Занятие №5
Интервальные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения для параметров нормального распределения

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, что приводит к грубым ошибкам. Поэтому в таком случае лучше пользоваться *интервальными оценками*, то есть указывать интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение оцениваемого параметра. Разумеется, чем меньше длина этого интервала, тем точнее оценка параметра.

Поэтому, если для оценки θ^* некоторого параметра θ справедливо неравенство $|\theta^* - \theta| < \delta$, число $\delta > 0$ характеризует *точность оценки* (чем меньше δ, тем точнее оценка). Но статистические методы позволяют говорить только о том, что это неравенство выполняется с некоторой вероятностью.

Определение. *Доверительным интервалом* называется интервал $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$, в котором с заданной вероятностью γ заключено истинное значение неизвестного параметра θ. Величина γ называется доверительной вероятностью или надежностью. Из определения доверительной вероятности следует, что

$$\gamma = P\,(\,\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\,).$$

На практике обычно берут γ=0,95 или γ=0,99.

Рассмотрим построение доверительных интервалов для математического ожидания и среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины.

1. *Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.*

Если известно, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону с неизвестным средним квадратическим отклонением, то для поиска доверительного интервала для ее математического ожидания a построим новую случайную величину

$$T = \frac{\bar{x}_в - a}{s} \cdot \sqrt{n},$$

где $\bar{x}_в$ – выборочное среднее; s^2 – исправленная дисперсия; n – объем выборки. Эта случайная величина, возможные значения которой будем обозначать через t, имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Плотность распределения Стьюдента явным образом не зависит от a и σ (неизвестное СКО), а зависит только от n.

По определению доверительного интервала с заданной надежностью γ имеем

$$\gamma = P(\bar{x}_в - \delta < a < \bar{x}_в + \delta) = P(|\bar{x}_в - a| < \delta) =$$
$$= P\left(\frac{|\bar{x}_в - a| \cdot \sqrt{n}}{s} < \frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{s} \right) = P(|T| < t_\gamma), \qquad (5.1)$$

где $t_\gamma = \dfrac{\delta \sqrt{n}}{s}$.

Число $t_\gamma(к)$ называется критерием Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 1$. Его определяем по таблице для распределения Стьюдента (прил. 3). При определении доверительных интервалов задаются обычно надежностями $\gamma=1-\alpha$, равными 0,9; 0,95; 0,99. Затем из (5.1) определяем величину $\delta = \dfrac{s \cdot t_\gamma}{\sqrt{n}}$, которую находим из соотношения $t_\gamma = \dfrac{\delta \sqrt{n}}{s}$. Таким образом, доверительный интервал с надежностью γ для математического ожидания a при неизвестном s есть интервал вида

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}.$$

При больших n (n >30) распределение Стьюдента практически совпадает с нормальным. В этом случае t_γ можно найти из уравнения

$$2\Phi(t_\gamma) = 1 - \alpha = \gamma.$$

Пример 2. По 25-ти деталям выборочные характеристики прочности X составили: $x_в$ = 3; s = 1,5. Найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X и точность оценки δ при γ= 0,99.

Решение. Из таблицы распределения Стьюдента (см. прил. 3) находим, что t_γ (n = 25; $к$=25–1; α = 1–γ=1–0,99=0,01) = 2,80.

Тогда

$$3 - \frac{2{,}8 \cdot 1{,}5}{\sqrt{25}} < a < 3 + \frac{2{,}8 \cdot 1{,}5}{\sqrt{25}},$$

или 2,16< a < 3,84 – доверительный интервал, в который попадает a с вероятностью 0,99. Точность оценки δ = 0,84.

2. *Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.*

Пусть по выборке объёма n получено исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_в}$, которое является точечной оценкой среднего квадратического отклонения σ случайной величины X.

Будем искать для s нормально распределенной случайной величины доверительный интервал вида $(s-\delta; s+\delta)$, где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение. По определению, доверительный интервал с заданной надежностью $P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$ имеет вид $s-\delta < \sigma < s+\delta$.

Запишем это неравенство в виде $s\left(1-\frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1+\frac{\delta}{s}\right)$ или обозначим $\frac{\delta}{s} = q$ и, подставив q в рассмотренное выше неравенство, получим

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \text{ при } q<1;$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \qquad \text{при } q>1,$$

где $q = q(n, \gamma)$.

Существуют таблицы, из которых можно найти q по заданным n и γ (прил. 5). Случайная величина q имеет распределение, зависящее только от n.

Для дисперсии оценка имеет вид:

$$s^2(1-q)^2 < D < s^2(1+q)^2 \text{ при } q<1;$$

$$0 < D < s^2(1+q)^2 \qquad \text{при } q>1.$$

Пример 3. Произведено 20 измерений одним прибором некоторой случайной величины, имеющей нормальное распределение. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерений равно 1,3. Найти точность прибора с надежностью 0,95.

Решение. Точность прибора – это среднее квадратическое отклонение σ случайных ошибок измерений. По условию задачи, n = 20; s = =1,3. Найдем доверительный интервал для σ при заданной надежности γ = 0,95. По прил. 5 находим q (n = 20; γ = 0,95) = 0,37. Следовательно, границы доверительного интервала: 1,3(1–0,37) = 0,819 и 1,3(1+0,37) = 1,781. Итак, 0,819 < σ < 1,781 с вероятностью 0,95.

3. *Доверительные интервалы для оценки дисперсии.*

Считаем, что, вообще говоря, математическое ожидание неизвестно, а известна только точечная несмещенная оценка дисперсии s^2. Тогда доверительный интервал для дисперсии, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 1-\alpha$, имеет вид

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} \le D \le \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}. \qquad (5.2)$$

Так как по заданной вероятности γ можно построить множество доверительных интервалов для дисперсии, то принято χ_1^2 и χ_2^2 выбирать так, чтобы

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \text{ а } P(\chi^2 < \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2},$$

где числа χ_1^2 и χ_2^2 находят по прил. 4 при числе степеней свободы $k = n–1$ и соответственно при $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ и $p = \frac{\alpha}{2}$.

Пример 4. Пользуясь 90%-ным доверительным интервалом, оцените в условиях примера 2 изменение прочности деталей во всей генеральной совокупности.

Решение. По условию, n=25; s=1,5; γ=0,9. Найдем доверительный интервал для оценки дисперсии.

Согласно формуле (3.7) $\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}}$, а так как при k=n–1=25–1=24 верхняя доверительная граница равна

$$\chi_2^2(p;\kappa) = \chi_2^2\left(\frac{1-\gamma}{2};\kappa\right) = \chi_2^2(0{,}05;24) = 36{,}4,$$

нижняя определяется как

$$\chi_1^2(p;\kappa) = \chi_1^2\left(1-\frac{1-\gamma}{2};\kappa\right) = \chi_1^2(0{,}95;24) = 13{,}8 \text{(см. прил.4)},$$

то $\sqrt{\frac{24 \cdot 1{,}5^2}{36{,}4}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{24 \cdot 1{,}5^2}{13{,}8}}$ или $1{,}22 \le \sigma \le 1{,}98$ – эта оценка не симметрична относительно σ.

Приложение 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы κ	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,00	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3.14	3,71	5.21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4.78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59

11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,06	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					