Занятие №2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Пусть в некотором промежутке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. $x_0 \in [a,b]$- заданная точка (рис.33).

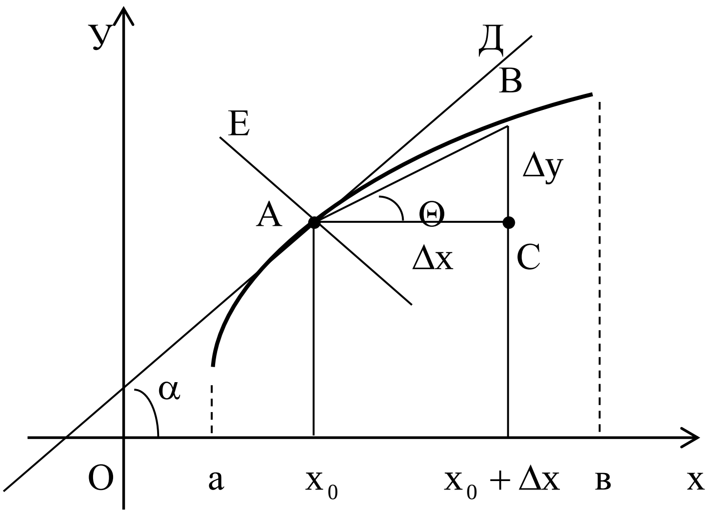

Рис. 1

Дадим аргументу x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, это величина отрезка ВС (рис.1).

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ называется <u>средней</u> скоростью изменения функции $y=f(x)$ в промежутке $[x_0; x_0+\Delta x]$, а предел этого отношения, когда $\Delta x \to 0$, называется <u>производной</u> <u>функции</u> $y=f(x)$ в заданной точке x_0. Таким образом, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Замечание. *Если* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *не существует, то и производной* $f'(x_0)$ *тоже не существует.*

Производную функции $y=f(x)$ в произвольной точке x принято обозначать $f'(x)$ или $y'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$. Если же точка x_0 задана, значение производной в этой точке записывают в виде $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Производная функции в заданной точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Например, производная от пути по времени есть скорость движения, то есть $V(t) = \dfrac{ds}{dt}$; производная от скорости по времени дает ускорение движения $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$. Если функция $Q = Q(t)$ выражает количество электричества, протекающего за время t через сечение проводника, то $\dfrac{dQ}{dt} = i(t)$ есть сила тока в момент времени t. Видно (рис. 33), что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg} Q$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$

,получаем $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} tgQ = tg\alpha$. Итак, производная функции в заданной точке равна тангенсу угла α, который образует касательная в точке $A(x_0;y_0)$с осью OX: $f'(x_0)=tg\alpha$. Так как $tg\alpha = K_{кас}$, то $K_{кас}=f'(x_0)$. Поскольку уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, то получим уравнение касательной АД: $y-y_0=f(x_0)(x-x_0)$(рис. 33).

Так как нормаль $AE\perp AД$, то $K_{н.}=-\frac{1}{K_{кас}}=-\frac{1}{f'(x_0)}$. Поэтому уравнение нормали АЕ имеет вид $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$ (рис. 33).

Пример. Найти производную функции $y=\sin x$ в производной точке x.

Решение. $y(x)=\sin x, y(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$, тогда $\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=$ $=\sin(x+\Delta x)-\sin x$. Так как $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, то

$$\Delta y = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos(x+\Delta x)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Замечание. *При нахождении предела следует помнить, что* $x=\text{const}$, Δx *- переменная.*

Основные правила дифференцирования

2) $(U(x)\pm V(x))'=U'(x)\pm V'(x)$

3) $(U(x)\cdot V(x))'=U'(x)V(x)+U(x)V'(x)$

4) $\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)' = \dfrac{U`(x)V(x)-U(x)V`(x)}{(V(x))^2}$

5) $(CU(x))'=C(U(x))'$

1.	$C'=0$	
2.	$x'=1$ $(cx)'=c$	
3.	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$
4.	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\, u'$
5.	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\, u'$
6.	$(tgx)'=\dfrac{1}{cos^2 x}$	$(tgu)'=\dfrac{1}{cos^2 u}u'$
7.	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$
8.	$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)'=\dfrac{1}{1+u^2}u'$
9.	$(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'$
10.	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
11.	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arcosu)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
12.	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^u)'=a^u\ln a\, u'$
13.	$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u u'$
14.	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'$
15.	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\ u'$

Пример 2. $y=5x^3,\ y'=5\cdot\left(x^3\right)'=5\cdot 3x^2=15x^2$.

Пример 3. (Для примера 6-а контрольной работы)**Для** $y=x^3\cdot\sin x$ найти y'

Воспользуемся формулой :

$(U(x)\cdot V(x))'=U'(x)V(x)+U(x)V'(x)$, где $U=x^3,\ V=\sin x$.Тогда для $y=x^3\cdot\sin x$,

$y'=\left(x^3\right)\cdot\sin x+x^3(\sin x)'=3x^2\cdot\sin x+x^3\cos x$.

Пример 4. (Для примера 6-а контрольной работы) **Для** $y=\dfrac{\sin x}{2x^3}$ найти y'.

Воспользуемся формулой :

$\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)' = \dfrac{U`(x)V(x)-U(x)V`(x)}{(V(x))^2}$, где $U=\sin x,\ V=2x^3$.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{2x^3}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin x)'\cdot x^3 - \sin x\cdot\left(x^3\right)'}{x^6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x\cdot x^3 - \sin x\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x\cos x - 3\sin x}{2x^4}$$

Пример 5. (Для примера 6-в контрольной работы) **Для** $y = \sin x^3$ найти y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y = \sin u$, где $u = x^3$. Зная, что $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$, получим:

$$y' = \left(\sin x^3\right)' = \cos x^3\cdot\left(x^3\right)' = 3x^2\cdot\cos x^3.$$

Пример 6. Для $y = (5+3x)^7$ найти y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y = u^7$, где $u = 5+3x$. Зная, что $\left(u^7\right)' = 7\cdot u^6\cdot u'$, получим:

$$y' = 7\cdot(5+3x)^6\cdot(5+3x)' = 21(5+3x)^6.$$

Пример 7. Для $y = \cos^2(x^2)$ найти y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y = u^2$, где $u = \cos x^2$. Зная, что $\left(u^2\right)' = 2\cdot u\ \ \cdot u'$, получим:

$$y' = 2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(\cos\left(x^2\right)\right)' = 2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2\right)\right)\cdot\left(x^2\right)' = 2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2\right)\right)\cdot 2x =$$
$$= -2x\cdot\sin\left(2x^2\right)$$

Пример 8. Для $y = \arcsin\sqrt{x}$ найти y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y = \arcsin u$, где $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Зная, что $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot u'$, получим:

$$y' = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)' = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}}$$

<u>**Задача 1.**</u> Найти производные функций:

1) $y = e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

$y' = (e^{x^3-5x^2+4x+12})'.$

Можно представить данную функцию как $y = e^u$, где $u = x^3 - 5x^2 + 4x + 12$. Зная, что $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$, получим

$$e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(x^3 - 5x^2 + 4x + 12\right)' = e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(3x^2 - 10x + 4\right).$$

Ответ: $y' = \left(3x^2 - 10x + 4\right) e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

2) $y = \mathrm{tg}^3 5x$.

$$y' = \left[\left(\mathrm{tg}\ 5x\right)^3\right]'.$$

Можно представить $y = u^3$, где $u = \mathrm{tg}\ 5x$. Причем $\left(u^3\right)' = 3u^2 \cdot u'$, в результате получим

$$y' = \left[\left(\mathrm{tg}\ 5x\right)^3\right]' = 3 \cdot \left(\mathrm{tg}\ 5x\right)^2 \cdot \left(\mathrm{tg}\ 5x\right)' = 3\mathrm{tg}^2\ 5x \frac{1}{\cos^2\ 5x} \cdot (5x)' = 15\mathrm{tg}^2\ 5x\ \frac{1}{\cos^2\ 5x}$$

Ответ: $y' = 15\ \frac{\mathrm{tg}^2\ 5x}{\cos^2\ 5x}$.

3) $y = 3x \ln x$.

$$y' = 3\left(x \cdot \ln x\right)'.$$

После подстановок $\left(u \cdot v\right)' = u'v + v'u$; $\left(c \cdot u\right)' = cu'$ получим

$$y' = 3\left[\left(x\right)' \cdot \ln x + x\left(\ln x\right)'\right] = 3\left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = 3\left(\ln x + 1\right).$$

Ответ: $y' = 3\left(\ln x + 1\right)$.

4) $y = \frac{x^2 - 3 + 1}{2x}$.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2 - 3x + 1\right)' x - (x)'\left(x^2 - 3x + 1\right)}{x^2} =$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)x-\left(x^2-3x+1\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\,\frac{2x^2-3x-x^2+3x-1}{x^2}=\frac{1}{2}\,\frac{x^2-1}{x^2},$$ если воспользоваться правилом $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Ответ: $y'=\frac{x^2-1}{2x^2}$.