Занятие №1

Тема: Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Решить дифференциальные уравнения:

$$2x\sqrt{y^2-2}\,dx - x^2ydy = 3ydy \ .$$

Алгоритм решения

Переносим второе слагаемое в правую часть и выносим ydy за скобку $2x\sqrt{y^2-2}\,dx = y(3+x^2)dy$. Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на множители, «лишние» при дифференциалах. При dx «лишним», т.е. не зависящим от x, является $\sqrt{y^2-2}$, а при dy «лишним» будет $(3+x^2)$.

$$\frac{2x\sqrt{y^2-2}\,dx}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} = \frac{y(3+x^2)dy}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} \Rightarrow \quad \frac{2xdx}{3+x^2} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}}.$$

Теперь можно проинтегрировать, так левая часть зависит только от x, а правая зависит только от y:

$$\int\frac{2xdx}{3+x^2} = \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} \ . \qquad (*)$$

Находим интегралы по отдельности.

$$\int\frac{2xdx}{3+x^2} = \left|\begin{matrix} t = 3+x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln c = \ln tc = \ln c(3+x^2),$$

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} = \left|\begin{matrix} t = y^2-2 \\ dt = 2ydy \\ \frac{dt}{2} = ydy \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{y^2-2}.$$

Подставляем найденные интегралы в (*) : $\ln c(x^2+3) = \sqrt{y^2-2}$.

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Можно его записать по – другому:

$$\ln(3+x^2) + c_1 = \sqrt{y^2-2} \quad \Rightarrow \sqrt{y^2-2} - \ln(3+x^2) = c.$$

Ответ: $\sqrt{y^2-2} = \ln c(x^2+3).$

2. Решить дифференциальное уравнение:

$$(x^2y^2 - x^2y)\ dy - xy^2\ dx = 0.$$

Алгоритм решения

Преобразуем уравнение, вынося общий множитель слева x^2:

$$x^2\cdot(y^2-y)\,dy = xy^2\,dx.$$

Разделим левую и правую части уравнения на произведение $x^2\cdot y^2$, получим

$$\frac{y^2-y}{y^2}\,dy=\frac{x\,dx}{x^2}, \qquad \textit{или} \qquad \frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y-1}{y}\,dy=\int\frac{dx}{x}; \qquad \int dy-\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x};$$

откуда $y-\ln|y|=\ln|x|+c$ – общий интеграл данного уравнения.

(а) Заметим, что если постоянную интегрирования записать в виде $\ln c$, то общий интеграл данного уравнения может иметь другую форму:

$$y-\ln|y|=\ln|x|+\ln|c|; \qquad y=\ln\left|\,y+\ln|x|\right|+\ln|c|$$

или $y=\ln|c\cdot x\cdot y|$ – общий интеграл.

(б)Таким образом, общий интеграл одного и того же дифференциального уравнения может иметь различную форму. Важно в любом случае доказать, что полученный общий интеграл удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Для этого нужно продифференцировать по x обе части равенства, задающего общий интеграл, учитывая, что y есть функция от x. После исключения c получим одинаковые дифференциальные уравнения (исходное). Если общий интеграл $y-\ln|y|=\ln|x|+c$, (вид (a)), то

$$y'-\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}; \quad y'\left(1-\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x};\ dy\cdot\left(1-\frac{1}{y}\right)=\frac{dx}{x}; \quad dy(y-1)=\frac{y\,dx}{x}.$$

Если общий интеграл $y=\ln|c\cdot x\cdot y|$, (вид (б)), то

$$y'=\frac{c\cdot y+c\cdot x\cdot y'}{c\cdot x\cdot y}; \qquad y'=\frac{y+x\cdot y'}{xy};\ y'\cdot xy=y+xy';\ y'\cdot xy-xy'=y;$$

$$x\cdot y'(y-1)=y; \quad x\cdot(y-1)\,dy=y\cdot dx; \qquad dy\cdot(y-1)=\frac{y\,dx}{x}.$$

Получим то же уравнение, что и в предыдущем случае (а).

Примеры для работы на занятии

1. $\left(xy^2+y^2\right)dx=\left(x^2-x^2y\right)dy;$ **ответ:** $\ln x-\frac{1}{x}=\ln y+\frac{1}{y}+c.$

2. $x^2y'+y=0;$ **ответ:** $\ln y=-\frac{1}{x}+c.$

3. $x+xy+yy'(1+x)=0;$ **ответ:** $y-\ln(y+1)=-x+\ln(x+1)+c.$

4. $\sin x\cdot\sin y\,dx+\cos x\cdot\cos y\,dy=0$ **ответ:** $\ln\cos x=\ln\sin y+\ln c$ или $\cos x=c\sin y.$

5. $x\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}\,y'=0;$ **ответ:** $\sqrt{1+x^2}=\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right|+c.$

6. $\left(1+x^2\right)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy;$ **ответ:** $y=\frac{C\sqrt{1+x^2}}{\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|}$ или

$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\ln c.$ 7. $\left(1+y^2\right)dx=xydy,\ y(2)=1;$ **ответ:** $x=\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}.$

8. $y'=2\sqrt{y}\ln x,\ y(e)=1$ *Решить хотя бы нечетные и отправить на портале 23 в окошечко «отправка работ». Я проверю сразу и напишу ответ.*