$	2	7	-1	-1	0	$\sum_{i=1}^{5}(\overline{x_1} - x_i)^2$ =55
	$(x_i - \overline{x_1})^2$	4	49	1	1	0	
«Визутак»	$(x_i - \overline{x_2})$	14	0	-2	-5	-5	$\sum_{i=1}^{5}(\overline{x_2} - x_i)^2$ =250
	$(x_i - \overline{x_2})^2$	196	0	4	25	25	
Стробоскопический тахометр	$(x_i - \overline{x_3})$	0	-1	0	0	0	$\sum_{i=1}^{5}(\overline{x_3} - x_i)^2$ =1
	$(x_i - \overline{x_3})^2$	0	1	0	0	0	
Счетчик	$(x_i - \overline{x_4})$	7	1	-4	1	-5	$\sum_{i=1}^{5}(\overline{x_4} - x_i)^2$ =92
	$(x_i - \overline{x_4})^2$	49	1	16	1	25	
Осциллограф	$(x_i - \overline{x_5})$	3	0	3	-3	-3	$\sum_{i=1}^{5}(\overline{x_5} - x_i)^2$ =36
	$(x_i - \overline{x_5})^2$	9	0	9	9	9	

Проведем анализ полученных статистических данных с целью проверки соответствия показаний осциллографа и остальных четырех приборов. В этом случае применим критерий Стьюдента *t*. Для первой группы данных результаты вычислений сведем в табл. 2.46.

С помощью этих данных вычислим критерий χ^2 для каждого из приборов и сравним полученные данные с показаниями осциллографа. Рассматривая вначале показания тахометра, проверим следующую нулевую гипотезу: «Показания тахометра и осциллографа имеют одно и то же выборочное среднее» при конкурирующей гипотезе: «Показания тахометра и осциллографа имеют различные выборочные средние». Используя таблицу результатов и формулу (2.11), вычислим сводную дисперсию для обеих выборок:

$$S^2_{\text{сум}} = \frac{(n_1-1)\cdot s_1^2 + (n_2-1)\cdot s_5^2}{n_1+n_2-2} = \frac{55+36}{8} = 11{,}56.$$

При вычислении s_1^2 и s_5^2 воспользовались тем фактом, что

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2 \Big/ (5-1), \text{ а } s_5^2 = \sum_{j=1}^{5}\left(x_j - \overline{x_5}\right)^2 \Big/ (5-1).$$

Откуда $S_{\text{сум}} = 3{,}4$.

По формуле (2.12) вычислим критерий *t:*

$$t_{\text{набл}} = \frac{1089-1078}{3{,}4\cdot\sqrt{1/5+1/5}} = \frac{11}{3{,}4\cdot\sqrt{0{,}4}} = 5{,}1.$$

Число степеней свободы равно (n_1 + n_2 - 2) = (5 + 5 -2) = 8. Теперь с помощью таблицы прил. 3 находим, что если гипотеза справедлива, то вероятность появления этого или большего значения *t* составляет около 0,001 ($t_{\text{двуст. кр}}(0{,}001;8) = 5{,}4$). Для уровня значимости α = 0,05 – $t_{\text{двуст. кр}}(0{,}05;8) = 2{,}31$. Так как $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}$ – нулевую гипотезу о равенстве двух средних отвергаем. Таким образом, следует отклонить данную гипотезу и считать средние значения показаний тахометра и осциллографа различными, хотя разница между ними составляет всего 11 об/мин. Другими словами, если каждое показание будет сниматься 100 или даже 1000 раз, все равно следует ожидать различия в средних.

Такие же вычисления можно выполнить для каждого из остальных приборов и для остальных трех групп данных. Полученные вероятности сведены в табл. 2.47. Каждое значение *P* связано с проверкой гипотезы, согласно которой данный прибор при данной скорости вращения дает показания, имеющие то же самое среднее, что и показания осциллографа (для тахометра $P = 0{,}001$).

Таблица 2.47

Группа	Тахометр P	«Визутак» P	Стробоскопический тахометр P	Счетчик P
1	0,001	0,03	<0,001	>>0,1
2	>0,1	0,009	0,005	>>0,1
3	<0,001	<<0,001	<<0,001	0,015
4	<<0,001	0,19	<<0,001	0,08

Из этой таблицы следует, что если не предполагается провести калибровку или ремонт приборов, то лучше всего использовать счетчик оборотов (можно предположить, что при этом случайная ошибка будет максимальной, так как для получения каждого отсчета необходимо измерять две величины). В трех из четырех случаев данный прибор удовлетворяет принятой «гипотезе соответствия» при уровне значимости, превышающем 5%. В то же время наименьшую случайную ошибку имеют данные, снимаемые со стробоскопического тахометра, но вследствие наличия систематической ошибки наблюдается несоответствие эталонным данным. Если же систематическую ошибку удастся исключить путем ремонта или калибровки прибора, то, возможно, для измерения скорости вращения предпочтительнее использовать стробоскопический тахометр.

Этот простой эксперимент служит лишь для иллюстрации применения методов статистических проверок при проведении инженерных экспериментов.

§9. Критерий равенства двух дисперсий

Критерий t позволяет сравнивать два средних значения. В некоторых случаях бывает более важно сравнить изменчивость, или «размах», двух или большего числа выборок данных. Например, можно вычислить *дисперсию* (т. е. квадрат среднего квадратического отклонения) для двух выборок проб бетона, рассмотренных в примере 1 предыдущего параграфа, не обращаясь к формуле (2.20). Для майского замеса получаем 6275,79/7 = 896,54, а для июньского 5218,52/16 =326,16. Существует ли между этими дисперсиями значимое различие? Ответ на этот вопрос может дать применение так называемого критерия F (обозначенного так по первой букве фамилии английского математика Фишера). Критерий F – это отношение двух дисперсий, вычисленных или полученных различными способами.

Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве *генеральных дисперсий* нормально распределенных совокупностей при конкурирующей гипотезе H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е. $F_{\text{набл}} = s_1^2 / s_2^2$, и по прил. 6 критических точек распределения Фишера – Снедекора по уровню значимости $\alpha/2$ (вдвое меньшем заданного) и числам степеней свободы $k_1=n_1-1$и $k_2=n_2-1$ (k_1 – число степеней свободы большей дисперсии) найти критическую точку $F_{\text{кр}}(\alpha/2; k_1; k_2)$.

Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

В рассматриваемом выше примере отношение дисперсии для первой партии к дисперсии для второй партии составляет $F_{\text{набл}}$ =896,54/326,16 =2,75. Для майской выборки число степеней свободы $k_1=8-1=7$, а для июньской $k_2=17-1=16$. Заметим, что прил. 6 составлено при допущении, что k_1 относится к выборке данных, имеющей *большую* дисперсию. Из прил. 6 для $k_1=7$ и $k_2=16$ находим, что $F_{\text{кр}}(0{,}1/2;7;16) = 2{,}6$. Так как $F_{\text{набл}} = 2{,}75 > 2{,}6 = F_{\text{кр}}$, отвергаем гипотезу о том, что эти две дисперсии соответствуют одной и той же совокупности. Отсюда делаем вывод, что прочность бетона не только колеблется в течение суток, но и средние суточные значения также изменяются.

Пример. В результате испытаний 30 образцов из утяженного конца прессованного профиля и 20 образцов из выходного конца найдены средние значения и дисперсии предела прочности алюминиевого сплава, которые составили: $\bar{x}_1 = 40{,}1$кг/мм^2; $s_1= 0{,}82$ и $\bar{x}_2 = 40{,}9 =$ кг/мм^2, $s_2=0{,}71$ соответственно для утяженного и выходного конца. Требуется оценить на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ расхождения в выборочных дисперсиях.

Решение. В условиях рассматриваемого примера $F_{\text{набл}} = 0{,}82/0{,}71 = 1{,}15$. По прил. 6 для $k_1 = n_1-1=29$ и $k_2 = n_2-1=19$ находим $F_{\text{кр}}(0{,}1/2;29;19) = 2{,}07$. Так как $F_{\text{набл}} = 1{,}15 < 2{,}07 = F_{\text{кр}}$, то отсутствует значимое различие в дисперсиях предела прочности указанных групп образцов, т. е. можно принять, что зоны профиля равноценны в смысле однородности материала $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma\right)$.

Индивидуальные задания

1. Из продукции двух станков извлечены две выборки по 50 изделий; результаты измерения одного из размеров изделия (в мм) приведены в табл. 2.47.

Таблица 2.47

№ п/п	Ст.1	Ст.2	№ п/п	Ст.1	Ст.2	№ п/п	Ст.1	Ст.2
1	51,58	51,50	18	51,18	51,39	35	51,56	51,55
2	35	35	19	66	46	36	56	10
3	33	69	20	35	42	37	42	44
4	54	60	21	50	39	38	29	19
5	24	54	22	50	16	39	31	24
6	42	42	23	54	51	40	30	31
7	47	54	24	48	50	41	12	51
8	54	55	25	36	50	42	28	46
9	24	33	26	50	48	43	51	39
10	36	56	27	42	53	44	39	39
11	58	68	28	56	25	45	15	30
12	70	39	29	56	48	46	42	30
13	47	42	30	48	36	47	36	42
14	50	15	31	42	53	48	28	55
15	26	48	32	56	23	49	30	44
16	47	46	33	34	55	50	48	24
17	05	42	34	36	51			

При уровне значимости $\alpha = 0{,}20$ проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, т. е. распределение размера изделия одинаково для обоих станков.

2. Скорость вращения вала, полученная абсолютным методом (электронный осциллограф и генератор сигналов прокалиброваны на линейную частоту), составляет 1010 об/мин. Стробоскопический и ручной тахометры дают результаты, представленные в табл. 2.48.

Таблица 2.48

Стробоскопический тахометр	1000	980	995	1020	1005
Ручной тахометр	990	1020	1000	1010	1040

Проверьте справедливость следующих гипотез: «Обе группы отсчетов принадлежат одной и той же совокупности»; «Отклонения отсчетов обеих групп от истинного значения принадлежат одной и той же совокупности». Для проверки второй гипотезы необходимо вычислить средние отклонения с учетом знака.

3. Два физика провели подсчет числа δ–электронов на каждом участке длиной 100 мкм одной и той же фотопластинки. Получены следующие результаты (табл. 2.49).

Таблица 2.49

A	10	23	9	46	7	11	10	15	7	8	12	36	28
B	8	21	8	43	7	11	10	12	6	8	11	35	29
A-B	2	2	1	3	0	0	0	3	1	0	1	1	1

Аналогичные данные (17 результатов) получены для второй пластинки. Абсолютные разности $A - B$ равны: 0, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 0, 1, 6, 2, 0, 2. Используя критерий t, сравните эти две группы отклонений и определите, принадлежат ли они одной и той же бесконечной совокупности.

4. Радиолампы одного и того же типа с металлическим и стеклянным корпусами проверяются на долговечность в предельных условиях. Полученные результаты (в часах) представлены в табл. 2.50.

Используя критерий t, проверьте соответствующую гипотезу.

Таблица 2.50

Лампы с металлическим корпусом	53	40	92	67	89
Лампы со стеклянным корпусом	45	40	47	–	–

5. Два прибора *A* и *B* используются для измерения теплопроводности данного образца. Результаты измерений представлены в табл. 2.51.

Таблица 2.51

A, ккал/м·ч °C	14,23	14,12	14,32	14,15	14,26	14,33	–
B, ккал/м·ч °C	13,88	13,71	13,72	13,41	13,23	13,39	13,72

Проверьте справедливость следующей гипотезы: «Обе группы измерений принадлежат одной и той же совокупности».

6. Двумя методами проведены измерения одной и той же физической величины. Получены следующие результаты:

а) в первом случае $x_1 = 9{,}6$; $x_2=10{,}0$; $x_3 = 9{,}8$; $x_4=10{,}2$; $x_5=10{,}6$;

б) во втором случае $y_1 = 10{,}4$; $y_2 = 9{,}7$; $y_3 = 10{,}0$; $y_4 = 10{,}3$.

Можно ли считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений, если принять уровень значимости $\alpha=0{,}1$? Предполагается, что результаты измерений распределены нормально и выборки независимы.

7. Для сравнения точности двух станков - автоматов взяты две пробы (выборки), объемы которых $n_1 = 10$ и $n_2 = 8$. Результаты измерения контролируемого размера отобранных изделий представлены в табл. 2.52.

Таблица 2.52

Первый станок x_i	1.08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1.38	1,40	1,42
Второй станок y_j	1.11	1,12.	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38	–	–

Можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью $[H_0 : D(X) = D(Y)]$, если принять уровень значимости α =0,1 и в качестве конкурирующей гипотезы $[H_1 : D(X) \neq D(Y)]$?

8. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии контролируемого размера изделий, которая не должна превышать $\sigma_0^2 = 0{,}1$. Взята проба из 25 случайно отобранных изделий. Результаты измерений представлены в табл. 2.53.

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить, обеспечивает ли станок требуемую точность.

Таблица 2.53

Контролируемый размер изделий пробы x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Частота n_i	2	6	9	7	1

9. В результате длительного хронометража времени сборки узла различными сборщиками установлено, что дисперсия этого времени $\sigma_0^2 = 2\,\text{мин}^2$. Результаты 20 наблюдений за работой новичка представлены в табл. 2.54.

Таблица 2.54

Время сборки одного узла x_i, мин	56	58	60	62	64
Частота n_i	1	4	10	3	2

Можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что новичок работает ритмично (в том смысле, что дисперсия затрачиваемого им времени существенно не отличается от дисперсии времени остальных сборщиков)?

10. Партия изделий принимается, если дисперсия контролируемого размера значимо не превышает 0,2. Исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема $n = 121$, оказалась равной $s_X^2 = 0{,}3$. Можно ли принять партию при уровне значимости 0,01?

11. Химическая лаборатория произвела в одном и том же порядке анализ 8 проб двумя методами. Полученные результаты приведены в табл. 2.55 (в первой строке указано содержание некоторого вещества в процентах в каждой пробе, определенное первым методом; во второй строке – вторым методом).

Таблица 2.55

x_i	15	20	16	22	24	14	18	20
y_i	15	22	14	25	29	16	20	24

При уровне значимости $\alpha = 0{,}20$ проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, т. е. содержание некоторого вещества одинаково для обоих методов.

12. Две лаборатории одним и тем же методом, в одном и том же порядке определяли содержание углерода в 13 пробах нелегированной стали. Полученные результаты анализов приведены в табл. 2.56 (в первой строке указано содержание углерода в процентах в каждой пробе, полученное первой лабораторией; во второй строке–второй лабораторией).

Таблица 2.56

x_i	0,18	0,12	0,12	0,08	0,08	0,12	0,19
y_i	0,16	0,09	0,08	0,05	0,13	0,10	0,14
x_i	0,32	0,27	0,22	0,34	0,14	0,46	–
y_i	0,30	0,31	0,24	0,28	0,11	0,42	–

Проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, т. е. содержание углерода одинаково для обеих лабораторий, при уровне значимости $\alpha = 0{,}20$.

13. В табл. 2.57 приведены данные об объемах работ, выполняемых на стройке за смену двумя бригадами в течение четырех дней.

Таблица 2.57

Объём выполненной работы	1-й день	2-й день	3-й день	4-й день
Бригада 1	150	149	152	145
Бригада 2	148	149	146	147

При уровне значимости $\alpha = 0{,}20$ проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, т. е. объём выполняемых работ одинаков для обеих бригад.

14. Имеются две партии сырья для промышленности. Из каждой партии отобрано по пять образцов, и проведены испытания на определение величины разрывной нагрузки.

Результаты испытаний приведены в табл. 2.58.

Таблица 2.58

Партия	Разрывная нагрузка, кг/см				
1-я	200	140	170	145	165
2-я	150	170	150	170	180

Выяснить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, существенно ли влияние различных партий сырья на величину разрывной нагрузки.

15. Учет времени сборки узла машины бригадой из 10 слесарей показал, что среднее время (в минутах) сборки узла равно $\bar{x} = 76$, а исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема $n = 10$, оказалась равной $s^2 = 15$.

Предполагая распределение времени сборки нормальным, проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о том, что 75 минут являются нормативом (математическим ожиданием) трудоемкости.

16. Номинальная точность прибора равна $\sigma_0 = 2$ мкм. Из 10 замеров детали была получена выборочная дисперсия показаний прибора, равная $s^2 = 0{,}9$.

На уровне доверия $\gamma = 0{,}9$ проверить гипотезу «Отклонения показаний прибора и его точность принадлежат одной и той же совокупности».

17. По техническим условиям средняя прочность троса составляет 2000 кг. В результате испытаний 20 кусков троса было установлено, что средняя прочность на разрыв равна 1955 кг при средней ошибке 25 кг.

Удовлетворяет ли образец троса техническим условиям?

18. Для проверки новой технологии были выбраны две группы рабочих, численностью n_1 = 40 человек и n_2 =50 человек. В первой группе, при применении старой технологии, средняя выработка составила $\bar{x}_1$= 85 (изделий), во второй, где применялась новая технология, $\bar{x}_2$= 95. Дисперсии по группам σ_1^2= 100, σ_2^2= 75 были известны заранее.

Выяснить на уровне значимости α = 0,05 влияние новой технологии на производительность.

19. Средний годовой оборот 5 компаний в регионе A составил 4900 усл. ед., средний оборот 10 компаний в регионе B составил 5000 усл. ед. Выборочная дисперсия оборота компаний в регионе A оказалась равной 1000, а в регионе B –4000. Считая дисперсии среднегодовых оборотов одинаковыми, проверить на уровне значимости α = 0,05 гипотезу о равенстве средних значений в регионах A и B.

20. При проверке размеров подшипников из двух партий по 10 штук в каждой, поставленных разными заводами, были обнаружены отклонения от номинала, характеризуемые выборочными дисперсиями s_1^2 =9, s_2^2= 8,5.

Можно ли считать при уровне доверия γ = 0,95 одинаковой точность изготовления подшипников разными заводами?

21. При обследовании диаметров карданных валов автомобиля, выпускаемых заводом, были зафиксированы отклонения от номинала Δd (мкм), приведенные в табл. 2.59.

Таблица 2.59

0,000	-0,001	0,003	-0,012	0,044	-0,156	0.534	0,802	0,007	-0,822
0,873	-0,838	0,170	-0,476	0,322	-0,648	0,991	-0.107	-0,726	-0,393
-0,827	0,419	0,071	0,659	0,309	0,927	-0,778	-0,327	0,961	-0,826
0,308	-0,414	-0,707	-0,515	0,729	0,742	0,884	0.632	-0,835	0,318
-0,394	0,502	0,471	0,306	0,600	0,846	-0,678	0,454	0.623	0,648

Построить вариационный ряд выборки и с помощью критерия Ирвина проверить нулевую гипотезу, заключающуюся в том, что значения первого и последнего отклонений диаметра вариационного ряда принадлежат той же генеральной совокупности, что и все остальные.

22. Наблюдения за межремонтными интервалами T (в месяцах) работы зерноуборочного комплекса дали результаты, приведенные в табл. 2.60.

Таблица 2.60

0,000	0,000	0,002	0,006	0,023	0,084	0,382	0,810	0,003	0,864
1,033	0,912	0,093	0,323	0,194	0,522	2,336	0,057	0,648	0,250
0,877	0,271	0,037	0,537	0,183	1,306'	0,752	0,198	1,623	0,875
0,184	0,276	0,613	0,362	0,654	0,676	1,079	0,500	0,900	0,191
0,250	0,348	0,318	0,182	0,458	0,936	0,567	0,303	0,487	0,522

Построить вариационный ряд выборки и с помощью критерия Ирвина проверить нулевую гипотезу, заключающуюся в том, что значения первого и последнего межремонтных интервалов вариационного ряда принадлежат той же генеральной совокупности, что и все остальные.

23. Для определения надежности металлорежущих станков на заводе фиксировались значения наработки на отказ (время τ непрерывной работы до первого отказа). Полученные данные для τ (в месяцах) приведены в табл. 2.61.

Таблица 2.61

0,031	0,244	0,098	0,195	0,759	0,231	0,415	0,442	0,260	0,106
0,062	4,078	0,902	0,407	0,736	0,577	0,079	1,312	1,574	0,058
3,206	0,197	2,698	4,249	0,252	0,602	0,243	0,106	0,340	1,073
0,095	0,522	0,321	0,045	0,221	0,338	0,172	0,330	0,509	0,484
0,662	0,052	0,442	0,013	0,079	0,079	0,577	0,618	0,090	0,777

Построить вариационный ряд выборки и с помощью критерия Ирвина проверить нулевую гипотезу, заключающуюся в том, что первое и последнее значения наработки на отказ вариационного ряда принадлежат той же генеральной совокупности, что и все остальные

§ 10. Случайные ошибки. Законы распределения случайных ошибок в измерительных приборах

В заключении рассмотрим применение методов статистических проверок при проведении инженерных экспериментов. В предыдущих параграфах рассмотрены применения методов статистических проверок при проведении инженерных экспериментов как средство анализа всего эксперимента в целом. В этом параграфе используем понятия математической статистики для обнаружения и описания случайных ошибок в измерительных приборах применительно к таким понятиям математической статистики, как генеральная совокупность и выборка, нормальный закон, среднее квадратическое отклонение, среднее значение и т. д.

А именно рассмотрим определение меры точности по результатам измерений. Ошибки измерений делятся на две категории. К систематическим ошибкам относятся ошибки, искажающие результат в определенную сторону и имеющие закономерный характер, то есть среднее значение последовательных отсчетов откланяется от известного значения и продолжает отклоняться независимо от числа последовательных отсчетов. Сюда относятся инструментальные ошибки, происходящие от несовершенства инструмента, ошибки, вызванные методикой постановки эксперимента, и некоторые другие.

Поскольку влияние таких ошибок на результаты наблюдений может быть более или менее точно заранее установлено, а значит, и устранено, мы будем считать имеющиеся в нашем распоряжении результаты опыта свободными от систематических ошибок.

В дальнейшем остановимся на рассмотрении *случайных ошибок*, которые имеют место, когда при последовательных измерениях постоянной величины получаются различные числовые значения. Предполагается, что случайные ошибки ε подчинены следующим условиям:

1) Равные по абсолютной величине ошибки равновероятны.

2) Малые по абсолютной величине ошибки более вероятны, нежели большие.

3) Вероятность появления ошибок, превосходящих по абсолютной величине некоторое определенное число, практически равна нулю. Это число обычно называют пределом возможных ошибок и обозначают через ε.

Пусть $F(\varepsilon)$– интегральный закон (функция) распределения ошибок, т. е. вероятность того, что ошибка α не превосходит величины ε

$$F(\varepsilon) = P(\alpha \le \varepsilon). \qquad (2.13)$$

Естественно считать, что ошибки представляют собой непрерывную случайную величину. Тогда вероятность того, что ошибка примет значение, заключенное между ε и $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\Delta\varepsilon$, выразится формулой

$$P(\varepsilon \le \alpha \le \varepsilon + \Delta\varepsilon) = f(\varepsilon)\Delta\varepsilon, \qquad (2.14)$$

где $f(\varepsilon) = F'(\varepsilon)$ –дифференциальный закон (плотность) распределения ошибок.

Исходя из сделанных раньше предположений, мы можем установить соответствующие свойства функции $f(\varepsilon)$.

1°. *Функция* $f(\varepsilon)$ – *четная*, т. е. $f(\varepsilon) = f(-\varepsilon)$. Четность следует из того, что равные отклонения в обе стороны одинаково вероятны и поэтому плотности распределения вероятности в точках ε и $-\varepsilon$ равны между собой.

2°. *Функция* $f(\varepsilon)$ при возрастании $|\varepsilon|$ убывает, так как малые по абсолютной величине ошибки более вероятны, чем большие.

3°. Функция $f(\varepsilon) \approx 0$ при $\varepsilon \ge E$.

Таким образом, вероятность того, что ошибка ε заключена в некоторых заранее указанных пределах $a \le \varepsilon \le b$, как установлено раньше (см. § 6 гл. 1), выражается интегралом

$$P(a \le \varepsilon \le b) = \int_a^b f(\varepsilon)d\varepsilon. \qquad (2.15)$$

Согласно основному свойству функции $f(\varepsilon)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)d\varepsilon = 1.$$

В силу того, что $f(\varepsilon) \approx 0$ вне участка $(-E, E)$, последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_{-E}^{E} f(\varepsilon)d\varepsilon = 1. \qquad (2.16)$$

Пусть истинное значение измеряемой величины (нам неизвестное) равно A. Измеренное значение x этой же величины есть величина случайная, закон распределения которой тесно связан с законом распределения ошибок. Действительно, так как $A - x = \varepsilon$, то вероятность получения в результате измерения ошибки ε и значения x одна и та же. Если обозначить плотность вероятности величины x через $f_1(x)$, то в силу четности функции $f(\varepsilon)$ получим

$$f_1(x) = f(x - A).$$

Заметим, что значение случайной величины, при котором ее дифференциальный закон распределения достигает максимума, называется *модой случайной величины.* Для $f(x)$ это $x = 0$, для $f_1(x)$ – $x = A$.

Допустим, что одним и тем же инструментом с одинаковой тщательностью произведено несколько измерений одной и той же физической величины (например, длины стержня при определенной температуре). Результатом этих измерений является некоторый ряд чисел, располагая которым мы хотим определить наиболее вероятное значение измеряемой величины, т. е. то ее значение, при котором дифференциальный закон распределения достигает своего максимума.

Вообще говоря, случайные ошибки измерений могут иметь различные законы распределения. Однако в большинстве случаев принимается, что случайная ошибка распределена по нормальному закону, который был рассмотрен нами в § 7 предыдущей главы.

Если кроме сделанных выше предположений принять постулат Гаусса, который состоит в том, *что наиболее вероятным значением искомой величины является среднее арифметическое наблюденных значений,* то можно сформулировать теорему.

Теорема. Если случайные ошибки удовлетворяют постулату Гаусса, то законом распределения случайных ошибок является нормальный закон

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \tag{2.17}$$

Величина h, входящая в выражение (2.17), называется *мерой точности*. Сравнивая (2.17) с плотностью вероятности нормального распределения, которое было приведено в предыдущей главе (см. §7 гл. 1),

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.18}$$

замечаем, что выражение (2.17) для плотности распределения ошибок является частным случаем нормального распределения (2.18) с математическим ожиданием a=0 и дисперсией $\sigma = \dfrac{1}{h\sqrt{2}}$. В дальнейшем для единообразия обозначений дифференциальный закон распределения ошибок будем обозначать функцией $\varphi(x)$.

Таким образом, если принять постулат Гаусса, то случайные ошибки будут распределены по нормальному закону. Функция (2.18) и ее кривая непрерывны, т. е. они описывают совокупность, содержащую бесконечное множество измерений. Эта неограниченно большая воображаемая совокупность результатов измерений называется *генеральной совокупностью.* Ограниченная совокупность числа измерений (результатов испытаний), являющаяся частью генеральной совокупности, предназначенная для испытаний, называется *выборкой.* В некоторых типах наблюдений (при малом числе измерений) постулат не выполняется, и в этом случае приходится рассматривать другие законы распределения ошибок.

Тем не менее в подавляющем большинстве случаев принимается, что случайные ошибки распределены именно по нормальному закону.

Тогда

$$P(-\alpha \le \varepsilon \le \alpha) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-h^2x^2} dx,$$

или в силу четности функции, стоящей под интегралом,

$$P(-\alpha \le \varepsilon \le \alpha) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\alpha} e^{-h^2x^2} dx.$$

Положив в интеграле $hx = t$, представим вероятность $P(-\alpha \le \varepsilon \le \alpha) = P_\alpha$ в виде

$$P_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\alpha} e^{-t^2} dt. \tag{2.19}$$

Функцию

$$\Phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt \tag{2.20}$$

назовем *интегралом ошибок* или *функцией ошибок*. Из (2.19) и (2.20) следует, что

$$P_\alpha = \Phi^*(h\alpha).$$

$$\Phi^*(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{2.21}$$

рассмотренная нами ранее в §7 гл.1 функция Лапласа. Окончательно имеем

$$P_\alpha = 2\Phi(h\alpha\sqrt{2}) \tag{2.22}$$

или же, учитывая связь меры точности с дисперсией,

$$P_\alpha = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right). \tag{2.23}$$

Аналогично можно получить

$$P_{a,\,b} = \Phi\left(hb\sqrt{2}\right) - \Phi\left(ha\sqrt{2}\right). \tag{2.24}$$

Пример 1. Предполагается, что показания тахометра отклоняются относительно 1000 об/мин по нормальному закону и h= 0,04 (об/мин)$^{-1}$. При этой скорости вращения берется выборка, содержащая 20 отсчетов. Какое число отсчетов будет находиться в интервале от 990 до 1010 об/мин?

Решение. В данном случае α= ±10 об/мин, тогда

$$h\alpha\sqrt{2} = 10\cdot 0{,}04\sqrt{2} = 0{,}566.$$

Из прил.1 находим, что вероятность нахождения отсчета в этом интервале составляет 0,4314. Таким образом, можно ожидать, что из 20 последовательных отсчетов 20·0,4314, или 8,628 отсчета, будут находиться в интервале от 990 до 1010 об/мин, т. е. практически 8 – 9 отсчетов. Так как выборка, содержащая 20 отсчетов, невелика, то в действительности при каком - либо испытании в данном интервале могут оказаться 6 – 7 или 10 – 11 отсчетов.

Точность данной измерительной системы удобно выражать некоторым одним числом или *показателем точности.* Рассмотрим два таких показателя, каждый из которых указывает, с какой точностью прибор может измерять требуемую величину. Этими показателями являются:

1. *Средняя квадратическая ошибка* (или дисперсия σ^2), которая определяется как квадратный корень из математического ожидания квадрата ошибки ε^2. Поскольку, как было показано в §6 гл.1,

$$\sigma^2 = M\left(\varepsilon^2\right) - \left(M(\varepsilon)\right)^2,$$

а $M(\varepsilon) = 0$, то $\sigma^2 = M\left(\varepsilon^2\right)$. Поэтому среднюю квадратическую ошибку обозначим через среднее квадратическое отклонение σ, которое связано с мерой точности равенством

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}} \tag{2.25}$$

или $h\sigma =$ 0,707. Вероятность того, что отклонения будут находиться в пределах $\pm h\sigma$, определяется из прил.1 и составляет 68,2%.

2. *Вероятная ошибка Q*. Эта величина определяется как такое отклонение, при котором в интервале $\pm Q$ находится ровно половина всей совокупности, т. е.

$$P_Q = 0{,}5\,. \qquad (2.26)$$

Пользуясь формулой (2.21) и предполагая, что случайная ошибка распределена по нормальному закону, получаем

$$P_Q = 2\Phi\left(hQ\sqrt{2}\right) = 0{,}5\,. \qquad (2.27)$$

Из таблицы значений функции Φ (прил. 2) находим, что $hQ\sqrt{2} = 0{,}6745$ или

$$Q = 0{,}4769 / h\,. \qquad (2.28)$$

Пример 2. В примере 1 был рассмотрен тахометр, имеющий $h =$ $=0{,}04$ (об/мин)$^{-1}$. Найдите два показателя точности данного прибора и число оборотов в минуту, заключенных в интервалах $\pm\sigma$ и $\pm Q$.

Решение. Из формул (2.25) и (2.28) видно, что

$$\sigma = \frac{0{,}707}{0{,}04} = 17{,}7 \text{ об/мин}, \quad Q = \frac{0{,}4769}{0{,}04} = 11{,}9 \text{ об/мин}.$$

Таким образом, 68,2% всех отсчетов при калиброванном значении 1000 об/мин находится в интервале от 982,3 (1000-17,7) до 1017,7 (1000+17,7) об/мин, а половина всех отсчетов заключена между 988,1 и 1011,9 об/мин.

В заключение отметим роль величины h как характеристики точности произведенных измерений. Уже из связи величины h с дисперсией видно, что при больших h вероятность малых ошибок весьма велика, а вероятность больших ошибок весьма мала. Чем меньше h, тем больше дисперсия, т. е. тем больше рассеяние ошибок. Особенно ясно выступает роль величины h как меры точности при рассмотрении выражений для вероятной и средней квадратической ошибок. Формулы (2.25), (2.26) показывают, что эти ошибки обратно пропорциональны мере точности h, которая дает возможность оценить надежность произведенных измерений.

Поэтому, естественно, возникает задача – определить меру точности по результатам измерений. При этом мы будем предполагать, что все измерения произведены с одинаковой тщательностью, т. е. являются равноточными, и что случайные ошибки распределены по закону Гаусса. Тогда, как было сказано ранее, наиболее вероятным значением x измеряемой величины является среднее арифметическое наблюденных значений.

Пусть результатами измерений некоторой величины A являются числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда наивероятнейшее значение величины x равно

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{2.29}$$

Действительно вероятность появления x_1, находящейся в малом интервале Δx, равна

$$\Delta P_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \Delta x e^{-h^2 (A - x_1)^2}.$$

Аналогичные выражения могут быть получены для вероятностей появления измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вероятность появления всей этой выборки, состоящей из n измерений, равна произведению вероятностей появления отдельных измерений (см. §3 гл. 1). Суммарная вероятность появления последовательности, состоящей из n измерений, равна

$$\Delta P_{\textbf{сум}} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n \Delta x^n e^{-h^2 \left[(A - x_1)^2 + (A - x_2)^2 + \ldots + (A - x_n)^2 \right]}. \tag{2.30}$$

Допустим, что измерения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в совокупности отклоняются от истинного отсчета x таким образом, что суммарная вероятность появления этих отклонений максимальна. Прямое следствие этого допущения применительно к формуле (2.29) выражается следующим образом:

$$(A - x_1)^2 + (A - x_2)^2 + \ldots + (A - x_n)^2 \to \min,$$

т.е. сумма квадратов отклонений от наилучшего или точного измерения должна быть минимальной. Дифференцируя $\Delta P_{\textbf{сум}}$ в формуле (2.30) по A, получаем

$$\frac{d(\Delta P_{\textbf{сум}})}{dA} = -\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n \Delta x^n 2h^2 \left[(A - x_1) + (A - x_2) + \ldots + (A - x_n) \right] \times$$
$$\times e^{-h^2 \left[(A - x_1)^2 + (A - x_2)^2 + \ldots + (A - x_n)^2 \right]}.$$

Эта производная равна нулю только в одном случае, а именно когда

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

т. е. мы доказали справедливость формулы (2.29). Однако не следует думать, что среднее $\bar{x}$, полученное для n измерений, будет в точности равно математическому ожиданию $M(x)$, получаемому при бесконечном множестве измерений.

Дифференцируя $\Delta P_{\text{сум}}$ в формуле (2.30) по h, получаем

$$\frac{d\left(\Delta P_{\text{сум}}\right)}{dh}=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{n}\Delta x^{n} e^{-h^{2}\left[(A-x_1)^2+(A-x_2)^2+\ldots+(A-x_n)^2\right]}\times$$
$$\times\left(n\cdot h^{n-1}-2h^{n+1}\left[\left(A-x_1\right)+\left(A-x_2\right)+\ldots+\left(A-x_n\right)\right]\right).$$

Эта производная равна нулю, когда

$$h=1/\sqrt{\frac{2\sum_{i}^{n}\left(\bar{x}-x_i\right)^2}{n-1}}. \qquad (2.31)$$

Зная меру точности, пользуясь формулой (2.25), найдем среднюю квадратическую ошибку (среднее квадратическое отклонение) s. Здесь вместо σ записано s, так как рассматривается конечная выборка отклонений, а не вся бесконечная генеральная совокупность, как приводилось выше. На практике проводится конечное число измерений или испытаний. Найденные таким образом числовые характеристики в большей или меньшей степени будут отличаться от так называемых *генеральных характеристик,* свойственных данному объекту, которые могут быть определены по результатам испытаний бесконечно большого числа измерений или испытаний.

Отмеченная разница в *выборочных* и генеральных характеристиках результатов испытаний зависит от объема выборки. С увеличением числа испытаний в связи с проявлением закона больших чисел выборочные характеристики сходятся по вероятности к генеральным характеристикам, т.е. вероятность события, заключающегося в том, что разница между указанными характеристиками не будет превышать сколь угодно малую величину, при увеличении объема выборки неограниченно приближается к единице.

На практике обычно имеют дело только с выборочными характеристиками, на основании которых судят об уровне генеральных характеристик. Ранее было получено выборочное среднее $\bar{x}$ (см. (2.29)). А из формул (2.25) и (2.31) выборочное среднее квадратическое отклонение

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}\left(\bar{x}-x_i\right)^2}{n-1}}. \qquad (2.32)$$

Пример 3. Оптический пирометр установлен на светящуюся нить накала, и различными операторами было произведено несколько измерений температуры. Получены следующие результаты (табл. 2.62).

Таблица 2.62

Температура, °C	925	950	975	1000	1025	1050
Число измерений	1	9	6	18	10	2

Требуется найти среднюю квадратическую и вероятную ошибки в предположении, что эта выборка взята из нормально распределенной совокупности.

Решение. Найдем сначала выборочное среднее значение $\bar{x}$. Проще находить среднее для 1000 – x, а не для x:

Таблица 2.63

$1000 – x_i$	Число измерений n	$n \cdot (1000 – x_i)$	x_i^2	$n \cdot x_i^2$
75	1	75	5625	5625
50	9	450	2500	22500
25	6	150	625	3750
0	18	0	0	0
-25	10	-250	625	6250
-50	2	-100	2500	5000
$\sum_{i=1}^{n}$	46	325	–	43125

Сумма членов третьего столбца равна +325 (табл. 2.63), откуда после деления на 46 (число измерений) получаем +7,1; следовательно, $\bar{x}$ = 992,9°C. Отсчеты округлены с точностью до 25 °C, поэтому для дальнейших вычислений целесообразно принять $\bar{x}$ = 1000 °C. Теперь найдем s. Имеем

$$s = \sqrt{\frac{43125}{46-1}} = 31^{\circ}\,\mathrm{C}.$$

Вероятная ошибка Q вычисляется по формуле $hQ\sqrt{2} = 0{,}6745$, где $h = 1/\sqrt{2} \cdot s$, откуда

$$Q = s \cdot 0{,}6745. \qquad (2.33)$$

Подставив в формулу (2.33) значение s, получим $Q = 21^{\circ}\,\mathrm{C}$. Правильно будет указать, что температура составляет 993 ± 21°C. Это означает, что в данном интервале значений находится половина всех измерений.

В примере 3 мы использовали (n – 1), так как истинное или наилучшее значение не было в точности известно до получения данных и его нужно было найти путем усреднения результатов. Если бы источник, на который направлен пирометр, был откалиброван на 1000 °С, то в формуле (2.32) для среднего квадратического отклонения вместо (n – 1) нужно было бы взять n. Для выборки, содержащей 46 элементов, такая замена несущественна.

Если имеется набор случайных данных, для которых требуется найти выборочное среднее квадратическое отклонение без предварительного вычисления выборочного среднего значения, то можно использовать выражение

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}. \tag{2.34}$$

Формула (2.34) удобна при рассмотрении задач статистического анализа.

Пример 4. Один и тот же угол был измерен 10 раз. Получены следующие результаты (табл. 2.64).

Таблица 2.64

Номер наблюдения	1	2	3	4	5
Угол l	85°42'12"	85°42'00"	85°41'58"	85°42'04"	85°42'06"
Номер наблюдения	6	7	8	9	10
Угол l	85°42'09"	85°42'03"	85°42'08"	85°41'54"	85°41'56"

Требуется найти выборочное среднее квадратическое отклонение s.

Решение. В качестве условного нуля принято значение $l_о$ = 85°42'00", тогда $l_{01} = 12$, $l_{02} = 0$, $l_{03} = -2$ и т. д. По формуле (2.34) имеем

$$s^2 = \frac{12^2 + 0^2 + (-2)^2 + 4^2 + 6^2 + 9^2 + 3^2 + 8^2 + (-6)^2 + (-4)^2}{10-1} +$$

$$+ \frac{(12 + 0 - 2 + 4 + 6 + 9 + 3 + 8 - 6 - 4)^2}{10 \cdot (10-1)} = 35{,}111.$$

Откуда выборочное среднее квадратическое отклонение s = 5",93.

Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение для выборочного среднего значения $\bar{x}$, полученного для *n* равноточных измерений с одинаковой мерой точности или, что то же самое, с одинаковым средним квадратическим отклонением s. Действительно, дисперсия среднего арифметического *n* одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в *n* раз меньше дисперсии *D* каждой из величин:

$$D(\bar{x}) = D/n.$$

Это следует из свойств дисперсии (постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий слагаемых):

$$D(\bar{x}) = D\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{D(x_1) + D(x_2) + \ldots + D(x_n)}{n^2} = \frac{nD}{n^2} = \frac{D}{n};$$

$$s(\bar{x}) = \sqrt{D(\bar{x})} = \sqrt{D/n} = \sqrt{D}/\sqrt{n} = s/\sqrt{n}. \qquad (2.35)$$

Средняя квадратическая погрешность (среднее квадратическое отклонение) среднего значения равна средней квадратической погрешности отдельного результата, деленной на корень квадратный из числа измерений.

Это фундаментальный закон возрастания точности при росте числа наблюдений (измерений). Из него следует, что, желая повысить точность измерений в 2 раза, мы должны сделать вместо одного четыре измерения, чтобы повысить точность в 3 раза, нужно увеличить число измерений в 9 раз, и, наконец, увеличение числа наблюдений в 100 раз приведет к десятикратному увеличению точности измерений. Разумеется, это рассуждение относится лишь к измерениям, при которых точность результата полностью определяется случайной ошибкой. В этих условиях, выбрав *n* достаточно большим, мы можем существенно уменьшить ошибку результата.

В примере 4 мы получили выборочную среднюю квадратическую ошибку отдельного измерения, равную s = 5,93". Пользуясь (2.35), можно определить среднюю квадратическую ошибку арифметической средней, которая равна

$$s(\bar{x}) = s/\sqrt{n} = 5{,}93''/\sqrt{10} \approx 1{,}9''.$$

Очевидно, важнее знать, насколько может уклониться от истинного значения *a* арифметическая средняя $\bar{x}$ наших измерений. Зададимся уровнем статистической значимости α или вероятностью $\gamma = 1-\alpha$, которая носит название *доверительной вероятности или надежно-*

сти. И определим по ней интервал, называемый *доверительным,* за пределы которого не выходят результаты наших измерений в $P = \gamma \cdot 100$ процентах случаев. Для этого воспользуемся формулой (2.10), заменив σ на $s(\bar{x})$, получим

$$P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \gamma \quad \text{или} \quad P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/s) = 2\Phi(t_{\alpha,k}),$$

где $t_{\alpha,k} = \varepsilon\sqrt{n}/s$.

Найдя из последнего равенства $\varepsilon = t_{\alpha,k} \cdot s/\sqrt{n}$, можем написать

$$P(\bar{x} - t_{\alpha,k} \cdot s/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t_{\alpha,k} \cdot s/\sqrt{n}) = 2\Phi(t) = 1 - \alpha. \qquad (2.36)$$

Выражение (2.36) означает, что с вероятностью, равной γ, результат измерений не выходит за пределы доверительного интервала

$$\bar{x} - t_{\alpha,k} \cdot s/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t_{\alpha,k} \cdot s/\sqrt{n}. \qquad (2.37)$$

Число $t_{\alpha,k}$ называется критерием Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 1$, определяется по таблице (прил. 3). При определении доверительных интервалов задаются надежностями равными 0,9; 0,95; 0,99.

Формула (2.37) позволяет оценить истинное значение измеряемой величины по среднему арифметическому результатов отдельных измерений. Поскольку обычно среднее квадратичное отклонение $\sigma = s/\sqrt{n}$ неизвестно, то при помощи доверительного интервала (2.37) получаем требуемую оценку.

Возвращаясь к примеру 4, найдем интервал, в котором заключен измеренный угол с надежностью, равной 0,95. По таблице прил. 3 для k=10–1 и α=1–0,95 находим $t_{\alpha,k}$=1,96. Таким образом, на основании формулы (2.37)

$$t_{\alpha,k} \cdot s/\sqrt{n} = (1{,}96 \cdot 5''{,}93)/\sqrt{10} = 2''{,}04.$$

Следовательно, измеренный угол заключен в пределах от $85°42'03'' - 2''{,}04$ до $85°42'03'' + 2''{,}04$.

§11. Критерии для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний

Редкий эксперимент обходится без того, чтобы не появилось хотя бы одно резко выделяющееся значение или отклоняющаяся точка, которая сразу же подозревается как ошибочная. Мнения относительно исключения таких ошибочных наблюдений могут быть различными. В частности, если отбрасывать все точки, которые кажутся нам слишком сильно выпадающими из других измерений, то легко получить завышенную и совершенно фиктивную точность измерений или результатов эксперимента. В подобных случаях сомнительные результаты исключают путем применения специальных критериев.

Нулевой, или *исходной*, *гипотезой* при использовании критериев является предположение о том, что наибольшее значение x_{max}(или x_{min}) принадлежит той же генеральной совокупности, как и все остальные $n - 1$ наблюдений.

При больших объемах выборки, когда существует уверенность в надежности оценки среднего квадратичного отклонения, а также в некоторых случаях при малых объемах, когда величина среднего квадратичного отклонения известна по результатам более ранних испытаний, для решения вопроса о принятии или исключении сомнительных результатов эксперимента целесообразно использование критерия Ирвина. Для этого вычисляют значение

$$\lambda_{\text{набл}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{s}, \qquad (2.38)$$

если резко выделяющимся результатом является последний член вариационного ряда, или

$$\lambda_{\text{набл}} = \frac{x_2 - x_1}{s}, \qquad (2.39)$$

если сомнение вызывает первый член вариационного ряда.

Вычисленное значение λ сопоставляют с критическим значением $\lambda_р$, найденным теоретически для заданного уровня доверительной вероятности $P = 1- \alpha$ и объема выборки n. Наиболее употребительные значения $\lambda_р$ приведены в табл. 2.65.

Таблица 2.65

n	2	3	10	20	30	50	100	400	1000
α=0,05	2,8	2,2	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8
α=0,01	3,7	2,9	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2

Значение уровня значимости α обычно принимается равным 0,05 или 0,01, реже принимается $\alpha = 0{,}1$ и $\alpha = 0{,}001$.

Если $\lambda \le \lambda_р$, то выброс измеряемой величины или результата эксперимента следует считать случайным. В этом случае нулевая гипотеза подтверждается.

Если $\lambda \ge \lambda_р$, то отмеченный выброс x_1 или x_n не случаен, не характерен для рассматриваемой совокупности данных и определяется грубыми ошибками в эксперименте или в измерениях. Так как нулевая гипотеза в этом случае отклоняется, сомнительные значения x_1 или x_n исключают из рассмотрения, а найденные ранее числовые характеристики распределения (§1) подвергают корректировке с учетом отброшенных результатов.

Пример 1. В табл. 2.66 приведен вариационный ряд значений логарифма долговечности образцов диаметром 8 мм из алюминиевого сплава *АВ*, испытанных на консольный изгиб с вращением при напряжении σ_{max}=15 кгс/мм^2.

Таблица 2.66

i	$x_i = \lg N_i$		i	$x_i = \lg N_i$		i	$x_i = \lg N_i$		i	$x_i = \lg N_i$
1	5,8669		26	6,3310		51	6,5224		76	6,7275
2	5,9164		27	6,3688		52	6,5431		77	6,7275
3	6,0216		28	6,3746		53	6,5464		78	6,7392
4	6,0386		29	6,3811		54	6,5578		79	6,7432
5	6,0426		30	6,3829		55	6,5603		80	6,7538
6	6,0445		31	6,3829		56	6,5607		81	6,7809
7	6,0645		32	6,3918		57	6.5654		82	6,7975
8	6,0799		33	6,3967		58	6.5655		83	6,7975
9	6,0821		34	6,4076		59	6,5793		84	6,7988
10	6,1062		35	6,4089		60	6,5823		85	6,8038
11	6,1082		36	6,4094		61	6,5916		86	6,8142
12	6,1183		37	6,4216		62	6,5957		87	6,8169
13	6,1186		38	6,4328		63	6,6096		88	6,8649
14	6,1238		39	6,4342		64	6,6471		89	6,8717
15	6,1605		40	6,4620		65	6,6474		90	6,8977
16	6,1685		41	6,4630		66	6,6739		91	6,9051
17	6,1746		42	6,4646		67	6,6739		92	6,9109
18	6,1801		43	6,4704		68	6,6780		93	6,9189
19	6,1892		44	6,4713		69	6,6896		94	6,9299
20	6,1951		45	6,4842		70	6,6916		95	6,9545
21	6,2071		46	6,4975		71	6,7000		96	7,0824
22	6,2100		47	6,4984		72	6,7086		97	7,1682
23	6,2297		48	6,5179		73	6,7132		98	7,2603
24	6,2608		49	6,5201		74	6,7178		99	7,2775
25	6,3115		50	6,5214		75	6,7197		100	7,4586

Требуется с помощью критерия Ирвина проверить нулевую гипотезу, заключающуюся в том, что значения долговечности первого и последнего образцов вариационного ряда принадлежат той же генеральной совокупности, как и все остальные.

Решение. По данным табл. 2.66 найдено s = 0,315. Просматривая табл. 2.66, находим, что максимальное значение определяется результатами испытаний двух последних образцов вариационного ряда. В этом случае на основании (2.38)

$$\lambda = \frac{7{,}4586 - 7{,}2775}{0{,}315} = 0{,}58,$$

что значительно ниже критического значения для n = 100 и P = 1–α=0,95 (табл. 2.65). Проведенные расчеты подтверждают нулевую гипотезу, и результат испытания последнего образца не следует считать ошибочным.

Таблица 2.67

	α			
n	0,1	0,05	0,025	0,01
3	1,41	1,4	1,41	1,41
4	1,65	1,69	1,71	1,72
5	1,79	1,87	1,92	1,96
6	1,89	2,00	2,07	2,13
7	1,97	2,09	2,18	2,27
8	2,04	2,17	2,27	2,37
9	2,10	2,24	2,35	2,46
10	2,15	2,29	2,41	2,54
11	2,19	2,34	2,47	2,61
12	2,23	2,39	2,52	2,66
13	2,26	2,43	2,56	2,71
14	2,30	2,46	2,60	2,76
15	2,33	2,49	2,64	2,80
16	2,35	2,52	2,67	2,84
17	2,38	2,55	2,70	2,87
18	2,40	2,58	2,73	2,90
19	2,43	2,60	2,75	2,93
20	2,45	2,62	2,78	2,96
21	2,47	2,64	2,80	2,98
22	2,49	2,66	2,82	3,01
23	2,50	2,68	2,84	3,03
24	2,52	2,70	2,86	3,05
25	2,54	2,72	2,88	3,07

Нулевая гипотеза еще в большей степени проходит для первых двух образцов. Здесь $\lambda \approx 2$.

В тех случаях, когда при проверке гипотезы располагают n измерениями (для $n < 25$), целесообразно использование критерия Груббса. Для этого в зависимости от того, какое из всех измерений является более сомнительным, определяют значение

$$\upsilon_{\text{макс}} = \left| \frac{x_к - \bar{x}}{s} \right|, \qquad (2.40)$$

сопоставляют с критическим значением, найденным для заданного уровня значимости α и объема выборки по табл. 2.67. Нулевую гипотезу принимают, если $\upsilon_{\text{макс}} \le \upsilon(\alpha; n)$, и отвергают, если $\upsilon_{\text{макс}} \ge \upsilon(\alpha; n)$.

Пример 2. Проверить с помощью критерия Груббса принадлежность результатов ряда измерений некоторой длины, помещенных в табл. 2.68, одной и той же генеральной совокупности.

Таблица 2.68

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8
Длина l	258,5	255,4	256,6	256,7	257,0	256,5	256,7	255,3
Номер измерения	9	10	11	12	13	14	15	–
Длина l	256,0	266,0	256,3	256,5	256,0	256,3	256,9	–

Решение. По данным табл. 2.68 находим выборочное среднее $\bar{x} = 257{,}11$ и выборочное среднее квадратическое отклонение s = 2,6. Проверим принадлежность результата 10 –го измерения той же генеральной совокупности, как и все остальные. На основании (2.40)

$$\upsilon_{\text{макс}} = \left| \frac{x_{10} - \bar{x}}{s} \right| = \left| \frac{266{,}0 - 257{,}11}{2{,}6} \right| = 3{,}42.$$

Наибольшее значение $\upsilon_{\max}$ для n =15, приведенное в табл. 96, равно 2,80, чему соответствует α = 0,01. Так как $\upsilon_{\max} = 3{,}42 \succ 2{,}8 = \upsilon(0{,}01; 15)$, то результат данного измерения не считаем принадлежащим той же генеральной совокупности, как и все остальные. В оставшемся ряду представляется также подозрительным результат 258,5. Для него

$$\upsilon_{\max} = \left| \frac{x_1 - \bar{x}}{s} \right| = \left| \frac{258{,}5 - 257{,}11}{2{,}6} \right| = 0{,}535,$$

что заметно меньше табличных (критических) значений для n =15 и всех рассматриваемых уровней значимости. То есть результат данного измерения считаем принадлежащим той же генеральной совокупности, как и все остальные.

Индивидуальные задания

1. Производится замер толщины слоя воды с помощью водомерной рейки. Полученные отсчеты имеют нормальное распределение с h = 10 м$^{-1}$. Если выполняется большое число замеров, то за пределами какого интервала значений будет находиться четвертая часть всех результатов, когда точная глубина составляет 1,5 м?

2. Высотомер, установленный на автоматическом парашюте, имеет h = 0,00134 м$^{-1}$. При раскрытии парашюта на расстоянии до Земли менее 100 м аппаратура выйдет из строя. Каков процент случаев поломки груза при нескольких сбрасываниях груза с высотомером, установленным на раскрытие парашюта на высоте 1000 м?

3. С помощью омметра многократно измеряется сопротивление стандартного резистора с номиналом 10 000 Ом. Половина всех измерений лежит в интервале от 9850 до 10 150 Ом. Оцените h для этого прибора. Какова относительная ошибка этого интервала, если она определяется как вероятная ошибка, деленная на истинный отсчет?

4. В задачах 1, 2 и 3 найдите показатели точности σ и Q.

5. При измерении твердости образца по Роквеллу были получены следующие результаты: 97,0; 98,7; 99,9; 99,5; 97,1; 99,5; 92,0; 100,6; 99,7; 98,0; 98,5; 99,5; 99,7; 99,5; 99,0; 98,5; 99,5; 98,8; 98,5; 99,1; 99,6; 97,2; 101,7; 97,2; 98,2; 97,5; 97,7; 99,0; 99,0; 97,5. Для этой группы данных найдите выборочное среднее, вероятную ошибку и выборочное среднее квадратическое отклонение.

6. При измерении твердости образца по Роквеллу были получены следующие результаты: 85,6; 87,1; 87,9; 86,9; 85,6; 85,2; 85,5; 85,7; 84,7; 86,4; 80,0; 85,0; 82,0; 86,0; 86,0; 87,3; 84,5; 87,0; 87,3; 85,4; 91,0; 90,0; 90,8; 89,2; 91,0; 90,4; 84,1; 81,7; 87,4; 84,0; 85,2. Для этой группы данных найдите выборочное среднее, вероятную ошибку и выборочное среднее квадратическое отклонение.

7. Предполагая, что среднее число твердости для образца из примера 6 является точным значением, выберите из этих данных в случайном порядке 1, 4, 9, 16 и 25 отсчетов. Покажите, справедлива ли в этом случае теорема, согласно которой точность среднего значения возрастает пропорционально квадратному корню из числа отсчетов.

8. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти выборочную среднюю длину стержня; среднее квадратическое отклонение ошибок и вероятную ошибку прибора.

9. Прибор для сортировки электронно-лучевых трубок проверяется путем многократного пропускания через него одной и той же трубки. Получены следующие результаты (табл. 2.69):

Таблица 2.69

Отсчет, см	28,8	31,3	33,8	36,3	38,8	41,3
Число отсчетов	2	6	22	38	57	44
Отсчет, см	43,8	46,3	48,8	51,3	53,8	
Число отсчетов	19	10	0	0	2	

Тщательное измерение, выполненное вручную, показало, что точный размер составляет 38,8 мм. Предполагая, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону, оцените вероятную ошибку данной выборки, выборочную среднюю результатов измерений, выборочное среднее квадратическое отклонение ошибок.

10. С помощью электромагнитного расходомера получено большое число отсчетов, при этом известно, расход постоянен и составляет 23 кг/с. Половина полученных отсчетов лежит в интервале от 21,8 до 24,2 кг. Найдите h для данного прибора. Если расходомер показывает 20 кг/с (при фактическом расходе 23 кг/с), то прозвучит сигнал тревоги. Если расход проверяется автоматически четыре раза в сутки, то сколько раз прозвучит сигнал тревоги за 30 дней?

11. В табл. 2.70 приведены значения предела прочности образцов из дюралюминиевого прессованного профиля. Требуется вычислить значения выборочного среднего x, дисперсии s^2 и среднего квадратического отклонения s.

Таблица 2.70

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
кгс/мм^2	47,2	44,5	44,6	45,8	46,2	44,7	45,1	44,8	43,6	45,6
№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
кгс/мм^2	43,4	44,5	45,3	46,8	44,3	47,7	45,8	46,2	45,2	44,7

12. Согласно оценке, вероятная ошибка в определении точки приводнения при возвращении капсулы космического аппарата «Меркурий» составила 66 км. Капсула, в которой находился космонавт Гленн, отклонилась от намеченной точки падения на 83 км. Допуская существование нормального распределения, определите вероятность того, что по крайней мере в одном из трех последующих орбитальных полетов точка приводнения отклонится на расстояние, превышающее отклонение капсул с космонавтом Гленном.

13. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены оценки среднего значения и среднего квадратического отклонения их срока службы, которые оказались равными $\bar{x}$= 3000 ч и s = 20 ч. Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить:

а) доверительный интервал для среднего значения и среднего квадратического отклонения срока службы осветительных ламп при доверительной вероятности 0,9;

б) с какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения $\bar{x}$ не превзойдет 10 ч?

14. По результатам испытаний на разрыв 20 образцов, приведенных в примере 11, определить 90%-ные доверительные интервалы для среднего значения и среднего квадратического отклонения предела прочности дюралюминия, если выборочные характеристики составляют $\bar{x}$=45,3 кгс/мм^2 и s=1,13 кгс/мм^2.

15. Проверяется партия небольших внешне одинаковых электрических предохранителей для определения тока, при котором происходит их перегорание. Получены следующие результаты (табл. 2.71).

Таблица 2.71

Ток, вызывающий перегорание предохранителя, мА	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101
Число предохранителей	3	44	9	10	13	10	8	8	2	2

Это фактические данные для предохранителей, рассчитанных на ток 1/16 А, которые получены при резком изменении нагрузки. Вычислите выборочное среднее значение тока, вызывающего перегорание предохранителя, и выборочное среднее квадратическое отклонение на основе нормального распределения.

16. Произведено 5 независимых равноточных измерений для определения заряда электрона. Опыты дали следующие результаты (в абсолютных электростатических единицах): $4{,}781 \cdot 10^{-10}$; $4{,}792 \cdot 10^{-10}$; $4{,}795 \cdot 10^{-10}$; $4{,}779 \cdot 10^{-10}$; $4{,}769 \cdot 10^{-10}$. Определить выборочную среднюю заряда электронов и найти доверительные границы при доверительной вероятности 99%, считая, что ошибки распределены по нормальному закону и измерения не имеют систематических ошибок.

17. Получено следующее гипотетическое распределение ошибок при 50 замерах длины (табл. 2.72).

Таблица 2.72

x, см		-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2
Число значений *x*		3	5	5	4	3	2	2
x, см	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Число значений *x*	2	2	2	3	4	5	5	3

Предполагая, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону, оцените вероятную ошибку данной выборки, выборочную среднюю результатов измерений, среднее квадратическое отклонение ошибок.

18. Распределение ошибок счетчика Гейгера таково, что 25% его показаний ниже точного значения ровно на одно деление шкалы, т.е. для них $x = -1{,}0$; для 50% показаний $x = 0$ (точные отсчеты), а 25% показаний имеют $x = +1{,}0$ (на одно деление шкалы выше). Постройте график этого распределения. Найдите среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность получения трех последовательных показаний, которые либо точны, либо меньше точного отсчета?

19. Средняя квадратическая ошибка высотомера $\sigma = 15$ м. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с надежностью 0,99 ошибка средней высоты $\bar{x}$ была больше 30 м, если ошибки высотомеров нормальны, а систематические ошибки отсутствуют?

20. Для определения точности измерительного прибора, систематическая ошибка которого практически равна нулю, было произведено пять независимых измерений: 2781 , 2836 , 2807 , 2763 , 2858 м. Определить выборочную среднюю и среднее квадратическое отклонение ошибок измерительного прибора.

21. Определение скорости снаряда было проведено на 5 испытаниях, в результате которых вычислена оценка $\bar{\upsilon} = 870{,}3\,\text{м/с}$. Найти 95%-ный доверительный интервал, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ_υ=2,1 м/с.

22. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением σ_h=20 м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с ошибкой не более 15 м при доверительной вероятности 90%?

23. Постоянная величина измерена 25 раз с помощью прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением a =10 м. Определить границы доверительного интервала для значения измеряемой величины при доверительной вероятности 0,99, если $\bar{x}$ =100 м.

24. По 15 независимым равноточным измерениям были рассчитаны оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимальной скорости самолета $\bar{\upsilon} = 424{,}7\text{м/с}$ и σ_υ = 8,7 м/с. Определить: а) доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности 0,9; б) вероятности, с которыми можно утверждать, что абсолютное значение ошибки в определении $\bar{\upsilon}$ и σ_υ не превзойдет 2 м/с. (Считать выборку нормальной.)

25. С помощью секстанта получены следующие двенадцать отсчетов: 22°30', 22°40', 22°40', 22°10', 22°30', 22°20', 22°0', 22°30', 23°0', 22°20', 22°40', 22°30'. Точный отсчет составляет 22°30'. 1) Постройте гистограмму этого распределения. 2) Если будет получено соответствие нормальному распределению, то найдите среднее квадратическое отклонение для этого прибора.

Вопросы и упражнения для самопроверки

1. Что такое вариационный ряд?
2. Дать определение эмпирической функции распределения и числовых характеристик выборки.
3. Сформулируйте свойства оценок.
4. Как определяется доверительный интервал для оценки математического ожидания?
5. Дайте определение статистической гипотезы.

6. Дайте понятие критерия согласия.
7. Сформулируйте основные этапы проверки статистической гипотезы о законе распределения случайной величины.

Пример решения индивидуального задания

Задача 1. В группе из восьми студентов шесть мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один – мастер спорта. В ответ записать число, имеющее три знака после запятой без округления.

Решение

Обозначим событие A ={из восьми спортсменов хотя бы один – мастер спорта}

Найдем вероятность события A, применив формулу классической вероятности.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Общее число n исходов испытания равно числу сочетаний из восьми по 2 и составляет $n = C_8^2$.

Событие A и событие $\overline{A}$={из двух отобранных спортсменов нет ни одного мастера спорта} составляют полную группу, тогда вероятность $P(A)$ равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_6^0}{C_8^2} = 1 - \frac{1}{28} = 0{,}964.$$

Задача 2. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат. б) Вертолет обнаружил спускаемый аппарат. Найти вероятность того, что он принадлежит к первому типу. В ответ записать сумму полученных чисел, записанных с двумя знаками после запятой без округления.

Решение

A={вертолет обнаружит аппарат}.

Возможны гипотезы:

H_1={вертолет первого типа};

H_2={вертолет второго типа}.

$P(H_1) = 0{,}4; \quad P(H_2) = 0{,}6.$

Найдем условные вероятности

$P(A/H_1) = 0{,}6$; $P(A/H_2) = 0{,}7$.

а) Используем формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A/H_i);$$

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}66.$$

б) Используем формулу Байеса

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

Тогда

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}24}{0{,}66} = 0{,}36.$$

Ответ: 1,02.

Задача 3. Размеры диаметров деталей, выпускаемых цехом, – случайная величина, распределена по нормальному закону; $M[X]$ =5 см; $D[X]$=0,81см^2. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали – от 4 до 7 см. Ответ записать с тремя знаками после запятой без округления, учитывая, что $\Phi(1{,}11) = 0{,}3665$, $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(1{,}15) =0{,}3749$, $\Phi(2{,}22) =0{,}4868$.

Решение

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины в интервал (α, β) определяется формулой

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

По условию, $a = 5$; $\sigma = \sqrt{D(X)} = 0{,}9$; $\alpha = 4$; $\beta = 7$, тогда

$$P(4 \le X \le 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0{,}9}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0{,}9}\right) = \Phi(2{,}22) - \Phi(-1{,}11) =$$

$$= \Phi(2{,}22) + \Phi(1{,}11) = 0{,}4868 + 0{,}3665 = 0{,}8533.$$

Задача 4. Наблюдения за межремонтными интервалами T (в месяцах) работы зерноуборочного комплекса дали результаты, приведенные ниже:

0,000; 0,000 0,002 0,006 0,023 0,084 0,382 0,810 0,003 0,864
1,033 0,912 0,093 0,323 0,194 0,522 2,336 0,057 0,648 0,250
0,877 0,271 0,037 0,537 0,183 1,306 0,752 0,198 1,623 0,875
0,184 0,276 0,613 0,362 0,654 0,676 1,079 0,500 0,900 0,191
0,250 0,348 0,318 0,182 0,458 0,936 0,567 0,303 0,487 0,522

1.Составить выборочное распределение.

2. Построить гистограмму и график выборочной функции распределения.

3. Найти состоятельные несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с уровнем доверия p = 0,95.

5. На основании анализа формы построенной гистограммы выдвинуть гипотезу о законе распределения и проверить справедливость гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости α=0,05.

Решение

1. *Первым этапом статистического изучения вариации являются построение вариационного ряда* – упорядоченного распределения единиц совокупности по возрастающим (чаще) или по убывающим (реже) значениям признака и подсчет числа единиц с тем или иным значением признака. Для этого сначала построим ранжированный ряд. Ранжированный ряд – это перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака.

Построим ранжированный ряд:

0,000 0,000 0,002 0,003 0,006 0,023 0,037 0,057 0,084 0,093
0,182 0,183 0,184 0,191 0,194 0,198 0,250 0,250 0,271 0,276
0,303 0,318 0,323 0,348 0,362 0,382 0,458 0,487 0,500 0,522
0,522 0,537 0,567 0,613 0,648 0,654 0,676 0,752 0,810 0,864
0,875 0,877 0,900 0,912 0,936 1,033 1,079 1,306 1,623 2,336

1. Находим размах выборки

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 2{,}336 - 0{,}000 = 2{,}336 .$$

2. Назначаем число частичных интервалов $к$.

Обычно $k = 9-12$. Выберем $к$=10. Находим длину Δ (шаг разбиения):

$$\Delta = \frac{R}{k} = \frac{2{,}336}{10} \approx 0{,}24.$$

3) Численность отдельной группы сгруппированного ряда опытных данных называется выборочной частотой. Обозначается: n_i – выборочная частота.

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^* = n.$$

Относительная выборочная частота – отношение выборочной частоты данных вариантов к объёму выборки. Обозначается: p_i^* – относительная выборочная частота.

$$p_i^* = \frac{n_i^*}{n},$$

где i – номер варианты.

Выборочная относительная частота сходится по вероятности к соответствующей вероятности.

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1.$$

2. *Построение гистограммы плотностей относительных частот* (табл.2.73).

Таблица 2.73

i	$[a_i; a_{i+1}]$	$n^*{}_i$	p_i^*	$h_i^* = \frac{p_i^*}{\Delta}$	$\widetilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
1	0-0,24	16	0,32	1,333	0,12
2	0,24-0,48	11	0,22	0,917	0,36
3	0,48-0,72	10	0,2	0,833	0,6
4	0,72-0,96	8	0,16	0,667	0,84
5	0,96-1,2	2	0,04	0,167	1,08
6	1,2-1,44	1	0,02	0,083	1,32
7	1,44-1,68	1	0,02	0,083	1,56
8	1,68-1,92	0	0	0	1,8
9	1,92-2,16	0	0	0	2,04
10	2,16-2,4	1	0,02	0,083	2,28
		$\sum$=50	$\sum$=1		

Примечание. h_i^* – плотность относительной частоты; $\widetilde{x}_i$ – середина частичных интервалов; * – определяет эмпирические значения.

Построим гистограмму относительных частот – ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $\Delta = 0{,}24$, а высоты равны отношению $h_i^* = \dfrac{p_i^*}{\Delta}$. Площадь всей гистограммы должна быть равна 1. Гистограмма является оценкой генеральной функции плотности $f(x)$.

Полученные значения высот вносим в табл. 2.73.

Примечание. h_i^* – плотность относительной частоты; $\tilde{x}_i$ – середина частичных интервалов; * – определяет эмпирические значения.

Строим гистограмму относительных частот.

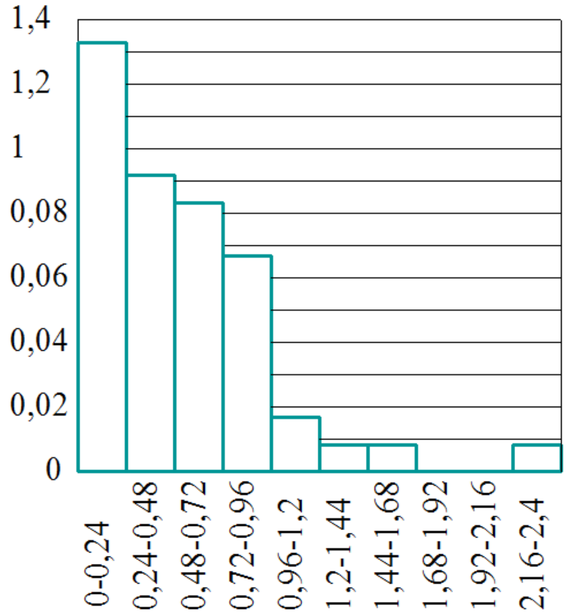

Рис. 2.9. Гистограмма относительных частот

По виду гистограммы (рис. 2.9) можно выдвинуть гипотезу о показательном законе распределения случайной величины X.

$$a \approx \bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} \tilde{x}_i \cdot n_i^*}{n} = \frac{25{,}92}{50} = 0{,}52;$$

$$\sigma^2 \approx D_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} (\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \cdot n_i^*}{n} = \frac{9{,}17}{50} = 0{,}18, \text{ т.е.}$$

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = 0{,}18.$$

Согласно определению исправленной выборочной дисперсией называется произведение выборочной дисперсии на величину $\dfrac{n}{n-1}$.

Следовательно, исправленная дисперсия равна

$$s^2 = \frac{50}{49} 0{,}18 = 0{,}1836,$$

т.е. исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $s = 0{,}43$. Все вычисления сводим в табл.2.74.

Таблица 2.74

$(\tilde{x}_i - \bar{x})^2 \cdot m_i^*$	$\tilde{x}_i \cdot m_i^*$
2,56	1,92
0,28	3,96
0,06	6
0,82	6,72
0,63	2,16
0,64	1,32
1,08	1,56
0	0
0	0
3,1	2,28
$\sum = 9{,}17$	$\sum$=25,92

4. Построим доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии. Найдем доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания $M(X)$ показательно распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное стандартное отклонение $s = 0{,}43$, выборочная средняя $\overline{x_в} = 0{,}52$, объем выборки $n = 50$.

Требуется найти доверительный интервал

$$I_p = \left(\bar{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right).$$

Все величины, кроме t_γ, известны. Найдем t_γ из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$.

По прил. 2 находим t_γ= 1,96.

Подставив t_γ= 1,96; $\bar{x} = 0{,}52; s = 0{,}43; n = 50$, окончательно получим доверительный интервал для $M(x)$:

$$I_p = \left(\overline{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right).$$

$$I_p = (0,4; 0,64).$$

Найдем доверительный интервал для оценки дисперсии. $D(x)$:

Согласно формуле $\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}}$, а так как при k=50–1=49 верхняя доверительная граница равна

$$\chi_2^2(p;к) = \chi_2^2\left(\frac{1-\gamma}{2};к\right) = \chi_2^2(0,05;49) = 67,5,$$

нижняя определяется как

$$\chi_1^2(p;к) = \chi_1^2\left(1-\frac{1-\gamma}{2};к\right) = \chi_1^2(0,95;49) = 34,8 \text{ (см. прил.4)},$$

то $\sqrt{\frac{49 \cdot 0,43^2}{67,5}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{49 \cdot 0,43^2}{34,8}}$ или $0,3663 \le \sigma \le 0,51$ – эта оценка не симметрична относительно σ.

5. Построенная гистограмма по форме напоминает график плотности вероятности показательного распределения. Поэтому естественно выдвинуть гипотезу о показательном распределении случайной величины X. Проверим справедливость выдвинутой гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости α=0,05.

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x};$$

$$\lambda = \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{0,52} = 1,92;$$

$$f(x) = 1,92 \cdot e^{-1,92x}.$$

Найдем вероятности попадания X в каждый из интервалов по формуле

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}.$$

Тогда

$$P_1 = P(0 < X < 0,24) = e^0 - e^{-1,92 \cdot 0,24} = 1 - 0,631 = 0,369;$$

$$P_2 = P(0,24 < X < 0,48) = e^{-1,92 \cdot 0,24} - e^{-1,92 \cdot 0,48} = 0,631 - 0,398 = 0,233;$$

$$P_3 = P(0,48 < X < 0,72) = e^{-1,92 \cdot 0,48} - e^{-1,92 \cdot 0,72} = 0,398 - 0,251 = 0,147;$$

$$P_4 = P(0,72 < X < 0,96) = e^{-1,92 \cdot 0,72} - e^{-1,92 \cdot 0,96} = 0,251 - 0,158 = 0,093;$$

$P_5 = P(0,96 < X < 1,2) = e^{-1,92\cdot 0,96} - e^{-1,92\cdot 1,2} = 0,158 - 0,1 = 0,058;$

$P_6 = P(1,2 < X < 1,44) = e^{-1,92\cdot 1,2} - e^{-1,92\cdot 1,44} = 0,1 - 0,063 = 0,037;$

$P_7 = P(1,44 < X < 1,68) = e^{-1,92\cdot 1,44} - e^{-1,92\cdot 1,68} = 0,063 - 0,4 = 0,023;$

$P_8 = P(1,68 < X < 1,92) = e^{-1,92\cdot 1,68} - e^{-1,92\cdot 1,92} = 0,4 - 0,25 = 0,015;$

$P_9 = P(1,92 < X < 2,16) = e^{-1,92\cdot 1,92} - e^{-1,92\cdot 2,16} = 0,25 - 0,16 = 0,009;$

$P_{10} = P(2,16 < X < 2,4) = e^{-1,92\cdot 2,16} - e^{-1,92\cdot 2,4} = 0,16 - 0,01 = 0,006;$

$P_\infty = P(2,4 < X < \infty) = e^{-1,92\cdot 2,4} - e^{-\infty} = 0,01 - 0 = 0,01.$

Найдем теоретические частоты:

$n_1' = n \cdot P_1 = 50 \cdot 0,369 = 18,45;$

$n_2' = n \cdot P_2 = 50 \cdot 0,233 = 11,65;$

$n_3' = n \cdot P_3 = 50 \cdot 0,147 = 7,35;$

$n_4' = n \cdot P_4 = 50 \cdot 0,093 = 4,65;$

$n_5' = n \cdot P_5 = 50 \cdot 0,058 = 2,9;$

$n_6' = n \cdot P_6 = 50 \cdot 0,037 = 1,85;$

$n_7' = n \cdot P_7 = 50 \cdot 0,023 = 1,15;$

$n_8' = n \cdot P_8 = 50 \cdot 0,015 = 0,75;$

$n_9' = n \cdot P_9 = 50 \cdot 0,009 = 0,45;$

$n_{10}' = n \cdot P_{10} = 50 \cdot 0,006 = 0,3;$

$n_\infty' = n \cdot P_\infty = 50 \cdot 0,01 = 0,5.$

Сравним эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу, причем объединим малочисленные частоты и сответствующие им теоретические частоты.

Таблица 2.75

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$
1	16	18,45	-2,45	6,0025	0,3752
2	11	11,65	-0,65	0,4225	0,0384
3	10	7,35	2,65	7,0225	0,7023
4	8	4,65	3,35	11,225	1,4028
5	2	2,9	-0,9	0,81	0,405
6	2	0,75	1,25	1,5625	0,7812
7	1	0,25	0,75	0,5625	0,5625
					$\chi_{\text{набл.}}^2 = 4,2674$

χ^2 зависит от параметра k, который называют числом степеней свободы. $k = l - 1 - r,$ где r – число параметров предполагаемого распределения, l – число интервалов.

Из табл. 2.75 находим $\chi_{набл}{}^2 = 4{,}2674$. По таблице критических точек распределения χ^2, по уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы $k = l - 1 - r$ = 7–1–1= 5 (см. прил. 4) найдем критическую точку правосторонней области $\chi^2{}_{кр}(0{,}05;5) = 11{,}1$

Так как $\chi_{набл}{}^2 < \chi_{кр}{}^2$ – принимаем гипотезу о показательном распределении генеральной совокупности.

Библиографический список

1. *Руппель, Е.Ю.* Задачник - практикум по математике : учебное пособие: в 2 ч. / Е.Ю. Руппель, Т.Е.Болдовская, С.В.Матвеева.– Омск : СибАДИ, 2013. – Ч. 2. – 116 с.
2. *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика / Н.Я. Виленкин и др. – М. : ФИМА; МНЦМО, 2006. – 400 с.
3. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высш.шк., 2003. – 480 с.
4. *Руппель, Е.Ю.* Элементы теории вероятностей и экспериментальной обработки данных / Е.Ю. Руппель.– Омск : СибАДИ, 2010. –128 с.
5. *Болдовская*, Т.Е. Задачник - практикум по математике : учебное пособие: в 2 ч. / Т.Е.Болдовская,, С.В.Матвеева, Е.Ю. Руппель. – Омск : СибАДИ, 2013. – Ч. 2. – 115 с.
6. *Карасёва*, Р.Б. Математика [Электронный ресурс] : практикум для студентов технических направлений заочной формы обучения / Р. Б. Карасева, С. В. Матвеева, Е. Ю. Руппель ; СибАДИ, Кафедра "Высшая математика". – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2016. – Режим доступа: http://bek.sibadi.org/fulltext/esd94.pdf. – Загл. с экрана. – **ISBN** 978-5-93204-862-7 (дата обращения к ресурсу: 01.09.7017)

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3961	394S	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3004	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2166	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	04220	0413	04040	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	339	0332	325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,36	0,1406	0,72	0,2642	1,08	0,3599
0,01	0,0040	0,37	0.1443	0,73	0,2673	1,09	0,3621
0,02	0,0080	0,38	0,1480	0,74	0,2703	1,10	0,3643
0,03	0,0120	0,39	0,1517	0,75	0,2734	1,11	0,3665
0,04	0,0160	0,40	0,1554	0,76	0,2764	1,12	0,3686
0,05	0,0199	0,41	0,1591	0,77	0,2794	1,13	0,3708.
0,06	0,0239	0,42	0,1628	0.78	0,2823	1,14	0,3729
0,07	0,0279	0,43	0,1664	0,79	0,2852	1,15	0,3749
0,08	0,0319	0,44	0,1700	0,80	0,2881	1,16	0,3770
0,09	0,0359	0,45	0,1736	0,81	0,2910	1,17	0,3790
0,10	0,0398	0,46	0,1772	0,82	0,2939	1,18	0,3810
0,11	0,0438	0,47	0,1808	0,83	0,2967	1,19	0,3830
0.12	0,0478	0,48	0,1844	0,84	0,2995	1,20	0,3849
0,13	0,0517	0,49	0,1879	0,85	0,3023	1,21	0,3869
0,14	0,0557	0,50	0,1915	0,86	0,3051	1,22	0,3883
0,15	0,05%	0,51	0,1950	0,87	0,3078	1,23	0,3907
0,16	0,0636	0,52	0,1985	0,88	0,3106	1,24	0,3925
0,17	0,0675	0,53	0,2019	0,89	0,3133	1,25	0,3944
0,18	0,0714	0,54	0,2054	0,90	0,3159	1,26	0,3962
0,19	0,0753	0,55	0,2088	0,91	0,3186	1,27	0,3980
0,20	0,0793	0,56	0,2123	0,92	0,3212	1,28	0,3997
0,21	0,0832	0,57	0,2157	0,93	0,3238	1,29	0,4015
0,22	0,0871	0,58	0,2190	0,94	0,3264	1,30	0,4032
0,23	0,0910	0,59	0,2224	0,95	0,3289	1,31	0,4049
0,24	0,0948	0,60	0,2257	0,96	0.3315	1,32	0,4066
0,25	0,0987	0,61	0,2291	0,97	0,3340	1,33	0,4082
0,26	0,1026	0,62	0,2324	0,98	0,3365	1,34	0,4099
0,27	0,1064	0,63	0,2357	0,99	0,3389	1,35	0,4115
0,28	0,1103	0,64	0.2389	1,00	0,3413	1,36	0,4131
0,29	0,1141	0,65	0,2422	1,01	0,3438	1,38	0,4162
0,30	0,1179	0,66	0,2454	1,02	0,3461	1,39	0,4177
0,31	0,1217	0,67	0,2486	1,03	0,3485	1,40	0,4192
0,32	0,1255	0,68	0,2517	1,04	0,3508	1,41	0,4207
0,33	0,1293	0,69	0,2549	1,05	0,3531	1,42	0,4222
0,34	0,1331	0,70	0,2580	1,06	0,3554	1,43	0,4236
0,35	0,1368	0,71	0,2611	1,07	0,3577	1,44	0,4251

Окончание прил. 2

x	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ* (*x*)	*x*	*Φ* (*x*)	*x*	*Φ* (*x*)
1,46	0,4279	1,74	0,4591	2,06	0,4803	2,64	0,4959
1,47	0,4292	1,75	0,4599	2,08	0,4812	2,66	0,4961
1,48	0,4306	1,76	0,4608	2,10	0.4821	2,68	0,4963
1,49	0,4319	1,77	0,4616	2,12	0,4830	2,70	0,4965
1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,14	0,4838	2,72	0,4967
1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,16	0,4846	2,74	0,4969
1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,76	0,4971
1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,20	0,4861	2,78	0,4973
1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,22	0,4868	2,80	0,4974
1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,82	0,4976
1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,26	0,4881	2,84	0,4977
1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,28	0,4887	2,86	0,4979
1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,30	0,4893	2,88	0,4980
1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,32	0,4898	2,90	0,4981
1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,34	0,4904	2,92	0,4982
1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913	2,94	0,4984
1,62	0,4474	1,91	0,4719	2,40	0,4918	2,96	0,4985
1,63	0,4484	1,92	0,4726	2,42	0,4922	2,98	0,4986
1,64	0,4495	1,93	0,4732	2,44	0,4927	3,00	0,49865
1,65	0,4505	1,94	0,4738	2,46	0,4931	3,20	0,49931
1,66	0,4515	1,95	0,4744	2,48	0,4934	3,40	0,49966
1,67	0,4525	1,96	0,4750	2,50	0,4938	3,60	0,499841
1,68	0,4535	1,97	0,4756	2,52	0,4941	3,80	0,499928
1,69	0,4545	1,98	0,4761	2,54	0,4945	4,00	0,499968
1,70	0,4554	1,99	0,4767	2,56	0,4948	4,50	0,499997
1,71	0,4564	2,00	0,4772	2,58	0,4951	5,00	0,499997
1,72	0,4573	2,02	0,4783	2,60	0,4953		
1,73	0,4582	2,04	0,4793	2,62	0,4956		

Приложение 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы $к$	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,00	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3.14	3,71	5.21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4.78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,06	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11 ,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21 ,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31 ,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 5

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 6

Критические точки распределения F Фишера–Снедекора
(k_1 – число степеней свободы большей дисперсии,
k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости α=0,01						
k_2	k_1					
	1	2	3	4	5	6
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889
2	98,49	99.01	99,17	99,25	99,30	99,33
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91
4	21.26	18.00	16,69	15,98	15,52	15.21
5	16,26	13.27	12,06	11,39	10,97	10,67
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46
15	8,68	6.36	5,42	4.89	4,56	4,32
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10

Уровень значимости α=0,01						
k_2	k_1					
	7	8	9	10	11	12
1	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45