

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

20

О СКАЧКАХ ПРИ ТРЕНИИ¹

В литературе имеется значительное число заметок и статей о скачкообразном перемещении соприкасающихся поверхностей, наблюдаемом при малых скоростях скольжения [1—3].

Указанное явление было положено в основу теории сухого трения, предложенной Боуденом и его сотрудниками.

По Боудену, причиной трения являлось сваривание в точках контакта соприкасающихся поверхностей, периодически возникающее при их скольжении. По мнению Боудена, это явление и вызывает скачкообразное перемещение поверхностей [1].

Хайкин [4] указал на недостаточность утверждений Боудена, доказав, что скачки при трении являются механическими релаксационными колебаниями. Исследованию этого явления была посвящена его совместная с Кайдановским статья [5], опубликованная еще в 1933 г.

Упомянутая работа нашла широкий отклик и за рубежом. Некоторые исследователи, подобно Хайкину, показали, что скачки зависят от механических параметров, характеризующих силу трения [6, 7].

В одном из номеров «Nature» [8] Боуден в ответ на эту критику указал, что наличие скачков, безусловно, должно зависеть от механических параметров системы, напоминая, что это отмечалось им и ранее [9]. Однако он полагал, что сами неровности соприкасающихся поверхностей, обладая некоторой упругостью, как раз и являются причиной скачков.

Последнее утверждение не может быть правильным, так как в этом случае частота колебаний такой системы должна быть очень высокой. Вместе с тем практически наблюдаемые колебания имеют небольшую частоту.

В чем же истинная причина скачков при трении, как объяснить их и каковы условия их существования?

¹ Журн. техн. физики, 1944, т. 14, вып. 4/5, с. 276—282. Совм. с И. В. Крагельским.

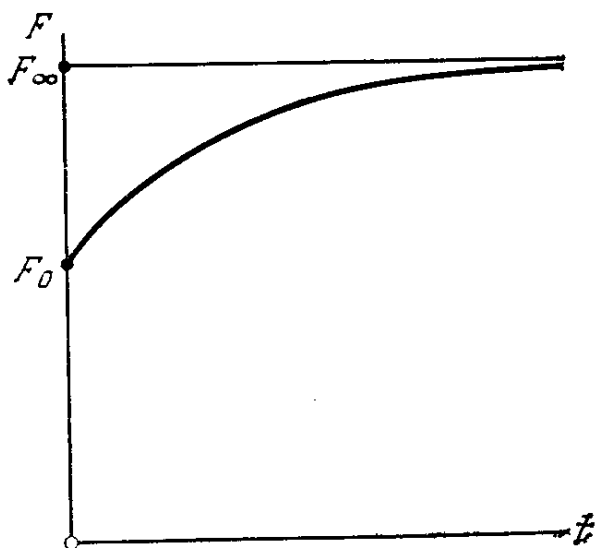


Рис. 1

Анализ явления скачков представляет не только принципиальный интерес, позволяя вскрыть природу трения, он имеет также прикладное значение (вибрация при обработке металлов резанием, невозможность в ряде случаев медленного плавного взаимного перемещения частей механизмов и др.).

Эксперимент показывает, что: 1) скачки, возникающие при малых скоростях взаимного скольжения, исчезают при увеличении этой скорости; 2) ам-

плитуда и частота скачков зависят от скорости скольжения, массы ползуна и жесткости системы; 3) первый скачок значительно больше последующих.

Хайкин отметил, что скачки будут непременно иметь место, если система обладает некоторой упругостью, а сила трения, рассматриваемая как функция скорости скольжения, имеет так называемую падающую характеристику. Однако эти предположения не объясняют, почему амплитуда скачков падает при увеличении скорости скольжения, причем первый скачок оказывается больше последующих.

Опыт показывает, однако, что сила трения как функция скорости скольжения в зоне малых скоростей имеет [10], напротив, возрастающую характеристику². Указанное согласуется с представлением механизма трения как процесса вязкого разрушения материала в области контакта трущихся тел.

С нашей точки зрения, объяснение явления скачков при трении следует базировать на учете возрастания силы трения трогания с места в зависимости от продолжительности неподвижного контакта. Соответствующая теория излагается ниже.

1°. Итак, примем, что сила трения трогания с места является заданной возрастающей функцией $F(t)$ продолжительности t соприкосновения двух тел при отсутствии проскальзывания между ними. Примерный вид функции $F(t)$ изображен на рис. 1. Зависимость

$$F(t) = F_{\infty} - (F_{\infty} - F_0) e^{-at} \quad (1)$$

достаточно удовлетворительно представляет эту функцию. Здесь F_{∞} — значение силы трения трогания с места при большой про-

² Точнее, сила трения при возрастании скорости скольжения проходит через максимум. При этом для большинства трущихся пар этот максимум наблюдается при скорости скольжения, равной 1—2 м/с.

должительности соприкосновения тел без взаимного скольжения; F_0 — значение той же силы при практически отсутствующем времени неподвижного контакта; α — коэффициент, зависящий от свойств трущихся тел, степени их обработки, вида смазки и др. Конечно,

$$F_\infty > F_0. \quad (2)$$

Примем для простоты рассуждений, что значение силы трения движения (т. е. при скольжении тел друг по другу) также равно F_0 и от скорости скольжения одного тела по другому не зависит.

Анализ явления прерывистого движения или скачков при трении произведем на примере скольжения тела относительно шероховатой плоскости (рис. 2). Пусть тело A , связанное пружиной C жесткости K с неподвижным предметом, лежит на шероховатой плоскости B . Плоскость приходит в движение, увлекая за собой тело и производя тем самым натяжение пружины с силой

$$P = Kx, \quad (3)$$

где x — смещение тела от положения, при котором пружина не натянута.

Тело A будет двигаться вместе с плоскостью B до тех пор, пока натяжение P пружины C не достигнет величины силы трения трогания с места $F(t)$, соответствующей предшествующему времени t соприкосновения тела с плоскостью. В частности, если тело A до начала движения плоскости B лежало на ней достаточно долгое время, то можно положить

$$Kx_0 = F_\infty, \quad (4)$$

где x_0 — значение перемещения x , при достижении которого начинается скольжение (скачок) тела A по плоскости B . Это скольжение происходит при наличии двух сил, действующих на тело A :

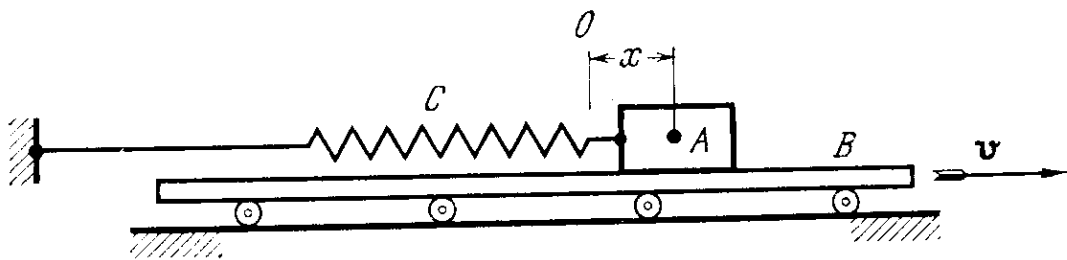


Рис. 2

предполагаемой постоянной силы трения движения F_0 , направленной в сторону движения плоскости, и силы упругости пружины P , выражающейся формулой (3).

Под действием упомянутых двух сил дальнейшее движение тела будет происходить по гармоническому закону около положения равновесия $x = a$ (рис. 3), которое определяется из соотношения

$$Ka = F_0. \quad (5)$$

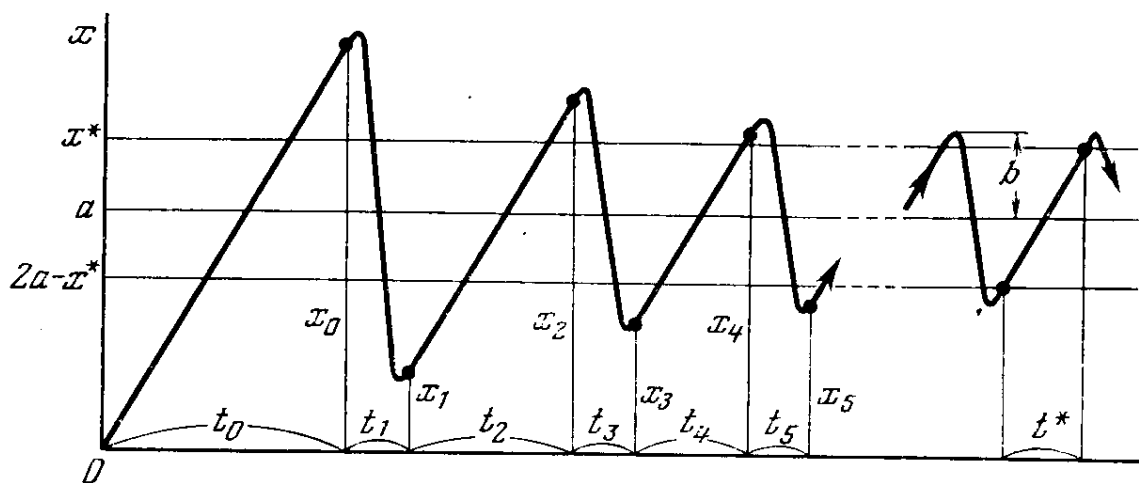


Рис. 3

В начале скольжения тело A имело смещение x_0 и скорость v . Следовательно, тело A сперва будет продолжать двигаться в том же направлении, что и точки плоскости B , постепенно уменьшая свою скорость и отставая от них. Далее скорость тела переменит знак и оно начнет движение в обратном направлении сначала с увеличивающейся по абсолютному значению скоростью. После того как тело пройдет положение, соответствующее смещению $x = a$, при котором сила трения равна силе упругости пружины, скорость тела по модулю будет вновь уменьшаться, пока опять не переменит знак, и тело станет двигаться с возрастающей скоростью уже в сторону движения плоскости B . При некотором смещении $x = x_1$ скорость тела A окажется равной скорости плоскости B , т. е. величине v . Так как движение тела происходит по гармоническому закону, то смещения тела, соответствующие одному и тому же значению скорости v , симметричны относительно положения равновесия. Следовательно,

$$(x_0 + x_1)/2 = a, \quad (6)$$

откуда

$$x_1 = 2a - x_0. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что после достижения скоростью тела A значения v оно перестает скользить по плоскости B и совершает дальнейшее движение уже вместе с плоскостью, вплоть до нового скачка. Действительно, тело A не может опередить плоскость B , так как в этом случае сила трения переменяла бы знак и на тело действовала бы в направлении движения плоскости сила

$$-Kx_1 - F_0 = -K(2a - x_0) - F_0 = F_\infty - 3F_0. \quad (8)$$

Однако последняя отрицательна (если F_∞ превосходит F_0 меньше чем в три раза) и скорость тела возрастать не может.

Если обозначим через t_2 время, в течение которого тело A после прекращения скольжения будет двигаться вместе с плоскостью B ,

и через x_2 — смещение тела в мгновение начала нового скачка, то, очевидно, будет справедливо равенство

$$x_2 = x_1 + vt_2. \quad (9)$$

С другой стороны, в это мгновение имеет место равенство силы натяжения пружины Kx_2 и силы трения трогания с места, величина которой определяется теперь временем t_2 соприкосновения

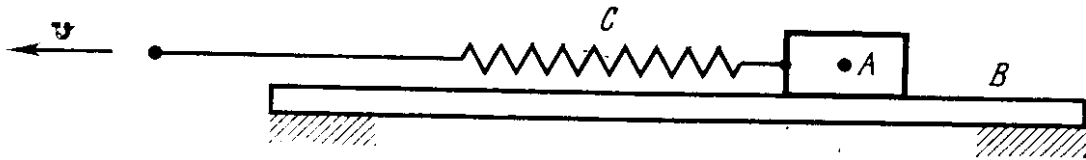


Рис. 4

без скольжения тела A с плоскостью B после первого скачка. Поэтому справедливо равенство

$$Kx_2 = K(x_1 + vt_2) = F(t_2), \quad (10)$$

позволяющее найти, зная функцию $F(t)$, интервал времени t_2 и смещение x_2 .

Новый скачок будет также представлять собой движение по гармоническому закону, которое окончится в мгновение, когда скорость тела A снова сравняется со скоростью плоскости B . Соответствующее значение смещения x_3 можно найти по формуле

$$x_3 = 2a - x_2, \quad (11)$$

аналогичной соотношению (7).

Далее тело A в течение некоторого времени t_4 вновь равномерно движется со скоростью v вместе с плоскостью B , пока при смещении $x = x_4$ не начнется второй скачок. Для отыскания времени t_4 следует решить такое же по виду уравнение, как и (10), т. е.

$$Kx_4 = K(x_3 + vt_4) = F(t_4). \quad (12)$$

После окончания второго скачка опять следует равномерное движение, далее произойдет третий скачок и т. д.

Если значения времен совместного движения тела A и плоскости B без скольжения относительно друг друга, т. е. величины t_0, t_2, t_4, \dots стремятся к некоторому пределу t^* , отличному от нуля, то в конце концов установятся периодические колебания тела A с постоянной амплитудой. Эти колебания, вообще говоря, заметно отличаются от гармонических и принадлежат к типу релаксационных.

Можно, разумеется, схему явления обратить и рассматривать случай перемещения конца пружины C с постоянной скоростью v , а плоскость B считать неподвижной (рис. 4). Анализ явления ос-

танется тем же. Тело A в этом случае спустя время t_0 после начала растяжения пружины начнет двигаться с последующими остановками продолжительностью t_2, t_4, \dots , т. е. прерывисто.

Для определения условий существования прерывистого движения, или скачков, при трении обратимся к прежней механической схеме (см. рис. 2) и через x^* обозначим предельное значение ряда величин x_0, x_2, x_4, \dots , т. е. смещений тела A от исходного положения, при которых начинается очередной скачок (см. рис. 3). Разность $x^* - a$ представляет собой в пределе половину расстояния, которое тело A проходит без скольжения вместе с плоскостью B . Следовательно,

$$x^* - a = vt^*/2, \quad (13)$$

откуда

$$x^* = a + vt^*/2. \quad (14)$$

С другой стороны, скачок начинается в мгновение равенства силы упругости пружины C и силы $F(t^*)$ трения трогания с места при продолжительности t^* соприкосновения тела A и плоскости B без скольжения, т. е.

$$Kx^* = F(t^*). \quad (15)$$

Используя выражение (14), получаем уравнение

$$K(a + vt^*/2) = F(t^*) \quad (16)$$

для искомого интервала времени t^* .

На рис. 5 изображен график изменения силы трения трогания с места $F = F(t)$ в зависимости от времени t соприкосновения тел без взаимного скольжения. Там же приведена прямая

$$P = K(a + vt/2), \quad (17)$$

ординаты которой изображают значения упругой силы пружины к концу времени t пребывания тела A без скольжения на движущейся плоскости B после очередного скачка.

При значении $t = 0$ оба графика имеют общую точку, ибо

$$Ka = F_0 = F(0). \quad (18)$$

Эта точка будет единственной, если угол между касательной к кривой $F(t)$ и осью абсцисс в точке $t = 0$ меньше угла наклона прямой (17). В этом случае колебания релаксационного типа отсутствуют. Следовательно, условием отсутствия скачков при трении является соблюдение неравенства

$$F'(0) < 1/2Kv. \quad (19)$$

Пусть сила трения трогания с места изменяется по закону (1). Тогда условие (19) принимает вид

$$F'(0) = \alpha(F_\infty - F_0) < 1/2Kv, \quad (20)$$

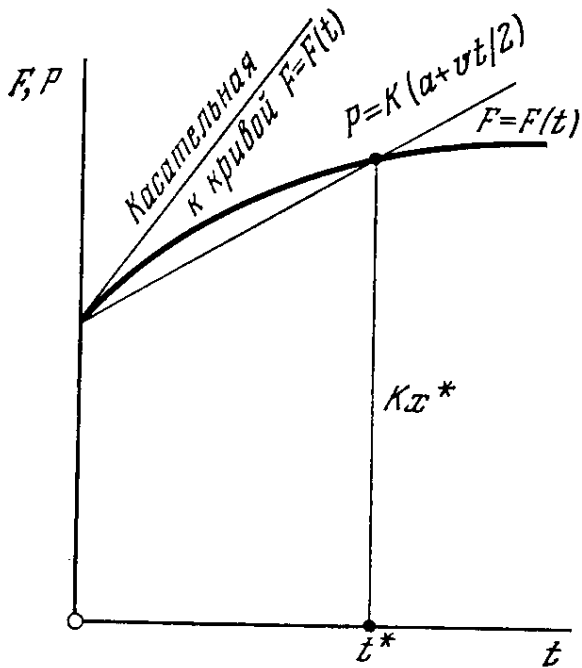


Рис. 5

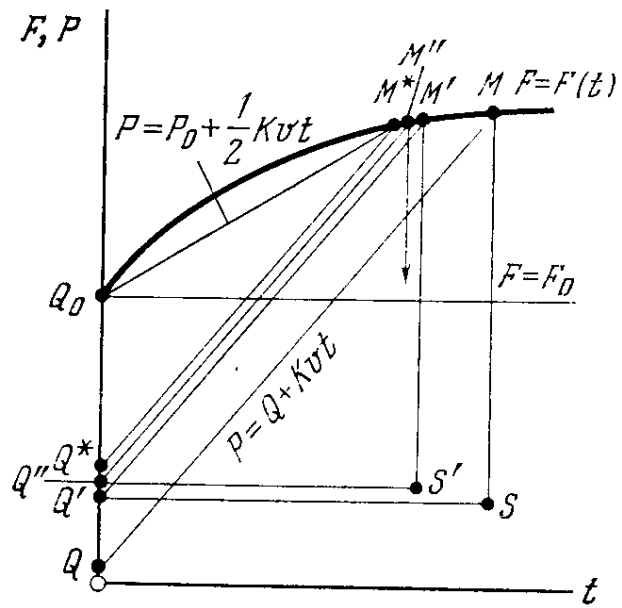


Рис. 6

что всегда будет иметь место при достаточно большой жесткости K пружины C или достаточно большой скорости v движения плоскости B . Предельное значение v , при котором неравенство (19) обращается в равенство, обозначим через v_1 .

При несоблюдении неравенства (20), что может быть, если, например, жесткость пружины мала, графики, показанные на рис. 5, имеют еще одну точку пересечения, абсцисса которой равна t^* . Скачки при трении в этом случае непременно возникнут. Можно показать, что скачкообразное движение тела A устойчиво.

Обратимся вновь к графику $F = F(t)$ зависимости силы трения трогания с места от продолжительности соприкосновения тел без скольжения и рассмотрим с его помощью процесс установления периодических скачков при трении (см. рис. 1).

Воспользуемся для этой цели системой координат этого же графика для изображения изменения силы натяжения P пружины C как функции времени t совместного движения без скольжения тела A и плоскости B . Если откладывать силу натяжения в виде ординаты (рис. 6) в том же масштабе, что и силу трения трогания с места, то график изменения силы P будет иметь вид прямой

$$P = Q + Kvt, \quad (21)$$

где Q — сила натяжения пружины в начале совместного движения тела A и плоскости B без скольжения друг по другу. Абсцисса точки M пересечения прямой (21) и кривой $F = F(t)$ определит мгновение начала первого скачка, а ордината — соответствующее значение смещения x тела A , умноженное на величину жесткости пружины, т. е. на коэффициент K .

Построим точку S , симметричную точке M относительно прямой

$$F = F_0, \quad (22)$$

параллельной оси абсцисс; далее отметим на оси ординат точку Q' , имеющую ту же ординату, что и точка S . Обращаясь к рис. 3 или формуле (17), нетрудно показать, что ордината точки Q' изображает величину силы натяжения пружины к концу скачка и, следовательно, к началу нового равномерного движения тела. Далее сила натяжения пружины будет изменяться по закону

$$P = Q' + Kvt, \quad (23)$$

которому соответствует на рис. 6 прямая $Q'M'$, где M' — точка пересечения прямой (23) с кривой $F = F(t)$.

Точка M' определяет начало нового скачка. Зная ее расположение, можно построить точки S' и Q'' и продолжать дальнейшие построения, пока последовательность точек M, M', M'', \dots не определит предельную точку M^* . Последовательность точек Q, Q', Q'', \dots , в свою очередь, определит предельную точку Q^* . Точки M^* и Q^* находятся по разные стороны, но на равных расстояниях от прямой $F = F_0$.

Отметим на оси ординат точку Q_0 , удаленную от оси абсцисс на расстояние F_0 . Уравнение прямой Q_0M^* имеет вид

$$P = F_0 + Kvt/2, \quad (24)$$

ибо, как нетрудно убедиться, угловой коэффициент прямой Q_0M^* в два раза меньше углового коэффициента прямой Q^*M^* .

Уравнение прямой (24) при учете равенства (18) совпадает с уравнением прямой (17), и, таким образом, абсцисса t^* точки M^* определяется решением уравнения (16).

Для исследования вопроса об устойчивости периодического прерывистого движения представим себе, что в некоторое мгновение тело A было положено на плоскость B (рис. 7) левее того положения, которое соответствует концу скачка при установившемся движении. Этому положению на оси ординат будет соответствовать некоторая точка Q , которая расположена ниже точки Q^* . Теперь, как и выше, сила натяжения пружины будет с течением времени изменяться по закону прямой (21) с угловым коэффициентом Kv , пока последняя не пересечет график изменения силы трения трогания с места $F = F(t)$ в некоторой точке M . В то же мгновение начнется скачок.

Ордината точки M больше ординаты точки M^* , и, следовательно, отклонение тела A от положения равновесия $x = a$ при начале данного скачка будет несколько больше, чем при установившемся движении.

С другой стороны, ордината точки M меньше ординаты точки N пересечения прямой (21) с прямой (24), так как точка N расположена выше кривой графика $F = F(t)$.

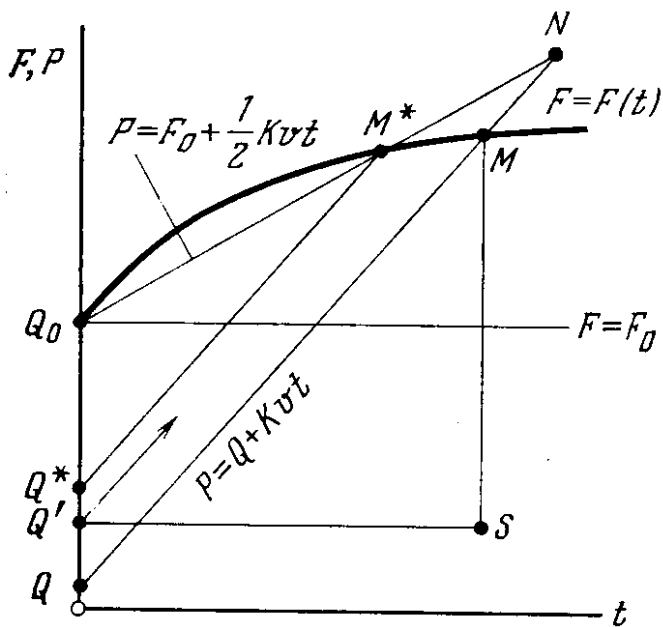


Рис. 7

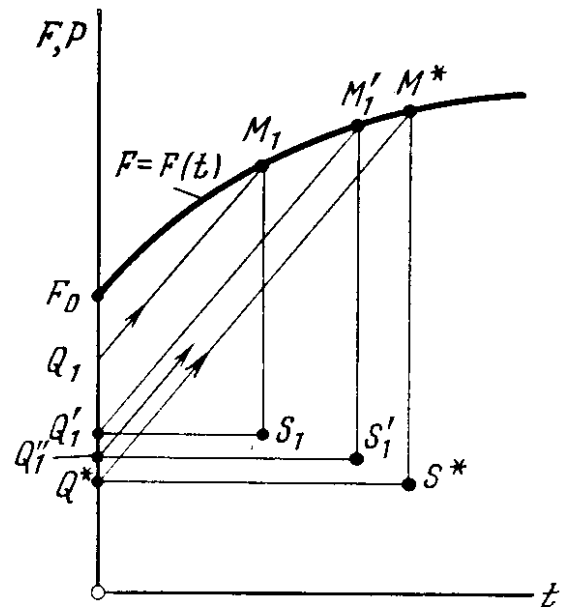


Рис. 8

Расстояние точки N от прямой $F = F_0$ такое же, как и точки Q , что легко установить, используя теоремы о подобии фигур. Следовательно, точка S , симметричная точке M относительно прямой $F = F_0$, будет ближе расположена к этой прямой, чем точка Q . Таким образом, начало нового равномерного движения тела определится на графике точкой Q' , которая находится между точками Q и Q^* . Отсюда следует, что скачки будут уменьшаться и в пределе установится периодическое релаксационное движение.

Аналогично можно доказать, что если тело A было положено на плоскость B правее того положения, которое соответствует концу скачка при установившемся движении, то скачки будут увеличиваться. На рис. 8 этому случаю соответствуют точки $Q_1, M_1, S_1, Q'_1, \dots$ и т. д.

Абсцисса точки M^* равна продолжительности соприкосновения тела A с плоскостью B между очередными скачками при установившемся движении. В свою очередь, ордината точки M^* представляет собой натяжение пружины в мгновение t^* начала скачка и, следовательно, равна произведению Kx^* , где x^* — соответствующее смещение тела.

Амплитуда установившихся скачков выражается формулой

$$b = \sqrt{(x^* - a)^2 + \frac{m}{K} v^2}, \quad (25)$$

ибо в мгновение начала скачка скорость тела A равна скорости плоскости B , т. е. величине v , а смещение тела от положения равновесия равно разности $x^* - a$ [12].

С возрастанием скорости v движения шероховатой плоскости угол наклона прямой (24) к оси абсцисс (см. рис. 6) увеличивается

и точка M^* становится все ближе и ближе к точке Q_0 на оси ординат. При значении $v = v_1$ эти точки сливаются и время t^* обращается в нуль.

Таким образом, точке Q_0 на рис. 6 соответствует периодическое гармоническое движение тела A , скользящего по движущейся со скоростью $v = v_1$ плоскости B без остановок, если не считать мгновения, в которые скорости их становятся равными друг другу. Так как при этом разность $x^* - a$ обращается в нуль, то формула (25) для амплитуды в таком движении принимает вид

$$b_1 = v_1 \sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (26)$$

Кроме упомянутого гармонического движения при $v = v_1$, тело A может совершать бесконечное множество других гармонических движений с меньшими амплитудами. В частности, оно может находиться в равновесии при смещении (см. рис. 2) на расстояние $x = a$ вправо от того положения, при котором пружина C не натянута. В последнем случае, согласно соотношению (18), сила трения скольжения F_0 и сила натяжения пружины P уравновешивают друг друга, т. е.

$$P_0 = Ka. \quad (27)$$

Отмеченное положение равновесия является устойчивым. Однако дело может обстоять иначе, если сила трения движения хотя бы в малой степени зависит от скорости относительного скольжения тел.

Пусть имеет место так называемая падающая характеристика силы трения, т. е. с увеличением скорости относительного скольжения сила трения движения уменьшается. В этом случае упомянутое положение равновесия неустойчиво. В зависимости от жесткости пружины и скорости движения плоскости B в схеме, изображенной на рис. 2, установятся в этом случае либо колебания, близкие к гармоническим, либо периодические скачки.

Падающие характеристики трения встречаются сравнительно редко. Поэтому положение равновесия $x = a$ (при $v > v_1$, т. е. при соблюдении неравенства (20)) чаще всего будет устойчивым, чему способствует также наличие сопротивления движению тела A со стороны окружающей среды.

Как следует из изложенного выше, при несоблюдении неравенства (20) возможны, как правило, два стационарных состояния: или покой, или периодическое прерывистое движение³. Заметим, с точки зрения теории колебаний схема, показанная на рис. 2,

³ Возможно в принципе также периодическое движение тела около положения равновесия $x = a$, при котором его максимальная скорость меньше скорости v шероховатой плоскости. При этом относительная скорость скольжения тела по плоскости все время отлична от нуля и сила трения не меняет знак. Из-за сопротивления среды такие колебания должны затухать.

при $v < v_1$ представляет собой механическую систему с жестким возбуждением автоколебаний. Из состояния покоя в состояние периодических скачков можно перейти, лишь сообщив телу A скорость, не меньшую значения v скорости движения плоскости B . Таким возбуждением, в частности, является начальное совместное движение без скольжения тела A и плоскости B , приводящее к первому скачку.

Период установившихся движений составляется из времени движения тела совместно с плоскостью и продолжительности скачка. Формула для такого периода имеет вид

$$T = 2 \frac{x^* - a}{v} + \pi \sqrt{\frac{m}{K}} + 2\tau, \quad (28)$$

где величина τ находится из соотношения

$$\cos \sqrt{\frac{K}{m}} \tau = \frac{x^* - a}{b}. \quad (29)$$

В случае предельного значения v , при превышении которого скачки исчезают, т. е. при $v = v_1$ и $x^* = a$, получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (30)$$

Колебания в этом случае имеют гармонический характер.

При малых значениях v период определяется в основном первым членом формулы (28) и колебания имеют явно выраженный релаксационный характер.

Итак:

1. Скачкообразное перемещение трущихся поверхностей (механических релаксационных колебаний) объясняется наличием упругости системы и увеличением силы трения трогания с места при возрастании продолжительности неподвижного контакта.

2. Механические релаксационные колебания возникают лишь в том случае, если постоянная скорость v одной из трущихся поверхностей не превышает некоторого значения v_1 , определяемого равенством $v_1 = 2(F_\infty - F_0)/K$.

3. В интервале скорости от 0 до v_1 указанные колебания будут устойчивыми.

4. Амплитуда и период релаксационных колебаний зависят от скорости v : при уменьшении ее амплитуда скачков возрастает; напротив, при постепенном ее увеличении амплитуда колебаний стремится к некоторому предельному значению, отличному от нуля, а сами колебания приобретают гармонический характер.

Период колебаний уменьшается при увеличении скорости, однако стремится к некоторому конечному предельному значению, отличному от нуля.

5. Первый скачок обычно больше следующих, поскольку перед скольжением образец лежит, как правило, достаточно длительное время в условии неподвижного контакта.