Приложение определённого интеграла к геометрическим задачам
Вычисление площадей плоских фигур

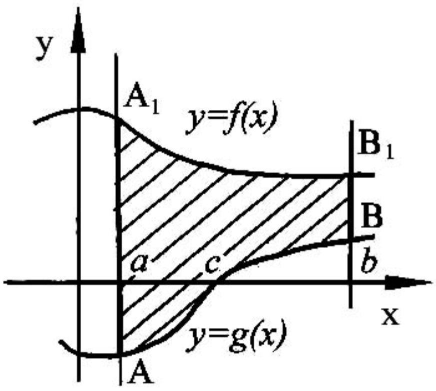
В этом параграфе при помощи интегрального исчисления будет решен ряд задач.

Вычисление площади в прямоугольных координатах

Площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ (сверху), $y = g(x)$ (снизу) и прямыми $x = a$; $x = b$, подсчитывается по формуле

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx. \qquad (2.17)$$

Действительно, в силу геометрического смысла определенного интеграла [см. равенство(2.3)] имеем (рис. 4)



$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{(aA_1B_1b)} \text{ и } \int_a^b g(x)\,dx = S_{(cBb)} - S_{(aAc)},$$

поэтому $\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx =$

$= S_{(aA_1B_1b)} - S_{(cBb)} + S_{(aAc)} = S$, как это видно из рисунка.

Пример 1. Вычислить площадь между параболами $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 6$ (рис. 5).

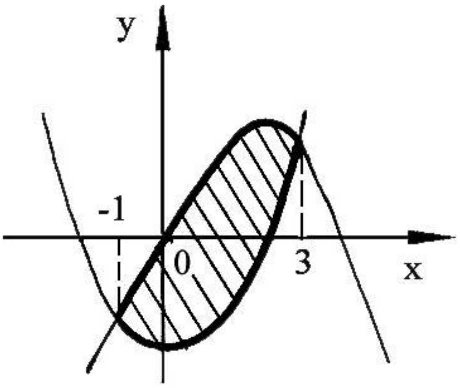


Рис. 5

Решение. Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4x - x^2; \\ y = x^2 - 6, \end{cases}$$

т.е. найдем точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол. Из этой системы

$$x^2 - 6 = 4x - x^2;\ 2x^2 - 4x - 6 = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ и}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \text{ или } x_1 = -1; x_2 = 3.$$

Тогда по формуле (2.17) искомая площадь S будет равна:

$$S = \int_{-1}^{3} \left[\left(4x - x^2\right) - \left(x^2 - 6\right) \right] dx = \int_{-1}^{3} \left[6 + 4x - 2x^2 \right] dx = \left[6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$=\left[6\cdot 3+2\cdot 3^2-\frac{2}{3}\cdot 3^3\right]-\left[6\cdot(-1)+2\cdot(-1)^2-\frac{2}{3}\cdot(-1)^3\right]=18-\left[-\frac{10}{3}\right]=$$

$$=18+\frac{10}{3}=64.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$; $y=\frac{1}{x^2}$; $y=0$; $x=2, x\geq 0$.

<u>Решение.</u> Сначала найдем точки пересечения кривых $y=x^2$ и $y=\frac{1}{x^2}$, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2; \\ y=\frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

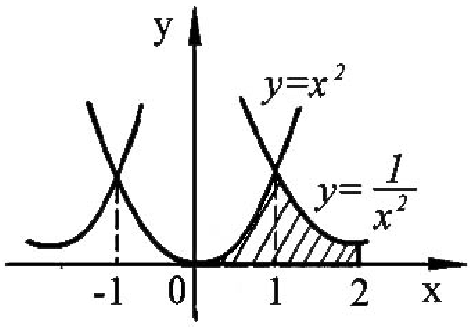


Рис. 6

Из этой системы $x^2=\frac{1}{x^2}$; $x^4=1$ или $x_1=-1$; $x_2=1$.

Таким образом, заданная фигура (рис. 6) является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x)=\begin{cases} y=x^2, \ 0\leq x<1; \\ y=\frac{1}{x^2}, \ 1\leq x\leq 2. \end{cases}$$

По формуле (2.17)

$$S=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\frac{dx}{x^2}=\left.\frac{x^{2+1}}{2+1}\right|_0^1+\int_1^2 x^{-2}dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^2=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left.\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^2=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{-1}{1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$; $y = 2\sin x$; $x = \frac{5}{4}\pi$; $x = 0$.

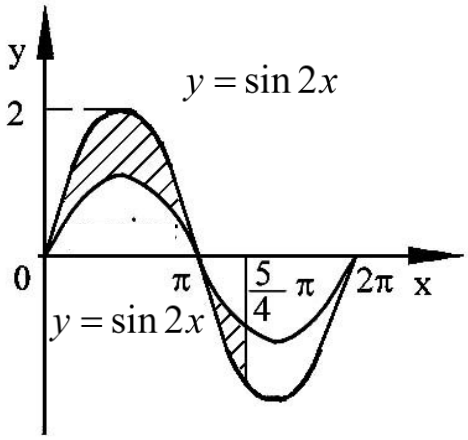


Рис. 7

Решение**.** Искомая площадь S равна сумме площадей S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y = \sin x$; $y = 2\sin x$; $x = 0$; $x = \pi$, вторая ограничена линиями $y = \sin x$; $y = 2\sin x$; $x = \pi$; $x = \frac{5}{4}\pi$ (рис. 7).

Для вычисления площадей S_1 и S_2 применим формулу (2.17):

$$S_1 = \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) =$$

$$= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - 2\sin x)\,dx = -\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \sin x\,dx = \cos x\Big|_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = \cos\frac{5}{4}\pi - \cos\pi = = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$

Тогда $S = S_1 + S_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}293.$

Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями

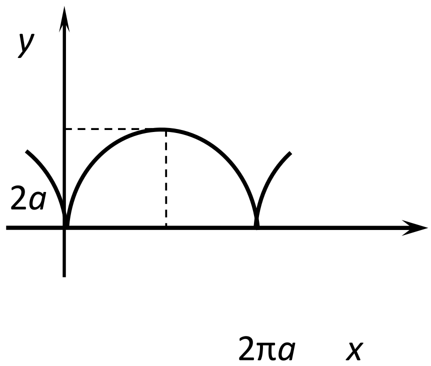
Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной двумя вертикалями $x = a$ и $y = b$ и отрезком оси Ox, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)\,dt, \tag{2.18}$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = \varphi_1(t)$ и $b = \varphi_2(t)$ ($\psi(t) \ge 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченную первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ и отрезком оси абсцисс (рис. 8).

Решение. Точкам 0 и A соответствуют значения параметра $t_0 = 0$ и $t_A = 2\pi$, поэтому по формуле (2.18) искомая площадь



$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\left[a(t-\sin t)\right]' dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t \; dt + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2t \, d(2t) \right) = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin\, 4\pi \right) - a^2 \left(\frac{3}{2}0 - 2\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0 \right) = 3\pi a^2 .$$

§ 4. Вычисление длины дуги кривой

Перейдем теперь к следующей задаче – определению ***длины линии***. В школьном курсе давалось определение длины окружности как предела периметров правильных вписанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Теперь мы обобщим это понятие на любые линии. Для этого выделим из приведенного выше определения самое существенное: в линию (окружность) вписывается ломаная, берется длина этой ломаной, а затем увеличивается число звеньев ломаной так, что длины всех звеньев стремятся к нулю (удваиваются числа сторон). Из этого и будем исходить.

Определение. Длиной l линии называется предел

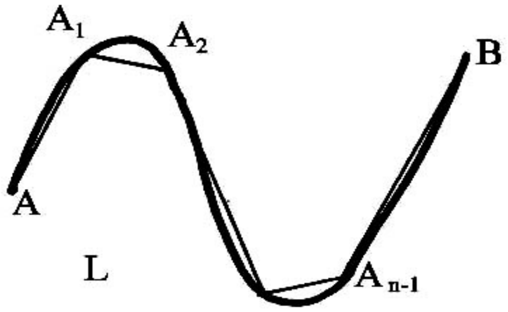
$$\lim_{\mu \to 0} \text{длина}\left(AA_1A_2\ldots A_{n-1}B\right) = l, \qquad (2.20)$$

где $AA_1A_2\ldots A_{n-1}B$ – вписанная в L ломаная, а μ – длина наибольшего из звеньев этой ломаной (рис. 12).

Вычисление длины дуги кривой, заданной в прямоугольной системе координат

Покажем, что если линия L есть график функции $y = f(x)$, $a \le x \le b$, имеющей непрерывную производную, то ее длина

$$l=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx. \qquad (2.21)$$



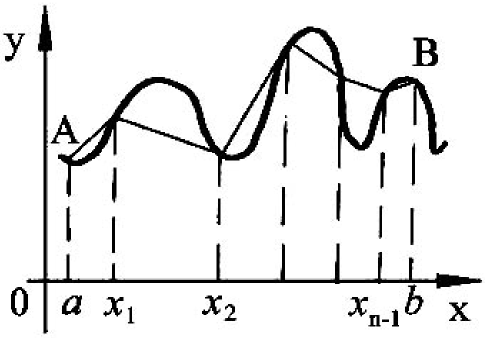


Рис. 12 Рис. 13

Впишем в линию L ломаную $AA_1A_2\ldots A_{n-1}B$ (рис. 13). Ее вершины имеют координаты

$A\big(a;\,f(a)\big),\ A_1(x_1;\,f(x_1)),\ A_2(x_2;\,f(x_2)),\ \cdots,\ A_{n-1}(x_{n-1};\,f(x_{n-1})),\ B(b;\,f(b)).$

Подсчитаем длину этой ломаной по формуле $f(x_1)-f(a)=f'(c_1)(x_1-a),\quad a<c<x_1$, так, длина первого звена равна

$AA=\sqrt{(a-x\ )\ +\left[f(x\ )-f(a)\right]\ }=\sqrt{(x_1-a)^2+[f(c_1)(x_1-a)]^2}=$

$=\sqrt{1+[f(c_1)]^2}\,(x_1-a),\ \ a<c_1<x_1.$

Аналогично устанавливается, что длина второго звена равна $A_1A_2=\sqrt{1+[f(c_2)]^2}\,(x_2-x_1),\ x_1<c_2<x_2$, и т.д., наконец, длина последнего звена $A_{n-1}B=\sqrt{1+[f'(c_n)]^2}\,(b-x_{n-1}),\ x_{n-1}<c_n<b.$

Следовательно, в силу определения длины линии [формула (2.20)]

$$l=\lim_{\mu\to 0}\left(\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,(x_1-a)+\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,(x_2-x_1)\ldots+\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,(b-x_{n-1})\right),$$

а так как очевидно, что наибольшее звено μ ломаной и длина λ наибольшего из отрезков $[a_1;x_1],\ [x_1;x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1};b]$ (на которые разбился отрезок $[a;b]$) стремятся к нулю одновременно, то

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\left(\sqrt{1+\left[f'(c_1)\right]^2}\,(x_1-a)+\sqrt{1+\left[f'(c_2)\right]^2}\,(x_2-x_1)+\ldots\sqrt{1+\left[f'(c_n)\right]^2}\,(b-x_{n-1})\right)=$$

$=\int\limits_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, т.к. в квадратных скобках стоит интегральная сумма для написанного интеграла.

Пример 1. Найдем длину линии $y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0<x<3$.

Решение. Так как $y' = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$, то по формуле (2.21) получаем длину линии

$$l = \int_0^3 \sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x) = \left.\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^3 =$$

$$= \left.\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right|_0^3 = \frac{2}{3}\left[(1+3)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[8-1] = \frac{14}{3}.$$

Здесь воспользовались тем, что $d(1+x) = (1+x)'\,dx = dx.$

Пример 2. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$.

Решение. Воспользовались формулой (2.21). Найдем y':

$$y' = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right]' = \frac{1}{4}\cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}.$$

Откуда

$$1+[y']^2 = 1+\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^2 = 1+\frac{1}{4}\left(x^2 - 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1+\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2.$$

Следовательно,

$$l = \int_1^e \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx = \int_1^e \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left.\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right|_1^e + \left.\frac{1}{2}\ln x\right|_1^e = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2,$$

то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \qquad (2.22)$$

где t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги.

Действительно, из формулы (2.21) следует $\frac{d\ell}{dx}=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ или

$$dl=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx, \qquad (2.23)$$

где $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Подставляя значение $f'(x)$ в формулу (2.23), получаем выражение для дифференциала дуги $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$ или

$$dl=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (2.24)$$

Проинтегрировав равенство (2.24) на отрезке $[t_1\,;\ t_2]$, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dl=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

По формуле Ньютона - Лейбница находим $\int_{t_1}^{t_2} dl=l(t_2)-l(t_1)$. Но $l(t_1)=0$, обозначив $l(t_2)=l$, получим формулу (2.22).

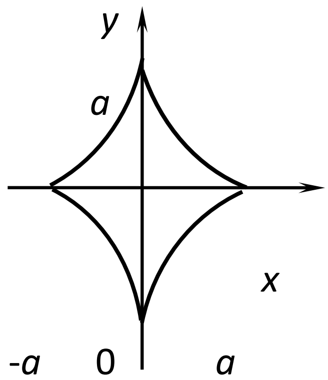
Пример 3. Вычислить длину астроиды

$$x=a\cos^3 t\,;\, y=a\sin^3 t.$$

<u>Решение.</u> Кривая симметрична относительно обеих координатных осей (рис. 14), поэтому вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в первом квадранте. Находим

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\,\sin t;\ \frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t.$$

Параметр t изменяется от $t=0$ до $t=\pi/2$.



Следовательно, по формуле (2.22) имеем

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\ \sin^2 t\left(\cos^2 t\ +\sin^2 t\right)}\,dt\ =$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\ \sin^2 t}\,dt\ =3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ \sin t dt\ =$$

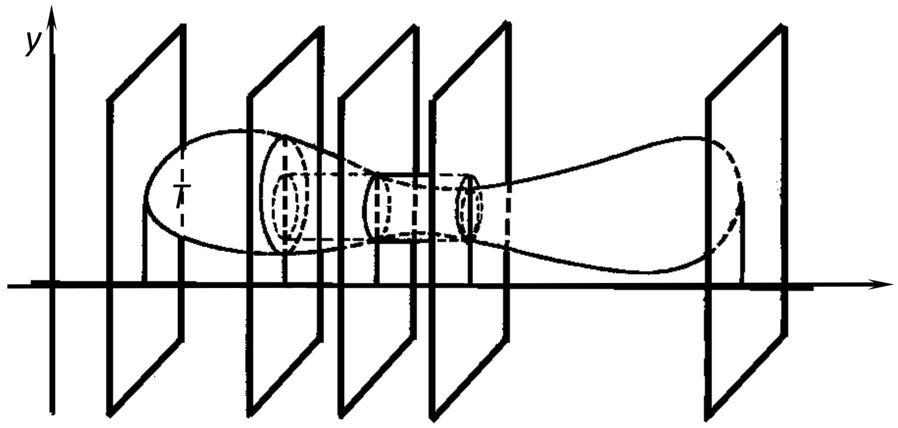
$$-3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ d\cos t=-3a\frac{\cos^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = =-3a\left(\frac{\cos^2 \pi/2}{2}-\frac{\cos^2 0}{2}\right)=-3a\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}a$$

, $l=6a$.

§ 5. Вычисление объема

Вычисление объема тела по известным площадям его поперечных сечений

Пусть требуется вычислить объем V тела, заключенного между двумя перпендикулярами к оси $0x$ плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 17).



Предположим, что известна площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси $0x$. Эта площадь зависит от положения секущей плоскости, т. е. является функцией от x. Обозначим ее через $S(x)$ и допустим, что она непрерывна на отрезке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots <x_{n-1} < x_n = b$$

и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные к оси $0x$. Эти плоскости разобьют тело на n слоев. Обозначим через ΔV_i (i =1,2, ..., n) объем слоя, заключенного между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$. Тогда ΔVi приближенно равен объему цилиндра, высота которого равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а основание совпадает с поперечным сечением, образованным пересечением тела какой-либо плоскостью $x = \xi_i$, где $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, т. е. $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\,\Delta x_i$, а объем всего тела

$$V=\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

По определению, принимаем

$$V=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i \quad (\delta=\max\Delta x_i),$$

т. е.

$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{2.26}$$

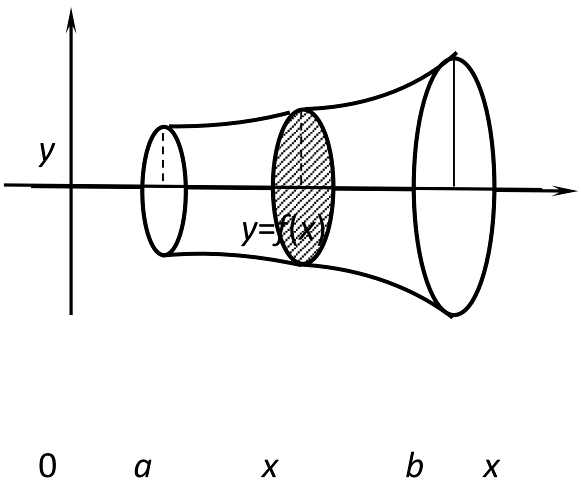
Вычисление объема тела вращения

Пусть функция $f(x)$, $x\in[a;\ b]$, непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Требуется вычислить объем V тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$; $y=0$; $x=a$; $x=b$ (рис. 18).

Так как любое поперечное сечение тела есть круг радиусом $|y|$, то площадь сечения будет $S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$.

Применив формулу (2.26), найдем

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{2.27}$$



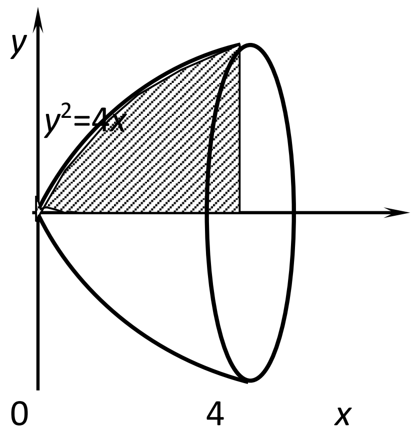


Рис.19

Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x$; $y=0$; $x=0$; $x=4$ (рис. 19).

<u>Решение.</u> Такое тело называется параболоидом вращения. Применив формулу (2.27), получим

$$V=\pi\int_0^4 4x\,dx=4\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4=2\pi 4^2-2\pi 0^2=32\pi.$$

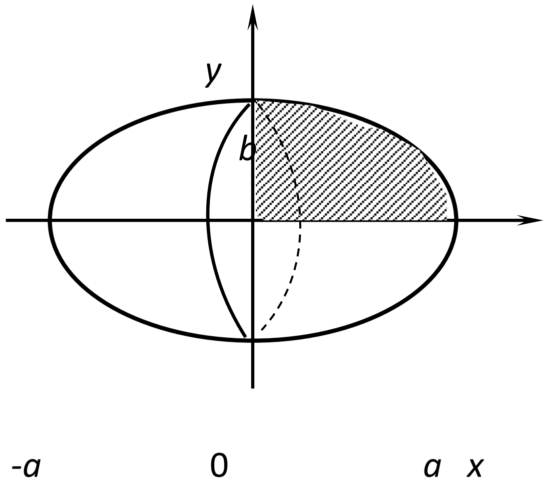
Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси $0x$ (рис. 20).

Решение. Рассматриваемое тело называется ***эллипсоидом вращения***. Эллипс пересекает ось $0x$ в точках $x = -a$ и $x = a$.

Из уравнения эллипса находим

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right).$$

Ввиду симметричности эллипса относительно оси $0y$ вычислим объем в пределах от 0 до a и полученный результат удвоим:



$$V = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}a^2dx -$$

$$-2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}x^2dx = 2\pi b^2\int_0^a dx - 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a x^2dx = 2\pi b^2 x\Big|_0^a - \ 2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a =$$

$$= 2\pi b^2 a - 2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} = \frac{2\pi b^2 a^3}{a^2} - \frac{2\pi b^2 a^3}{3a^2} = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$; фигуры, ограниченной линиями $y = 2$ и $y = x^2 + 1$ (рис. 21).

Решение. Решая систему

$$\begin{cases} y = 2; \\ y = x^2 + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2; \\ x^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2; \\ x = \pm 1, \end{cases}$$

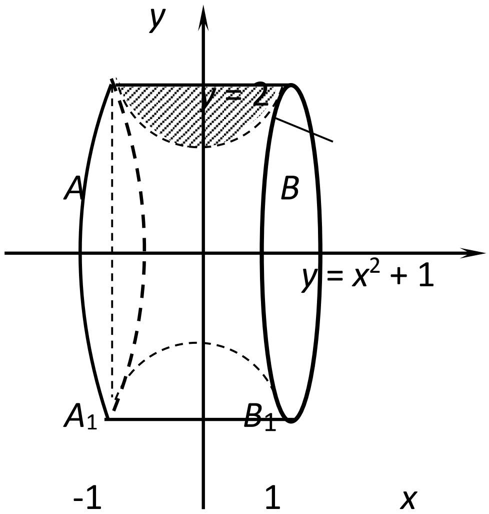
находим точки пересечения данных линий: A $(-1;\ 2)$ и $B(1;2)$. Ввиду симметричности вращающейся фигуры вычислим объем в пределах от 0 до 1 и результат удвоим.

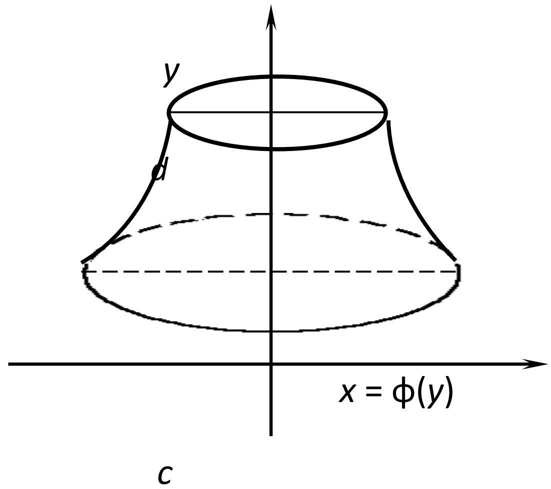
Из рис. 21 видно, что искомый объем равен разности объемов тел, образованных при вращении вокруг оси $0x$ фигур A_1ABB_2 и A_1ACBB_1. Таким образом,

$$V = 2\pi\int_0^1 2^2dx - 2\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx = 8\pi\int_0^1 dx - 2\pi\int_0^1\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)dx = 8\pi\int_0^1 dx - 2\pi\int_0^1 x^4dx -$$

$$-4\pi\int_0^1 x^2dx - 2\pi\int_0^1 dx = 8\pi x\Big|_0^1 - 2\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - 4\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\pi x\Big|_0^1 = 8\pi - 2\pi\frac{1^5}{5} - 4\pi\frac{1^3}{3} - 2\pi =$$

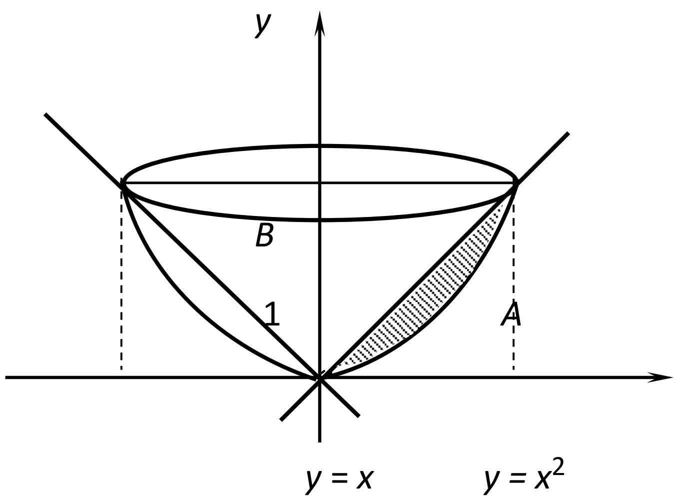
$$= 6\pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{4\pi}{3} = \frac{64}{15}\pi.$$





Аналогично доказывается, что объем тела, образованного вращением вокруг оси $0y$ фигуры, ограниченной линиями $x = \varphi(y)$; $x = 0$; $y = c$; $y = d$ (рис. 22), вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2\left(y\right)dy. \qquad (2.28)$$



Пример 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $0y$ фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x$ (рис. 23).

Решение. Решая систему

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x^2; \\ y = x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x^2 = 0; \\ y = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1; \\ y = 1, \end{cases} \begin{cases} x = 0; \\ y = 0, \end{cases}$$

находим точки пересечения заданных линий: $0(0;0)$ и $A(1;1)$. На рис. 23 видно, что искомый объем равен разности объемов тел, образованных вращением вокруг оси $0y$ криволинейной трапеции $0mAB$ и треугольника $0AB$. Объемы этих тел находим по формуле (2.28), причем в качестве подынтегральных функций следует взять соответственно $x = y$ и $x = y^{1/2}$. Пределами интегрирования являются ординаты точек 0 и A, т. е. $c = 0$ и d = 1. Таким образом,

$$V=\pi\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}dy-\pi\int_0^1 ydy=\pi\left.\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1-\pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\pi\left.\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1-\pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\pi\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}-\pi\frac{1^2}{2}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}.$$