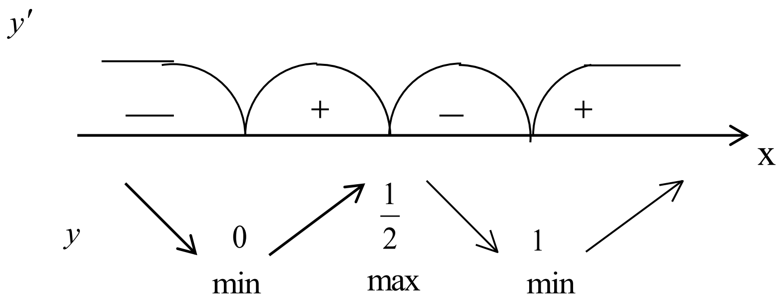
# ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**1) Исследовать на экстремум функцию** $y = x^2(1-x)^2$.

**Решение.** Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную $y'$ и приравняем ее нулю.

$$y' = \left(x^2(1-x)^2\right)' = \left(x^2\right)'(1-x)^2 + x^2\left((1-x)^2\right)' = 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x)$$
$$= 2x(1-x)[1-x-x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1)$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = \dfrac{1}{2}$.




На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции $(-\infty, 0)$ и $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

По рисунку видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = \dfrac{1}{2}$ - максимальное. Найдем эти значения:

$y_{\min}(0) = 0$, $y_{\min}(1) = 0$,

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

**Ответ:** $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0,\quad y_{\max}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{16}$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

**ЗАДАНИЕ № 1.** Исследовать на экстремум:

1. 1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$, 2) $y = x^2 - 2\ln x + 3$.
2. 1) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, 2) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{16}$.
3. 1) $y = x^3 - 6x^2 + 5$, 2) $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x}$.

4. 1) $y=3x^4-16x^3+24x^2-9$, 2) $y=\frac{1}{x}+x$.

5. 1) $y=\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}$ , 2) $y=x^4-2x^2$.

6. 1) $y=x^2(x-12)^2$, 2) $y=(1+x)e^x$.

7. 1) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+7$, 2) $y=\frac{1}{1+x^2}$.

8. 1) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ , 2) $y=x^2(1-x)$ .

9. 1) $y=80x-x^5-80$, 2) $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$.

10. 1) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$, 2) $y=\frac{x^2}{x-2}$.

11. 1) $y=2x^3+3x^2-12x$, 2) $y=\frac{3-x^2}{x+2}$.

12. 1) $y=2x^3+3x^2-36x$, 2) $y=x+\frac{1}{x}$.

13. 1) $y=x^4-2x^2+6$, 2) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$.

14. 1) $y=17-3x^2+\frac{1}{2}x^4$ 2) $y=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

15. 1) $y=x^2(x-2)^2$, 2) $y=\frac{x^3}{3}+x^2$.

16. 1) $y=(x+1)^2\cdot(x-1)^2$ 2) $y=x^3+6x^2+9x$

**2) Найти точки перегиба функции** $y=x\cdot e^{-x}$**.**

**Решение.** Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная $y''$ меняет знак, то сначала найдем $y'$, затем $y''$ и приравняем $y''$ нулю.

$$y'=\left(xe^{-x}\right)'=(x)'e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$y''=(y')'=\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)'=-e^{-x}-\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)=-2e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$$

$y''=0$ при $x=2$, так как $e^{-x}>0$ для всех $x$.

$y''$

- +

$y$ 2 $x$

Так как в точке $x=2$ $y''$ изменила знак, то функция $y$ изменила

в а пере

**Ответ:** $x=2$ - точка перегиба.

**3) Найти асимптоты графика** $y=\frac{2x^2}{x+1}$**.**

Так как вертикальную асимптоту имеет функция с разрывом 2-го рода в точке $x=x_0$, то сначала найдем точки разрыва и исследуем поведение функции в их окрестностях.

О.Д.З. $x \neq -1$.

Значит, $x = -1$ - точка разрыва, так как функция в этой точке не определена. Найдем предел слева и предел справа функции $y = \frac{2x^2}{x+1}$ при подходе к точке $x = -1$. И выясним, разрыв какого рода терпит данная функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x<-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1 \to -0 \\ \frac{1}{x+1} \to -\infty \end{array} \right| = -\infty.$$ Предел слева равен $-\infty$.

$$\lim_{\substack{x \to -1+0 \\ x>-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1 \to +0 \\ \frac{1}{x+1} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$ Предел слева равен $+\infty$.

Так как односторонние пределы бесконечны, то в точке $x = -1$ разрыв 2-го рода, поэтому уравнение вертикальной асимптоты $x = -1$.

Функция также может иметь или не иметь наклонные асимптоты. Если они есть, то их уравнение $y = kx + b$, где

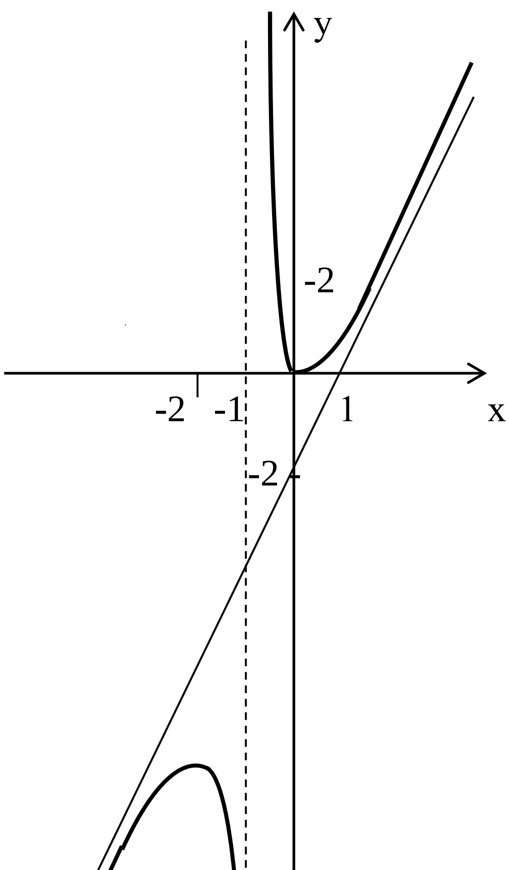
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \text{b} = \lim_{\text{x} \to \infty} \left( f(x) - kx \right).$$

Найдем правую наклонную асимптоту при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{2x^2}{x+1} : \text{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{применяем} \\ \text{правило Лопиталя} \end{array} \right| = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x)'}{(x+1)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1} =$$
$$= 2 \Rightarrow \quad k = 2.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left( f(x) - kx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{2x^2}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 2x(x+1)}{x+1} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x+1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{По правилу} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-2x)'}{(x+1)'} = -2 \Rightarrow \quad b = -2.$$

График функции имеет вид:




Подставляем в уравнение асимптоты $y = kx + b$ и получаем уравнение правой асимптоты $y = 2x - 2$.

Найдем левую асимптоту при $x \to -\infty$. Повторяя все предыдущие действия, как и для $x \to +\infty$, получаем уравнение левой асимптоты $y = 2x - 2$.

**Ответ:** Вертикальная асимптота $x = -1$. Наклонная асимптота $y = 2x - 2$.