Занятие №8. Критерий равенства двух средних значений

Критерий χ^2 применяется в том случае, когда рассматриваются целые числа. Критерий t Стьюдента позволяет использовать проценты, дробные числа и т. п. Этот критерий применяется для проверки гипотез различного рода, но мы рассмотрим гипотезу, которая находит наиболее широкое применение в инженерной практике: «Средние двух выборок относятся к одной и той же совокупности». Можно привести следующие примеры применения этой гипотезы:
«10 резисторов из коробки *A* имеют среднее сопротивление, равное 12,4 кОм, а 10 резисторов из коробки *B* имеют среднее сопротивление 11,9 кОм. В обеих коробках находятся резисторы с одинаковым номинальным сопротивлением».
«Измерение расхода горючего на трассе протяженностью 100 км, производимое через каждый километр пути, показало, что автомобиль *A* потребляет в среднем 0,122 л/км, а автомобиль *B* – 0,128 л/км. Имеется ли различие в расходе горючего между автомобилями *A* и *B*?»

Когда проверяется различие между двумя средними, в предположении, что неизвестные генеральные дисперсии равны между собой, формула для критерия t имеет вид

$$t_{\text{набл}} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s_{\text{сум}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}. \tag{2.31}$$

Величина $s_{\text{сум}}$ определяется из выражения

$$s_{\text{сум}}^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_2 - 1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}. \tag{2.32}$$

Таким образом, для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $a_1 = a_2$ о равенстве математических ожиданий (*генеральных средних*) двух нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями при конкурирующей гипотезе H_1: $a_1 \neq a_2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия по формуле (2.31) и по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. прил. 3), по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$ найти критическую точку $t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$. Величину доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ выбирают в пределах 0,90–0,99.

Если $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$ *– нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.*
Если $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}(\alpha; k)$ *– нулевую гипотезу отвергают.*

Пример 1. Из партии бетона, замешанной 25 мая, взяты восемь проб и подвергнуты испытаниям на сжатие. Получены следующие данные о прочности на сжатие: 305,6; 270,8; 298,0; 218,6; 273,3; 270,8; 229,4 и 265,8 кг/см^2. Из партии бетона, замешанной 4 июня, взято 17 проб, и после испытаний получены следующие результаты: 298,0; 263,4; 288,2; 300,7; 327,9; 303,1; 278,2; 296,0; 316,3; 290,7; 318,0; 270,8; 305,6; 320,5; 293,2; 285,5; 316,3 кг/см^2. Насколько известно, состав бетона и методика испытаний не менялись.

Определите, относятся ли эти две группы данных к одной и той же совокупности, т. е. на уровне значимости, например, α = 0,05 проверить гипотезу о равенстве их средних.

Решение. В этом случае применим критерий t. Для упрощения расчетов составим расчетную табл. 32.

Для первой выборки $\bar{x}_1 = \dfrac{2132,3}{8}$ = 266,7 кг/см^2, а для второй $\bar{x}_2 = \dfrac{5072,4}{17}$ = 298,1 кг/см^2. Используя таблицу результатов, по формуле (2.31) вычислим сводную дисперсию для обеих выборок.

$$s_{\text{сум}}^2 = \frac{6275,79 - 5218,52}{8 + 17 - 2} \approx 45,97.$$

При вычислении s_1^2 и s_1^2 воспользовались тем фактом, что

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2 \Big/ (8-1), \text{ а } s_2^2 = \sum_{j=1}^{17}\left(x_j - \overline{x_2}\right)^2 \Big/ (17-1).$$

Откуда $s = \sqrt{45,97} \approx 7,1$ кг/см^2.

Таблица 32

x_i, кг/см^2	$\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2$	x_j, кг/см^2	$\left(x_j - \overline{x_2}\right)^2$
305,6	1513,21	298,0	0,16
270,8	16,81	263,4	1225,00
298,0	979,69	288,2	104,04
270,8	2313,61	300,7	5,29
229,4	43,56	327,9	870,25
265,8	16,81	303,1	20,25
229,4	1391,29	278,2	408,04
265,8	0,81	296,0	5,76
–	–	316,3	320,41
–	–	290,7	52,29
–	–	318,0	384,16
–	–	270,8	761,76
–	–	305,6	51,84
–	–	320,5	488,41
–	–	293,2	27,04
–	–	285,5	166,41
–	–	316,3	320,41

$\sum_{i=1}^{8} x_i = 2132{,}3$	$\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2 = 6275{,}79$	$\sum_{j=1}^{17} x_j = 5072{,}4$	$\sum_{j=1}^{17}\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2 = 5218{,}52$

Это среднее квадратическое отклонение для двух выборок, рассматриваемых совместно. Заметим, что для майского замеса характерен значительно больший разброс данных, чем для июньского. Находим t по формуле (2.32):

$$t_{\text{набл}} = \frac{298{,}4 - 266{,}7}{7{,}1 \cdot \sqrt{1/8 + 1/17}} = \frac{31{,}7}{3{,}03} = 10{,}5.$$

Число степеней свободы равно (n_1 + n_2 - 2) = (8+17-2) = 23. Теперь с помощью таблицы прил. 3 находим, что $t_{\text{двуст. кр}}(0{,}05;23) = 2{,}07$. Так как $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст. кр}}$, нулевую гипотезу о равенстве двух средних отвергаем. Другими словами , справедливость гипотезы, согласно которой обе партии бетона и методика исследований одинаковы, весьма сомнительна.

Критерий равенства двух дисперсий

Критерий t позволяет сравнивать два средних значения. В некоторых случаях бывает более важно сравнить изменчивость, или «размах», двух или большего числа выборок данных. Например, можно вычислить *дисперсию* (т. е. квадрат среднего квадратического отклонения) для двух выборок проб бетона, рассмотренных в примере 1 §4, не обращаясь к формуле (2.20). Для майского замеса получаем 6275,79/7 = 896,54, а для июньского 5218,52/16 =326,16. Существует ли между этими дисперсиями значимое различие? Ответ на этот вопрос может дать применение так называемого критерия F (обозначенного так по первой букве фамилии английского математика Фишера). Критерий F – это отношение двух дисперсий, вычисленных или полученных различными способами.

Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве *генеральных дисперсий* нормально распределенных совокупностей при конкурирующей гипотезе H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т. е. $F_{\text{набл}} = s_1^2 / s_2^2$, и по табл. 5 критических точек распределения Фишера – Снедекора по уровню значимости α/2 (вдвое меньшему заданного) и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$и $k_2 = n_2 - 1$ (k_1 – число степеней свободы большей дисперсии) найти критическую точку $F_{\text{кр}}(\alpha/2; k_1; k_2)$.

Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

В рассматриваемом выше примере отношение дисперсии для первой партии к дисперсии для второй партии составляет $F_{\text{набл}}$ =896,54/326,16 =2,75. Для майской выборки число степеней свободы k_1=8 – 1 = 7, а для июньской k_2

= 17 – 1 = 16. Заметим, что табл. 5 составлена при допущении, что k_1 относится к выборке данных, имеющей *большую* дисперсию.

Из табл. 5 для k_1 = 7 и k_2 =16 находим, что $F_{кр}(0,1/2;7;16) = 2,6$. Так как $F_{набл}$ = 2,75 > 2,6 = $F_{кр}$, отвергаем гипотезу о том, что эти две дисперсии соответствуют одной и той же совокупности. Отсюда делаем вывод, что прочность бетона не только колеблется в течение суток, но и средние суточные значения также изменяются.

Пример. В результате испытаний 30 образцов из утяженного конца прессованного профиля и 20 образцов из выходного конца найдены средние значения и дисперсии предела прочности алюминиевого сплава, которые составили: $\bar{x}_1 = 40{,}1$кг/мм^2; s_1= 0,82 и $\bar{x}_2 = 40{,}9 =$ кг/мм^2, s_2=0,71 соответственно для утяженного и выходного концов. Требуется оценить на уровне значимости α = 0,1 расхождения в выборочных дисперсиях.

Решение. В условиях рассматриваемого примера $F_{набл}$ = 0,82/0,71 = 1,15. По табл. 5 для $k_1 = n_1$–1=29 и $k_2 = n_2$ – 1=19 находим $F_{кр}(0,1/2;29;19) = 2,07$. Так как $F_{набл}$ = 1,15 < 2,07 = $F_{кр}$, то отсутствует значимое различие в дисперсиях предела прочности указанных групп образцов, т. е. можно принять, что зоны профиля равноценны в смысле однородности материала $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma\right)$.

Задачи для решения в аудитории

8.1. Скорость вращения вала, полученная абсолютным методом (электронный осциллограф и генератор сигналов прокалиброваны на линейную частоту), составляет 1010 об/мин. Стробоскопический и ручной тахометры дают результаты, представленные в табл. 40.

Таблица 40

Стробоскопический тахометр	1000	980	995	1020	1005
Ручной тахометр	990	1020	1000	1010	1040

Проверьте справедливость следующих гипотез: «Обе группы отсчетов принадлежат одной и той же совокупности»;

«Отклонения отсчетов обеих групп от истинного значения принадлежат одной и той же совокупности». Для проверки второй гипотезы необходимо вычислить средние отклонения с учетом знака.

8.2. Два физика провели подсчет числа δ–электронов на каждом участке длиной 100 мкм одной и той же фотопластинки. Получены следующие результаты (табл. 38).

Таблица 38

A	10	23	9	46	7	11	10	15	7	8	12	36	28
B	8	21	8	43	7	11	10	12	6	8	11	35	29

A-B	2	2	1	3	0	0	0	3	1	0	1	1	1

Аналогичные данные (17 результатов) получены для второй пластинки. Абсолютные разности $A - B$ равны: 0, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 0, 1, 6, 2, 0, 2. Используя критерий t, сравните эти две группы отклонений и определите, принадлежат ли они одной и той же бесконечной совокупности.

8.3. Скорость вращения вала, полученная абсолютным методом (электронный осциллограф и генератор сигналов прокалиброваны на линейную частоту), составляет 1010 об/мин. Стробоскопический и ручной тахометры дают результаты, представленные в табл. 40.

Таблица 40

Стробоскопический тахометр	1000	980	995	1020	1005
Ручной тахометр	990	1020	1000	1010	1040

Проверьте справедливость следующих гипотез: «Обе группы отсчетов принадлежат одной и той же совокупности»;

«Отклонения отсчетов обеих групп от истинного значения принадлежат одной и той же совокупности». Для проверки второй гипотезы необходимо вычислить средние отклонения с учетом знака.

8.4. Радиолампы одного и того же типа с металлическим и стеклянным корпусами проверяются на долговечность в предельных условиях. Полученные результаты (в часах) представлены в табл. 41.

Используя критерий t, проверьте соответствующую гипотезу.

Таблица 41

Лампы с металлическим корпусом	53	40	92	67	89
Лампы со стеклянным корпусом	45	40	47	–	–

8.5. Два прибора A и B используются для измерения теплопроводности данного образца. Результаты измерений представлены в табл. 42.

Таблица 42

A, ккал/м·ч °С	14,23	14,12	14,32	14,15	14,26	14,33	–
B, ккал/м·ч °С	13,88	13,71	13,72	13,41	13,23	13,39	13,72

Проверьте справедливость следующей гипотезы: «Обе группы измерений принадлежат одной и той же совокупности».

8.6. Двумя методами проведены измерения одной и той же физической величины. Получены следующие результаты:

а) в первом случае x_1 = 9,6; x_2=10,0; x_3 = 9,8; x_4=10,2; x_5=10,6;

б) во втором случае y_1 = 10,4; y_2 = 9,7; y_3 = 10,0; y_4 = 10,3.

Можно ли считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений, если принять уровень значимости α=0,1? Предполагается, что результаты измерений распределены нормально и выборки независимы.

8.7. Для сравнения точности двух станков - автоматов взяты две пробы (выборки), объемы которых n_1 = 10 и n_2 = 8. Результаты измерения контролируемого размера отобранных изделий представлены в табл. 43.

Таблица 43

Первый станок x_i	1.08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1.38	1,40	1,42
Второй станок y_j	1.11	1,12.	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38	–	–

Можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью $[H_0 : D(X) = D(Y)]$, если принять уровень значимости α =0,1 и в качестве конкурирующей гипотезы $[H_1 : D(X) \neq D(Y)]$?