**Задача 7.**

*Элементы математической статистики.*

В ходе проведения эксперимента получен следующий набор данных:

Пусть случайная величина *Х* –наугад взятое значение из набора данных. Требуется для случайной величины *Х*:

1.Составить выборочное распределение.

2. Построить гистограмму и график выборочной функции распределения.

3. Найти состоятельные несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

4. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии с уровнем доверия р=0,95.

5. На основании анализа формы построенной гистограммы выдвинуть гипотезу о законе распределения и проверить справедливость гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости α=0,05.

**Решение.**

1*. Первым этапом статистического изучения вариации являются построение вариационного ряда* - упорядоченного распределения единиц совокупности по возрастающим (чаще) или по убывающим (реже) значениям признака и подсчет числа единиц с тем или иным значением признака. Для этого сначала построим ранжированный ряд. Ранжированный ряд — это перечень отдельных единиц совокупности в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частностями попаданий в каждый из них значений величины.

Для его построения выполняем следующие действия:

1. Находим размах выборки



2. Назначаем число частичных интервалов к:

.

Обычно ****. Выберем к=7

1. Находим длину Δ(шаг разбиения):

****

4. Численность отдельной группы сгруппированного ряда опытных данных называется выборочной частотой. Обозначается:

****выборочная частота.

****

Относительная выборочная частота-отношение выборочной частоты данных вариантов к объёму выборки. Обозначается:

****относительная выборочная частота.

, где *i* *–* номер варианты.

Выборочная относительная частота сходится по вероятности к соответствующей вероятности.

****

5. Составляем таблицу.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |  | |  |  | |
| 1 |  |  |  |  |  | |  |  | |
| 2 |  |  |  |  |  | |  |  | |
| 3 |  |  |  |  |  | |  |  | |
| 4 |  |  |  |  |  | |  |  | |
| 5 |  |  |  |  |  |  | | |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  | | |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |

Где ****плотность относительной частоты;

**середина частичных интервалов.

***2.*** *Строим гистограмму по данным 5-го столбца таблицы 1.*

Рис.1. Гистограмма плотностей относительных частот

По виду гистограммы (рис. 1) подбираем подходящий для данного случая теоретический закон распределения.

Сравниваем гистограмму с теоретическими кривыми основных законов (нормальный, показательный, равномерный). По виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины *X*.

**3.** *Нахождение состоятельных несмещенных оценок математического ожидания и дисперсии.* *Найдем оценки математического ожидания а и дисперсии D.*

**;

**

,

а исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение .

*Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения исследуемой случайной величины Х.*

Поэтому естественно выдвинуть гипотезу о нормальном распределении случайной величины *Х.* Проверим справедливость выдвинутой гипотезы по критерию Пирсона с уровнем значимости α=0,05. Тогда гипотетическая функция плотности распределения случайной величины *Х* имеет вид:



Нормальный закон распределения также называется законом Гаусса.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры *а* и *σ* , входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины *X*.

График плотности нормального распределения называется нормальной кривой или кривой Гаусса.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

* Функция определена на всей числовой оси.
* *f(x)*>0
* Ось ОХ является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента *х*, значение функции стремится к нулю.
* *f(x)* достигает max в точке *х-а;*



График функции имеет две точки перегиба 

Для простоты вычислений составим таблицу 2

Проверим гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона. В качестве меры расхождения между теоретическим распределением и эмпирическим распределением  используем статистику , где  – число опытов, *–* вероятность попадания возможных значений случайной величины в -й разряд статистического ряда; *–* число разрядов.

Так как выдвинута гипотеза в пользу нормального закона распределения генеральной совокупности, теоретические вероятности находим по формуле

,

Где – функция плотности распределения Лапласа (см. прил.1); 

Имеем ; .

Обозначим через , затем определим теоретические вероятности и теоретические частоты , для чего составим расчетную табл. 2. Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  | - |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

По условию, объём выборки *n*=, значения случайной

величины разбиты на 8 интервалов. Так как частоты  попадания в каждый из трех первых и трех последних интервалов малы (меньше 5), объединяем их соответственно в первый и последний. Вычисление  приведено в табл. 2. Элементы 5-го столбца определяем по прил.1, вероятности **– элементы 6-го столбца – вычисляются следующим образом:

Найдем меру расхождения между теоретическим распределением и эмпирическим распределением по формуле:



Вычисления сведем в табл. 2 Сложив элементы 8-го столбца, получим



Согласно теореме Пирсона при  распределение величины  зависит от параметра , который называют числом степеней свободы. *k = l –* 1 *– r,* где *r* – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки, *l –* число интервалов. Число степеней свободы . Выберем уровень значимости  и по таблице квантилей *–* распределения для числа степеней свободы  и уровня значимости  (см. прил. 4) найдем критическое значение ; так как наблюденное значение оказалось меньше табличного значения, то можно сделать вывод: выдвинутая гипотеза о нормальном законе распределения не противоречит опытным данным. Следовательно, гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем

Обозначим через , затем определим теоретические вероятности и теоретические частоты , для чего составим расчетную табл. 2. Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  | - |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

По условию, объём выборки *n*=, значения случайной

величины разбиты на 8 интервалов. Так как частоты  попадания в каждый из трех первых и трех последних интервалов малы (меньше 5), объединяем их соответственно в первый и последний. Вычисление  приведено в табл. 2. Элементы 5-го столбца определяем по прил.1, вероятности **– элементы 6-го столбца – вычисляются следующим образом:

Найдем меру расхождения между теоретическим распределением и эмпирическим распределением по формуле:



Вычисления сведем в табл. 2 Сложив элементы 8-го столбца, получим



Согласно теореме Пирсона при  распределение величины  зависит от параметра , который называют числом степеней свободы. *k = l –* 1 *– r,* где *r* – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по данным выборки, *l –* число интервалов. Число степеней свободы . Выберем уровень значимости  и по таблице квантилей *–* распределения для числа степеней свободы  и уровня значимости  (см. прил. 4) найдем критическое значение ; так как наблюденное значение оказалось меньше табличного значения, то можно сделать вывод: выдвинутая гипотеза о нормальном законе распределения не противоречит опытным данным. Следовательно, гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем