Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные различных порядков. Например:

1) $y' \cdot x - x^2 - y = 0$
2) $(x - y)\, dx + (x + y)\, dy = 0$
3) $y'' + 2y' - y = 0,$

т. е. дифференциальное уравнение может содержать производные $y'\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ или дифференциалы dx и dy независимой переменной и функции.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая этому уравнению (т. е. функция, которая обращает данное уравнение в тождество).

Дифференциальные уравнения первого порядка

Так как дифференциальное уравнение первого порядка (условимся в дальнейшем писать д.у.1) содержит независимую переменную x, функцию y и ее производную y', общий вид д.у.1 будет выглядеть как

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{1}$$

Задача 1.Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида $M_1(x) \cdot M_2(y) \cdot dx + N_1(x) \cdot N_2(y) \cdot dy = 0.$ называется дифференциальным уравнением с **разделенными переменными.**

Его можно после преобразований записать в виде $\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0$ или

$$f_1(x)\ dx = -f_2(y)\ dy.$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим так называемый общий интеграл (или общее решение).

При решении дифференциального уравнения с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим **алгоритмом (правилом) разделения переменных.**

Первый шаг. Если дифференциальное уравнение содержит производную y', ее следует записать в виде отношения дифференциалов: $y' = \dfrac{dy}{dx}.$

Второй шаг. Умножим уравнение на dx, затем сгруппируем слагаемые, содержащие дифференциал функции и дифференциал независимой переменной $(dy \quad и \quad dx)$.

Третий шаг. Выражения, полученные при dy и dx, представить в виде произведения двух множителей, каждый из которых содержит только одну переменную (либо x, либо y). Если после этого уравнение примет вид

$$M_1(x) \cdot M_2(y) \cdot dx + N_1(x) \cdot N_2(y) \cdot dy = 0,$$

то, разделив его на произведение $M_2(y) \cdot N_1(x)$, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Четвертый шаг. Интегрируя почленно уравнение, получим общее решение исходного уравнения (или его общий интеграл).

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = c.$$

Пример1

$$(1+x)\cdot y\,dx + (1-y)\cdot x\,dy = 0,$$

Решение Разделим уравнение на произведение $y \cdot x$. Получим уравнение

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0; \qquad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)\,dy = 0.$$

Интегрируя, получим $\int \frac{1}{x}dx + \int dx + \int \frac{dy}{y} - \int dy = 0;$

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = c$$

или

$$\ln|xy| + x - y = c.$$

Последнее соотношение есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пример2 $y' = -\dfrac{y}{x},$

Решение Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$, умножим на dx, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \qquad dy = -\frac{y}{x}\cdot dx; \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|.$$

$\ln|y| = \ln\left|\dfrac{c}{x}\right|;$ $\quad y = \dfrac{c}{x}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Пример3 $\left(x^2y^2 - x^2y\right)dy - xy^2\,dx = 0.$

Решение Преобразуем уравнение, вынося общий множитель слева x^2: $x^2\cdot\left(y^2-y\right)dy = xy^2\,dx.$ Разделим левую и правую части уравнения на произведение $x^2\cdot y^2$, получим

$$\frac{y^2-y}{y^2}\,dy = \frac{x\,dx}{x^2}, \qquad \text{или} \qquad \frac{y-1}{y}dy = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y-1}{y}\,dy = \int\frac{dx}{x}; \qquad \int dy - \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x};$$

откуда $y - \ln|y| = \ln|x| + c$ – общий интеграл данного уравнения.

Заметим, что если постоянную интегрирования записать в виде $\ln c$, то общий интеграл данного уравнения может иметь другую форму:

$$y - \ln|y| = \ln|x| + \ln|c|;$$
$$y = \ln|\,y + \ln|x|\,| + \ln|c|$$

Индивидуальные задания

1. $y' \cdot \sin^2 x = y \cdot \ln y$ **2.** $(x^2+4) \cdot y' - 2x \cdot y = 0$ **3.** $y' - \dfrac{xy}{x^2-1} = 0$ **4.** $y' \cdot tg\, x - y = 0$ **5.** $y' \cdot \sqrt{1-x^2} = x$, $y(0)=1$ **6.** $(x^2+4) \cdot dy - 2xy \cdot dx = 0$, $y(1)=5$ **7.** $(1+y^2) \cdot dx - x \cdot y \cdot dy = 0$ $\quad y(1)=0$ **8.** $y' \cdot x \cdot \ln x - y = 0$ $\quad y(e)=1$ **9.** $dy - y^2 \cdot dx = 0$ $\quad y(-1)=1$ **10.** $2xy\,dx = (x^2+4)dy$ $\quad y(1)=5$ **11.** $x\,dx = \sqrt{1-x^2} \cdot dy$ $\quad y(0)=1$ **12.** $\mathrm{tg}\, x \cdot dy - dx = y \cdot dx$ $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$	**13.** $x \cdot y' - y - x^2 = 0$ $\quad y(-2)=1$ **14.** $x^3 \cdot \sin y \cdot y' = 2$ **15.** $\dfrac{dy}{dx} - y = 3$ $\quad y(0)=-2$ **16.** $y' \cdot \sin x - y \cdot \ln y = 0$ $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$ **17.** $y - xy' = a \cdot (1 + x^2 \cdot y')$ **18.** $(1+e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$ $\quad y(0)=1$ **19.** $x\,dy = 2\sqrt{y} \cdot \ln x\, dx$ $\quad y(e)=1$ **20.** $x \cdot \ln x \cdot dy - y\,dx = 0$ **21.** $\sin y \cdot \cos x \cdot dy - \cos y \cdot \sin x \cdot dx = 0$ $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$

Задача 2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Легко можно убедиться в том, что дифференциальные уравнения

$$y' = \frac{y-x}{y+x}; \qquad y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}; \qquad y\,dx = (x+y)\,dy$$

не являются уравнениями с разделяющимися переменными. Они являются **однородными уравнениями.**

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка,** если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией нулевого измерения,** если при любом t справедливо тождество $f(t \cdot x;\ t \cdot y) = f(x, y)$.

Так, функции $f_1(x, y) = \dfrac{y-x}{y+x}$; $\qquad f_2(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ – однородные функции нулевого измерения, т. к.

$$f_1(t\cdot x,\ t\cdot y)=\frac{ty-tx}{ty+tx}=\frac{t(y-x)}{t(y+x)}=\frac{y-x}{y+x}=f_1(x,\ y);$$

$$f_2(tx;\ yt)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)\cdot(ty)}=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{2tx\cdot ty}=\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{t^2(2xy)}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f_2(x,y).$$

Для сведения однородного к уравнению с разделяющимися переменными сделаем подстановку y/x=t, т. е. $y=x\cdot t$,

где $u=u(x)-$ неизвестная функция.

Тогда $y'=t+x\cdot t'$.

П**ример 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Решение Разделим числитель и знаменатель на x^2. Получим уравнение

$$y'=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}.\quad y'=\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x^2}}.$$

Подстановкой $\frac{y}{x}=t$; или $y=tx$ откуда $y'=t+xt'$.

Подставив y и y' в данное уравнение, получим

$$t+xt'=\frac{1+t^2}{2t}\quad \text{или}\quad xt'=\frac{1+t^2}{2t}-t.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно вспомогательной функции $t(x)$. Упростим правую часть:

$$x\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1-t^2}{2t}.$$

Умножив на $\frac{dx\cdot 2t}{t\cdot\left(1-t^2\right)}$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{2t\ du}{1-t^2}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $-\ln\left|1-t^2\right|\ =\ln|x|-\ln|c|$;

или

$$\ln\left|1-t^2\right|=\ln|c|-\ln|x|,$$

или

$$\ln\left|1-t^2\right|=\ln\left|\frac{c}{x}\right|;$$

Потенцируем $1-t^2=\frac{c}{x}$; $\quad t^2=1-\frac{c}{x}=\frac{x-c}{x}$.

Подставив $t=y/x$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{x-c}{x}; \qquad \frac{y^2}{x}=x-c; \qquad y^2=x^2-xc; \qquad x^2-y^2=xc.$$

Проверка: $\begin{cases} 2x-2y\cdot y'=c \\ x^2-y^2=cx \end{cases}$

$x^2-y^2=2x^2-2xy\cdot y'$ или $2xyy'=x^2+y^2$; $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ – искомое уравнение.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x\cdot dy-\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)\,dx=0$ при начальных условиях $y(1)=\pi$.

Решение

Разделив на x обе части уравнения, получим данное уравнение. Решаем уравнение подстановкой $\frac{x}{x}\cdot dy-\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}\right)\,dx=0$

$$\frac{y}{x}=t; \qquad y=t\cdot x,\ \ y'=t'x+t$$

Разделим уравнение на dx получим:

$$\frac{dy}{dx}-\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}\right)=0 \text{ или } y'-\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}\right)=0$$

Поставим y' $и$ t в уравнение, получим

$$t'x+t-\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)=0.$$

Или после раскрытия скобок.

$-t'x+\sqrt{1-t^2}=0$. $t'x=-\sqrt{1-t^2}$, $\dfrac{dt}{dx}x=-\sqrt{1-t^2}$ это уравнение с разделяющимися переменными. Умножив обе части на dx и разделив обе части на $x\cdot\sqrt{1-t^2}$, получим $\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{dx}{x}$ – уравнение с разделенными переменными. Интегрируя левую и правую части уравнения, получим

$$arc\sin\ t=\ln|\,x\,|+\ln|\,c\,|.$$

Подставив $t=\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения:

$$\text{arc}\sin\frac{y}{x}=\ln|\,xc\,|.$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям $y=\pi$ при $x=1$.

Подставим в формулу общего интеграла $y=\pi$, $x=1$:

$\text{arc}\sin\dfrac{\pi}{1}=\ln 1\cdot c$; $0=\ln\ c$, отсюда $c=1$ и частный интеграл

$$arc\sin\frac{y}{x}=\ln|x|.$$

Индивидуальные задания

1. $2x\cdot y\cdot y'+x^2-y^2=0$	13. $x\cdot y'-y=x\cdot tg\frac{y}{x}\quad y(1)=\frac{\pi}{2}$
2. $x\cdot y'=y+\sqrt{y^2-x^2}$	14. $2x\cdot y\cdot y'+x^2-y^2=0$
3. $\left(y^2-x^2\right)\cdot dx-x\,y\,dy=0;$	15. $x\cdot y'+x+y=0$
4. $x\cdot y'-y=x\cdot\cos^2\frac{y}{x}$	16. $(x+y)\cdot y'+(x-y)=0$
5. $2x^2\cdot y'=x^2+y^2$	17. $x\cdot y'-y=\sqrt{y^2+x^2}$
6. $x\cdot y'\cdot\cos\frac{y}{x}=y\cdot\cos\frac{y}{x}-x$	18. $x\cdot y'=y\ln\frac{y}{x}$
7. $\left(x^2-2y^2\right)\cdot dx+2\,x\,y\,dy=0$	19. $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}=0$
8. $x\cdot y\cdot y'+x^2=y^2$	20. $x^2y'+y^2=yxy'$
9. $x^2+y^2=2xy\cdot y'\quad y(1)=2$	21. $y'=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$
10. $\left(x^2-2y^2\right)+2\,x\,y\,y'=0$	22. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$
11. $(x+y)\cdot dy+(x-y)dx=0$	
12. $x\cdot y\cdot y'=y^2+9\,x^2y$	

Задача 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *линейным*, если имеет следующий вид:

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x), \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$– заданные функции от x. Приведем теорему Коши для линейных уравнений первого порядка.

Теорема Коши. Пусть $(a;b)$ интервал, в котором функция $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывна. Тогда для любых $x_0 \in (a;b)$ и $y_0 \in (-\infty;+\infty)$ задача Коши с начальными значениями $(x_0; y_0)$ имеет единственное решение, т.е. существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка (1) сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки

$$y = u \cdot v, \tag{2}$$

где u и v – неизвестные функции от x. Из (2) находим

$$y' = u'_x v + u v'_x \text{ или}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}. \tag{3}$$

Подставив значения y и y' в уравнение (2), получаем

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x), \text{ или}$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u \right) = Q(x). \tag{4}$$

Так как искомая функция y подстановкой (2) представлена в виде произведения двух функций u и v, то одну из них, например u, мы можем выбрать по нашему усмотрению, кроме $u = 0$. Выберем функцию так, чтобы

$$\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = 0, \tag{5}$$

т.е. в качестве функции возьмем одно из частных решений u^* уравнения (5). Решая уравнение (2.20) как уравнение с разделяющимися переменными, найдем отличную от нуля функцию $u^* = e^{-\int P(x)dx}$.

Так как функция u^* является решением уравнения (5), то после ее подстановки в уравнение (4) получим

$$u^* \frac{dv}{dx} = Q(x), \text{ т.е. } dv = \frac{Q(x)}{u^*(x)} dx. \tag{6}$$

Решив уравнение (6) как уравнение с разделенными переменными, в котором u^* известна, найдем функцию $v = v(x, C)$, содержащую произвольную постоянную C и являющуюся общим решение уравнения (6).

Заменив в равенстве $y = u \cdot v$ функции u и v найденными значениями, получим решение $y = u^*(x) \cdot v(x, C)$ уравнения (1), содержащее вместе с функцией v и произвольную постоянную C.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\left(1 + x^2\right) y' - xy = 2x.$$

<u>Решение</u>. Разделив все члены данного уравнения на $\left(1 + x^2\right) \neq 0$, приведем его к виду (2.16)

$$y' - \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2} \quad . \tag{7}$$

Здесь $P(x) = -\dfrac{x}{1 + x^2}$, $Q(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Положим $y = u \cdot v$, откуда $y' = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$.

Подставим эти значения y и y' в уравнение (7):

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{xuv}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{x \cdot u}{1 + x^2}\right) = \frac{2x}{1 + x^2}. \tag{8}$$

Выберем функцию $u \neq 0$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е.

$$\frac{du}{dx} - \frac{xu}{1 + x^2} = 0. \tag{9}$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2}. \tag{10}$$

Решаем уравнение (10) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx}-\frac{xu}{1+x^2}=0,\text{ т.е. } \frac{du}{u}=\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегрируем почленно это уравнение :

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{x\,dx}{1+x^2}\ \text{,или } \int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}.$$

т.к. $d\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)'dx=2x\,dx$, откуда $x\,dx=\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$

т.е. $\ln|u|=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$, откуда

$$u=\sqrt{1+x^2}. \tag{11}$$

Подставив значение функции u в уравнение (10), найдем

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dv}{dx}=\frac{2x}{1+x^2},\text{ т.е. } dv=\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрируя почленно

$$\int dv=\int\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}},\text{ или } \int dv=\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(1+x^2\right),$$

т.к. $d\left(1+x^2\right)=2x\,dx$.

Откуда $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C$, или $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C$ или

$$v=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+C. \tag{12}$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функции u и v их выражениями из равенств (11) и (12), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=\sqrt{1+x^2}\left(C-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right),\text{ или } y=C\sqrt{1+x^2}-2.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$xy'-y=x^3,\text{ если } y=1/2 \text{ при } x=1.$$

Решение. Разделив все члены данного уравнения на $x \neq 0$, приведем его к виду (13)

$$y' - y\frac{1}{x} = x^2. \tag{13}$$

Здесь $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$.

Положим $y = u \cdot v$, откуда $y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

Подставим эти значения в уравнение (13):

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot \frac{1}{x} = x^2.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = x^2. \tag{14}$$

Выберем функцию u так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0. \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$u\frac{dv}{dx} = x^2. \tag{16}$$

Решаем уравнение (14) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \ \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно уравнение

$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x}, \text{ или } \ln u = \ln x, \text{или } u = x. \tag{17}$$

Подставим это значение в уравнение (16), найдем

$x\frac{dv}{dx} = x^2$, т.е. $dv = x\,dx$.

Интегрируя почленно $\int dv = \int x\,dx$ или

$$v=\frac{x^2}{2}+C. \tag{18}$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функциями u и v их выражениями из равенств (17) и (18), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right),\text{ или } y=\frac{x^3}{2}+Cx. \tag{19}$$

Пример 3. $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$.

Решение Решаем подстановкой

$$y=u\cdot v;\quad y'=u'v+u\cdot v'.$$

$$u'v+uv'+\frac{1}{x}u\cdot v=\frac{\sin x}{x}.$$

$$v\cdot\left(u'+\frac{1}{x}u\right)+u\cdot v'=\frac{\sin x}{x}. \tag{20}$$

$u'+\frac{1}{x}u=0$	$u\cdot v'=\frac{\sin x}{x}$
$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}\cdot u$	$\frac{1}{x}\cdot v'=\frac{\sin x}{x}$
$\frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}$	$v'=\sin x$
$\ln u=-\ln x.$	$v=-\cos x+c$

$u=\frac{1}{x}$ подставим в (20).

Общее решение: $y=\frac{1}{x}\cdot(-\cos x+c)$.

Пример 4. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}\cdot y=(x+1)^3 \quad \text{при} \quad y(0)=3.$$

Решение Подстановка: $y=u\cdot v$.

$$\frac{dy}{dx}=y'=u'v+uv';$$

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{2}{x+1}\cdot uv=(x+1)^3$$

$$v\cdot\left(u'-\frac{2}{x+1}\cdot u\right)+u\cdot v'=(x+1)^3 \tag{21}$$

$$u'-\frac{2}{x+1}\cdot u=0,\qquad \frac{du}{u}=\frac{2dx}{x+1},\qquad \int\frac{du}{u}=\int\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|u|=2\ln|x+1|,\qquad u=(x+1)^2.$$

Подставим найденную функцию u в уравнение (21): $u \cdot v' = (x+1)^3$;

$$(x+1)^2 \cdot v' = (x+1)^3.$$

$$v' = x+1; \qquad \frac{dv}{dx} = x+1, \qquad dv = (x+1)\,dx,$$

$$v = \int (x+1)\,dx = \frac{(x+1)^2}{2} + c.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y = (x+1)^2 \cdot \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c \right)$$

или $\qquad y = \dfrac{(x+1)^4}{2} + c \cdot (x+1)^2.$

Найдем частное решение дифференциального решения, удовлетворяющее начальному условию $y = 3$ при $x = 0$.

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + c \cdot (0+1)^2; \qquad c = 5/2.$$

Следовательно, искомое частное решение такое:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2} \cdot (x+1)^2.$$

Индивидуальные задания

1. $y' + 2xy = e^{-x^2}$

2. $y' - y \cdot \mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos x}$

3. $y' - y \cdot \mathrm{tg}\, x = \mathrm{ctg}\, x$

4. $x y' - \dfrac{y}{x+1} = x$

5. $y' \cdot x \cdot \ln x - y = 3x^3 \cdot \ln^2 x$

6. $(1+x^2) \cdot y' - 2xy = (1+x^2)^2$

7. $x \cdot y' - y - x^2 = 0$

8. $y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = 1 \quad y(0) = 0$

9. $(1+x^2)y' - xy = 2x$ если $y = 0$ при $x = 0$.

10. $y' - \dfrac{3}{x} y = x$, если $y = 1$ при $x = 1$.

11. $y' - 4y = e^{2x}$

12. $y' - \frac{y}{x} = 2, \quad y(1) = -1$

13. $y' - y \cdot \mathrm{tg}\, x = \frac{2x}{\cos x}, \quad y(0) = 4$

14. $y' + 2x\, y = x\, e^{-x^2}, \; y(0) = 2$

15. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

16. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 2$

17. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 3$

18. $y' - \frac{2}{x+1}\, y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 2$

19. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 5$

20. $y' + \frac{2x}{1+x^2}\, y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \; y(0) = 2$

21. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

22. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

Задача 4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы д.у. II, решение которых сводится к решению дифференциальных уравнений первого порядка.

1-й тип. Простейший тип таких уравнений – это $y'' = f(x)$. Дифференциальное уравнение содержит только вторую производную и некоторую функцию от x (ни сама функция y, ни ее первая производная y' в уравнение не входят). Уравнение вида $y'' = f(x)$ решается последовательным интегрированием два раза.

Пример 1. $y'' = \cos 4x.$

$$y' = \int \cos\ 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x + c_1;$$

Получили уравнение первого порядка

$$y' = \frac{1}{4}\ \sin\ 4x + c_1;$$

отсюда

$$y = \int\ \left(\frac{1}{4}\sin\ 4x + c_1\right) dx = -\frac{1}{16}\cos\ 4x + c_1 x + c_2\ -$$

общее решение исходного уравнения (содержит две произвольные постоянные c_1 и c_2).

Аналогично решаются и дифференциальные уравнения порядков выше второго, если они имеют такой же вид, например: $y''' = f(x)$; $f^{iv} = f(x)$.

Пример 2. $y''' = 3e^{-2x}$.

$$y'' = -\frac{3}{2}e^{-2x} + c_1,$$

$$y' = \frac{3}{4}e^{-2x} + c_1 x + c_2,$$

$$y = -\frac{3}{8}e^{-2x} + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_2\ -$$

общее решение данного уравнения.

Пример 3. $y^{iv} = \dfrac{x^2}{2} + 3x$.

$$y''' = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + c_1.$$

$$y'' = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{2} + c_1 x + c_2.$$

$$y' = \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{8} + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

$$y = \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{40} + c_1 \cdot \frac{x^3}{6} + c_2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4\ -$$

общее решение уравнения. Обратите внимание, общее решение дифференциального уравнения третьего порядка содержит три произвольные постоянные (c_1, c_2, c_3), а дифференциального уравнения четвертого порядка – уже четыре (c_1, c_2, c_3, c_4). Допускают понижение порядка и дифференциальные уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$.

2-й тип. $F(x, y', y'') = 0$, т. е. уравнения, в которые явно не входит сама искомая функция y. Решаются такие уравнения подстановкой $y' = p$, где $p = p(x)$ – вспомогательная функция. Тогда $y'' = p'\left(\frac{dp}{dx}\right)$. Подставив $y' = p$ и $y'' = p'$ в данное уравнение, получим уравнение $F(x, p, p') = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример 4. Решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} = x. \tag{9}$$

Положим $y' = p$; $y'' = p'$ и уравнение примет вид

$$p' + \frac{p}{x} = x \; - \tag{10}$$

это линейное уравнение первого порядка относительно функции $p = p(x)$.

Решаем его подстановкой $p = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$; $p' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Получим $u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x} = x$;

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + u \cdot v' = x;$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0; \quad \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0; \quad \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0;$$

$$\ln u + \ln x = 0; \quad u = \frac{1}{x;}$$

$$u \cdot v' = x; \quad \frac{1}{x} \cdot v' = x; \quad v' = x^2; \quad \frac{dv}{dx} = x^2;$$

$$dv = x^2 dx;$$

$$v = \frac{x^3}{3} + c_1.$$

Функция

$$p = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right).$$

Исходное уравнение (9) решалось подстановкой $y' = p$. Поэтому

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

Интегрируя, получим $y = \dfrac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$ –

общее решение уравнения (9).

Пример 5. Найти частное решение уравнения $y'' \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2xy'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$. Применим подстановку $y' = p$; $y'' = p'$. Получим уравнение

$$p' \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x \cdot p.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции p. Разделим переменные:

$$\frac{dp}{dx} \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x \cdot p; \quad dp \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2x \cdot p\,dx; \quad \frac{dp}{p} = \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}; \qquad \ln p = \ln\left(x^2 + 1\right) + \ln c_1;$$

$p = c_1 \cdot \left(x^2 + 1\right)$. Откуда $y' = c_1\left(x^2 + 1\right)$.

Используем второе начальное условие $y'(0) = 3$, получим

$3 = c\ (0 + 1)$; $c_1 = 3$.

Следовательно, $y' = 3 \cdot \left(x^2 + 1\right)$,

а после интегрирования $y = x^3 + 3x + c_2$.

Применим первое начальное условие $\mathrm{y}(0) = 1$, получим

$$1 = 0 + 0 + c_2, \qquad c_2 = 1.$$

Искомым частным решением будет

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Еще одним типом уравнений, допускающих понижение порядка, является уравнение вида $F(y,\ y',\ y'') = 0.$

3-й тип $F(y,\ y',\ y'') = 0,$

т. е. уравнение, не содержащее явно независимую переменную x. Здесь порядок уравнения понижается на единицу путем следующей замены:

$y' = p,$ где $p = p(y).$

Здесь p – новая вспомогательная функция, а y играет роль независимой переменной. Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$ т. е. $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}.$

Заметим, что вторая производная y'' получена по правилу дифференцирования сложной функции.

Подставив выражения $\mathrm{y}' = \mathrm{p},\ \mathrm{y}'' = \mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}}$ в данное уравнение, получим

$$F(y,\ p,\ p') = 0 -$$

уравнение первого порядка относительно p как функции от y.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$2y \cdot y'' + y'^2 = 0. \tag{11}$$

Полагаем $y' = p,\ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy},$ получим $2y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$ – (12)

это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведя его к виду $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$ и интегрируя, получим $\ln p = -\frac{1}{2} \ln y + \ln c_1;$

$$\ln p = \ln \frac{c_1}{\sqrt{y}}, \qquad p = \frac{c_1}{\sqrt{y}}.$$

Так как исходное уравнение (11) решалось с помощью подстановки $p = y',$ получим $y' = \frac{c_1}{\sqrt{y}}$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно искомой функции y от x.

$\sqrt{y} \cdot dy = c_1 \cdot dx.$

$\int \sqrt{y}\, dy = \int c_1\, dx; \qquad \frac{2y^{3/2}}{3} = c_1 x + c_2; \qquad y^{3/2} = \frac{3}{2}c_1 \cdot x + \frac{3}{2}c_2.$

Но так как c_1 *и* c_2 – произвольные постоянные, $\left(\frac{3}{2}\cdot c_1\right)$ *и* $\left(\frac{3}{2}\cdot c_2\right)$ – также произвольные постоянные. Поэтому полученный общий интеграл данного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y^{3/2} = c_1 \cdot x + c_2, \text{т.е. } \sqrt{y^3} = c_1 x + c_2, \text{ или } y = \sqrt[3]{(c_1 x + c_2)^2}.$$

Пример 7. Найти частное решение уравнения $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2$; $y'(0) = 2$. Применим подстановку $y' = p$; Тогда

$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Получим уравнение первого порядка:

$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p\cdot(y-1) = 0.$

Разделив уравнение на $p \neq 0$, получим

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y.$$

Это линейное уравнение первого порядка относительно функции p *от* y.

Решаем его подстановкой $p = u \cdot v$, *где* $u = u(y)$; $v = v(y)$.

$p' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v = 1 - y; \qquad v\cdot(u' - u) + u \cdot v' = 1 - y; \qquad u' - u = 0.$

$\frac{du}{dy} = u; \qquad \frac{du}{u} = dy; \qquad \int \frac{du}{u} = \int \mathrm{dy}.$

$\ln u = y; \quad u = e^y.$

$u \cdot v' = 1 - y; \qquad e^y \cdot v' = 1 - y;$

$v' = \frac{1-y}{e^y} = (1-y)\cdot e^{-y}; \qquad \frac{dv}{dy} = (1-y)\cdot e^{-y};$

$dv = (1-y)\cdot e^{-y} dy;$

$\int dv=\int(1-y)\cdot e^{-y}dy; \qquad v=\int(1-y)\cdot e^{-y}dy.$

Интеграл справа берем по частям с помощью подстановки

$1-y=t; \qquad dt=-dy; \qquad e^{-y}dy=ds; \qquad s=\int e^{-y}dy=-e^{-y}.$

Тогда $\int(1-y)\cdot e^{-y}dy=-(1-y)\cdot e^{-y}-\int e^{-y}dy=-(1-y)\cdot e^{-y}+e^{-y}+c_1.$

Таким образом, $v=e^{-y}-(1-y)\cdot e^{-y}+c_1.$

Тогда функция $p=e^{y}\cdot\left(e^{-y}-(1-y)\cdot e^{-y}+c_1\right)=1-(1-y)+c_1\cdot e^{y}=y+c_1\cdot e^{y}.$

Таким образом, $p=y+c_1\cdot e^{y}$, или $y'=y+c_1\cdot e^{y}.$

Найдем значение c_1 из начальных условий $y(0)=2, \quad y'(0)=2.$

$2=2+c_1\cdot e^2; \qquad c_1\cdot e^2=0; \qquad c_1=0.$

Таким образом $y'=y; \qquad \frac{dy}{dx}=y; \qquad dy=y\cdot dx; \qquad \frac{dy}{y}=dx.$

$\int\frac{dy}{y}=\int dx; \qquad \ln y=x+c_2, \qquad y=e^{x+c_2}=e^{x}\cdot e^{c_2}=c\cdot e^{x}.$

Заметим, что константа e^{c_2} может быть обозначена как c, т. к. c_2 – произвольная константа, e^{c_2} – тоже произвольная постоянная. Таким образом, $y=c\cdot e^{x}$.

Найдем c из первого начального условия $y(0)=2$:

$2=c\cdot e^{0}; \qquad c=2.$

Задачи для индивидуальных заданий

Тип 1

1. $y''\cdot\cos^2\frac{x-1}{2}=1$	11. $y'''=\frac{1}{x}$
2. $y''\cdot\sin^2\frac{x}{2}=2$	12. $y'''=x^2-\cos 2x$
3. $y''=\frac{3}{\cos^2 2x}$	13. $y''=x^2-e^{2x}$
	14. $y'''=x+12x^2-30x^4$
4. $y''=\frac{1}{2}\cdot\left(3x-\cos\frac{2}{3}x\right)$	15 $y''=12x^2-3^{2x}$
	16. $y'''=e^{2x}+12x^2-30x^4$

5. $y'' = x^2 - \cos 2x$ 6. $(1+2x)^3 \cdot y'' = 3$ 7. $y'' \cdot e^{-x} + 3 = 0$ 8. $y'' = \frac{1}{5} \cdot (x - 2\sin 3x)$ 9. $y'' = \sin \frac{x}{2} - x$ 10. $y'' - 2e^{-2x} = 0$	17. $y''' = 40x^2 - \sin 3x$ 18. $(1+3x)^3 \cdot y'' = 9$ 19. $y'' = \frac{4}{9} \cdot \left(6x - \cos \frac{2}{3}x\right)$ 20. $y''' = \sin \frac{x}{3} - x$ 21. $y'' \cdot e^{-2x} + 4 = 0$ 22. $y'' = \frac{4}{\sin^2 2x}$

Тип 2

1. $1 + \frac{y'}{x} = y''$ 2. $y'' + 1 = -\frac{y'}{x}$ 3. $x \cdot (y'' + 1) + y' = 0$ 4. $(3 + x) \cdot y'' + y' = 0$ 5. $x \cdot y'' - y' \cdot \ln \frac{y'}{x} = 0$	6. $x \cdot y'' - y' - x^2 = 0$ 7. $y' - x \cdot \ln x \cdot y'' = 0$ 8. $(1 + 2x^2) \cdot y' - xy'' = 0$ 9. $x \cdot y'' + y' = 0$ 10. $y' = -x y''$ 11. $x \cdot y'' - y' - x^2 = 0$

Тип 3

1. $y'' = 128y^3, y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = 1/(2\sqrt{2}).$

2. y''+2sinycos^{3}y=0, y(0)=0, y'(0)=1.

3. $y'' 32\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 4.$

4. $y'' = 98y^3, y(1) = 1, y' = 7.$

5. $y'' y^3 + 49 = 0, y(3) = -7, y'(3) = -1.$

6. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1, y(0) = \sqrt{2}/2, y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

7. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

8. $y'' y^3 + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2$

9. $y'' = 18\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 3.$

10. $4y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

Задача 5 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретический материал

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами формулируется следующим образом.

Теорема Коши. При любых начальных данных $(x_0; y_0; y_0')$ задача Коши имеет, причем единственное, решение, т.е. при любых начальных данных x_0, y_0, y_0' существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = x_0, y'(x_0) = y_0'$.

Определение. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1) образуют *фундаментальную систему решений*, если для любого x

$$W(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) \neq 0.$$

Определение. Выражение $W(x)$ называется определителем Вронского, или вронскианом, решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Известно, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$, и $y_3 = 5e^{2x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Доказать, что решение y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, а y_1 и y_3 не образуют.

Действительно $y_1' = 2e^{2x}$, $y_2' = e^x$, $y_3' = 5 \cdot 2e^{2x}$.

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_2:

$$W_1(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) = e^{2x} \cdot e^x - 2e^{2x} \cdot e^x = -e^{3x} \neq 0.$$

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_3:

$$W_2(x) = y_1(x) \cdot y_3'(x) - y_1'(x) \cdot y_3(x) = e^{2x} \cdot 10e^{2x} - 2e^{2x} \cdot 5e^{2x} =$$

$$= 10e^{4x} - 10e^{4x} = 0.$$

Вронскиан $W_1(x) \neq 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *образуют фундаментальную пару решений.*

Вронскиан $W_2(x) = 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_3(x)$ не образуют *фундаментальную пару решений.*

Теорема (о структуре общего решения). *Если два частных решения* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 –произвольные постоянные.

Выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Найдем решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать эти частные решения уравнения (1) в виде $y = e^{kx}$, где k=const; тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$.

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (1), получим $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$, т.е. $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$.

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{2}$$

Определение. Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для составления характеристического уравнения (2) достаточно в уравнении (2.12) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1.

Решив характеристическое уравнение по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, найдем его корни k_1 и k_2, а следовательно, и частные решения уравнения (1):

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}.$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны* .

В этом случае имеем два частных решения уравнения (1):

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{k_1 x}k_2 e^{k_2 x} -$$

$$-k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x}\left(k_2 - k_1\right) \neq 0,$$

т.е. $e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$ и $k_2 \neq k_1$.

Следовательно, в этом случае решение общего уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{3}$$

Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*: $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае непосредственно находим лишь одно частное решение: $y_1 = e^{kx}$.

Вторым частным решением является решение $y_2 = xe^{kx}$. Действительно,
$y_2' = \left(xe^{kx}\right) = x'e^{kx} + x\left(e^{kx}\right)' = e^{kx} + xke^{kx} = e^{kx}(1+kx)$,
$y_2'' = \left(e^{kx}\right)'(1+kx) + e^{kx}(1+kx)' = ke^{kx}(1+kx) + e^{kx}k = e^{kx}\left(2k + k^2 x\right)$.

Подставив выражение для y, y' и y'' в уравнение (1), получим

$$e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) + pe^{kx}(1+kx) + qxe^{kx} = e^{kx}\left(x\left(k^2 + pk + q\right) + 2k + p\right) = 0.$$

Так как k является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, корни квадратного трехчлена находятся по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\dfrac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Покажем, что $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{kx}e^{kx}(1+kx) =$$
$$= e^{2kx}[1 + kx - kx] = e^{2kx} \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{4}$$

Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные числа*:
$k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $p^2 - 4q < 0$.

Тогда $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{i^2\left(4q - p^2\right)}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Обозначив $a = \dfrac{-p}{2}$ и $b = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, получим $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi$ $\quad (b \neq 0)$
.

В этом случае $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$ являются решениями уравнения (1) и, вычисляя вронскиан, убедимся, что они составляют фундаментальную систему. Действительно,

$$y_1' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (\cos bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (-\sin bx) \cdot b =$$
$$= e^{ax} \cdot (a \cdot \cos bx - b \cdot \sin bx).$$

$y_2' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot (\sin bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot \cos bx \cdot b =$
$= e^{ax}(a \cdot \sin bx + b \cdot \cos bx).$

Подставим выражения для $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_2(x)$ и $y_2'(x)$ в вронскиан, получим
$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{ax} \cos bx\, e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx) -$
$- e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx) e^{ax} \sin bx = e^{2ax} \cos bx (a \sin bx + b \cos bx) -$
$- e^{2ax} \sin bx (a \cos bx - b \sin bx) = e^{2ax}\big(a \cos bx \sin bx + b \cos^2 bx -$
$- a \sin bx \cos bx + b \sin^2 bx\big) = e^{2ax} b \left(\cos^2 bx + \sin^2 bx\right) = e^{2ax} b \neq 0.$

При вычислении воспользовались основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Таким образом, общее решение уравнения (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид
$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$, или

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \qquad (5)$$

Образцы решения задач

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y'' + 7y' + 12y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 + 7k + 12 = 0$.

Корни найдем по формуле
$k_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2}$, откуда $k_1 = -3$ и $k_2 = -4$.

Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (2.14), получим общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$.

Дифференцируя общее решение, получим
$y' = C_1 e^{-3x}(-3) + C_2 e^{-4x}(-4) = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}$.

Согласно заданным начальным условиям имеем
$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{-4\cdot 0}, \\ -2 = -3C_1 e^{-3\cdot 0} - 4C_2 e^{-4\cdot 0}, \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ -2 = -3C_1 - 4C_2, \end{cases}$

или $\begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ -2 = -3C_1 - 4(1 - C_1), \end{cases}$ или $\begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ 2 = C_1, \end{cases}$ откуда
$C_1 = 2$ и $C_2 = -1$. Таким образом, искомым частным решением является функция $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}$.

Пример 2. Найти решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 - k - 6 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, откуда $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$. Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (2), получим общее решение $y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-2x}$.

Пример 3. Найти решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 + 8k + 16 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = \dfrac{-8 \pm 0}{2} = -4$, откуда $k_1 = k_2 = -4$. Подставляя найденные значения k в формулу (3), получим общее решение $y = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$.

Пример 4. Найти решение уравнения $y'' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0$

$k^2 = -9$; $\quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm 3 \cdot i$. Уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2} = \pm 3i \quad (a = 0; \quad b = 3)$.

По формуле (4) общим решением будет

$$y = e^{0x}(C_1 \cdot \cos\ 3x + C_2 \sin\ 3x),$$

или $y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x$.

Пример 5. Найти частное решение уравнения $y'' - 6y' + 10y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 10 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 10}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$.

$(a = 3; \quad b = 3)$.

По формуле (4) общим решением будет

$$y = e^{3x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x).$$

Дифференцируя общее решение, получим

$y' = 3e^{3x}(C_1 \cdot \cos x + C_2 \sin x) + e^{3x}(-C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$.

Подставив начальные условия $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$ получим систему для определения C_1 *и* C_2:

$$\begin{cases} 1 = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ 3 = 3 \cdot e^0 (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0), \\ 3 = 3 \cdot 1(C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) + 1(-C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 = C_1; & C_1 = 1. \\ 3 = 3C_1 + C_2; & C_2 = 0. \end{cases}$$

Подставив полученные значения $C_1 = 1,\ \ C_2 = 0$ в общее решение, получим $y = e^{3x} \cdot \cos x$ – искомое частное решение.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$. Заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1. $k^2 + pk + q = 0\ (*)$. Найти $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.		
Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны*	$k_2 \neq k_1$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*	$k_1 = k_2 = k$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные*:	$p^2 - 4q < 0$ Введем $i^2 = -1$. Тогда $p^2 - 4q = i^2(4q - p^2)$ или $k_{1,2} = a \pm bi$	$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Задачи для индивидуальных заданий

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

1. а) $y'' + 5y' + 6y = 0$, если $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;
   б) $y'' + 16y = 0$;
   в) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

2. а) $y'' - 2y' = 0$, если $y(0) = \dfrac{3}{2},\ y'(0) = 1$;
   б) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
   в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

3. а) $y'' + 8y' + 15y = 0$, если $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;
   б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

4 .а) $y'' + 3y' = 0$;

б) $y'' + 9y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$;

в) $y'' + 12y' + 36y = 0$.

5. а) $y'' + 14y' + 49y = 0$;

б) $y'' + 4y' = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

6. а) $y'' + 4y = 0$;

б) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

в) $y'' - 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$.

2.7. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' + 16y = 0$.

8. а) $y'' + 2y' + 5 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' - 2y = 0$;

в) $y'' - 14y' + 49y = 0$.

9. а) $y'' - y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 64y = 0$;

в) $y'' - 20y' + 100y = 0$.

10.а) $y'' - 8y' + 20y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$;

б) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

в) $y'' - 2y' + y = 0$.

11. а) $y'' + 3y' - 4y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.

12. а) $y'' - 9y' + 14y = 0$;

б) $y'' - y = 0$;

в) $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

13. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 9y = 0$;

в) $y'' + 22y' + 121y = 0$.

14. а) $y'' - y = 0$;

б) $y'' - 6y' + 45y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

15. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 2y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + y = 0$.

16. а) $y'' + 6y' + 8y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$.

17. а) $y'' + 4y' + 8y = 0$;

б) $y'' - 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;

в) $9y'' + 6y' + 1 = 0$.

18. а) $y'' - y' - 2y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

б) $16y'' + 8y' + y = 0$;

в) $y'' + 25y = 0$.

19. а) $y'' - 8y' + 7 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $25y'' - 10y' + y = 0$.

20. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $49y'' + 14y' + y = 0$;

в) $y'' + 121y = 0$.

21. а) $y'' + 2y' - y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = y(0)' = 1$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

22. а) $2y'' - 3y' - 5y = 0$;

б) $y'' + 4y = 0$, если $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$;

в) $64y'' - 16y' + y = 0$.

23. а) $y'' + 6y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 81y = 0$;

в) $4y'' + 4y' + y = 0$.

24. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 4y = 0$;

в) $16y'' + 8y' + y = 0$.

25. а) $y'' + y' = 0$, если $y(0) = y(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + 26y' + 169y = 0$3.25.

Задача 6 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретический материал

Линейное неоднородное уравнение отличается от однородного функцией в правой части. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \tag{1}$$

а соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Сформулируем теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения (1).

Теорема (о структуре общего решения). Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть y – общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$,

$y_ч$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Тогда

$$y = y_0 + y_ч.$$

Таким образом, основная задача при решении неоднородного линейного дифференциальные уравнения второго порядка состоит в нахождении какого-либо частного решения.

Укажем один из методов нахождения частного решения неоднородного уравнения, когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид. К таким функциям $f(x)$ относятся следующие функции: экспонента $e^{\alpha x}$ $(\alpha = \mathrm{const})$; многочлены n-й степени относительно переменной x $P_n(x)$; тригонометрические функции $\cos nx$; $\sin nx$, а также их произведения.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод иначе называется методом подбора частного решения $y_ч$ – уравнения (1) по виду правой части $f(x)$.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1) *имеет вид* $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, т. е. представляет собой произведение экспоненты на многочлен, где α – const; $P_n(x)$ – многочлен n-й относительно x. В этом случае уравнение примет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}. \tag{2}$$

Тогда возможны следующие варианты.

1)Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$– многочлен той же степени, что и данный многочлен $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2)Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с одним корнем характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x$.

3)Число α есть двукратный корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^2$. Неизвестные (неопределенные) коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим из условия, что функция $y_ч$ является решением уравнения (2.18), т. е. удовлетворяет этому уравнению.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (1) имеет вид

$$f(x) = M\cdot\cos\beta x + N\cdot\sin\ \beta x,$$

где M *и* N – постоянные числа. Тогда вид частного решения $y_ч$ определяется следующим образом.

а) Если число βi не есть корень характеристического уравнения , то частное решение $y_ч$ имеет вид

$$y_ч = A\cdot\cos\ \beta x + B\cdot\sin\ \beta x,$$

где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты.

б) Если число βi есть корень характеристического уравнения, то

$$y_ч = \left(A\cdot\cos\ \beta x + B\cdot\sin\ \beta x\right)\cdot x.$$

Сделаем важное замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos\ \beta x$ или только $\sin\ \beta x$, следует искать частное решение в том виде, в каком оно было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos\ \beta x$ или $\sin\ \beta x$, не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

<table>
<tr><td colspan="3">Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$, $y = y_ч + y_o$,
y_o – решение однородного уравнения,
$y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Случай 1.
$f(x) = P_n(x)\cdot e^{ax}$</td><td>$a \ne k_1, a \ne k_2$</td><td>$y_ч = Q_n(x)\cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>$a = k_2 \ne k_1$</td><td>$y_ч = x\cdot Q_n(x)\cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>$a = k_2 = k_1$</td><td>$y_ч = x^2\cdot Q_n(x)\cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>Случай 2.</td><td colspan="2">$z=a+bi$ не является корнем характеристического уравнения (*)</td></tr>
</table>

$f(x)=e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx+Q_n\sin bx\right)$	$y_ч=e^{ax}\left(S_n(x)\cos bx+T_n(x)\sin bx\right)$
	$z=a+bi$ является корнем характеристического уравнения (*) $y_ч=xe^{ax}\left(S_n(x)\cos bx+T_n(x)\sin bx\right)$

Рассмотрим примеры, на которых покажем не только принцип применения метода, но и *порядок оформления* решения.

Образцы решения задач

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''+7y'+12y=24x^2+16x-15.$$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2+7k+12=0.$$

$$k_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{-7\pm1}{2}.$$

$$k_1=-3; \qquad k_2=-4.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$:

$$y_0=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{-4x}.$$

3) Запишем формулу, по которой следует искать частное решение $y_ч$ данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x)=24x^2+16x-15$ с общим видом правой части:

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x).$$

$24x^2+16x-15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; –15.

В данном случае показательная функция $e^{\alpha x}=1$, т. е. $\alpha=0$. Так как $\alpha=0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $(k_1=-3;\ \ k_2=-4)$, частное решение нужно искать в виде $y_ч=Ax^2+Bx+C$.

$Q_n(x)=Ax^2+Bx+C-$ многочлен второй степени $(n=2)$, неизвестные (неопределенные) коэффициенты *A, B, C* этого многочлена нужно найти, подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в данное уравнение.

4) Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 12 & y_ч=Ax^2+Bx+C; \\ 7 & y_ч'=2Ax+B; \\ 1 & y_ч''=2A. \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$, чтобы получить левую часть уравнения $y''+7y'+12y=24x^2+16x-15$. В левой части получим многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 12A = 24; \\ x^1 & 14A + 12B = 16; \\ x^0 & 2A + 7B + 12C = -15. \end{array}\right\}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами *A, B, C*.

Решив ее, найдем $A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1.$

Частное решение: $y_ч = 2x^2 - x - 1.$

5) Общее решение данного уравнения:

$$y = y_0 + y_ч,$$

или

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x} + 2x^2 - x - 1.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + k - 2 = 0, \qquad k_1 = -2; \quad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

3)Сравним правую часть данного дифференциального уравнения $f(x) = 3e^x$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отметим, что $\alpha = 1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения; многочлен – число 3 – нулевой степени, т. е. $n = 0$. Поэтому частное решение $y_ч$ следует искать в виде $y_ч = A \cdot e^x \cdot x$.

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_ч = A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_ч' = A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_ч'' = A \cdot e^x + A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x. \end{array}$$

Подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x + A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x - 2A \cdot e^x \cdot x = 3e^x,$$

или

$$3A \cdot e^x = 3e^x,$$

откуда $A = 1$. Частное решение: $y_ч = x \cdot e^x$.

5) Искомое общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^x + x \cdot e^x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - y = x \cdot e^{-x}$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 1 = 0; \qquad k_1 = -1; \qquad k_2 = 1.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x.$$

3)Сравним правую часть данного уравнения $f(x) = x \cdot e^{-x}$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отмечаем, что $\alpha = -1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения и многочлен *x* степени $n = 1$. Поэтому частное решение следует искать в виде $y_ч = (Ax + B) \cdot x \cdot e^{-x}$.

4) Так как требуется найти $y_ч, y_ч', y_ч''$, удобнее записать $y_ч$ в виде $y_ч = \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^{-x}$.

Запишем $y_ч, y_ч', y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} -1 & y_ч = \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^{-x}, \\ 0 & y_ч' = (2Ax + B) \cdot e^{-x} - \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^{-x}, \\ 1 & y_ч'' = 2A \cdot e^{-x} - (2Ax + B) \cdot e^{-x} - (2Ax + B) \cdot e^{-x} + \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^{-x}. \end{array}$$

Подставим выражения $y_ч, y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное уравнение. Получим равенство

$$2A \cdot e^{-x} - 2(2Ax + B) \cdot e^{-x} + \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^{-x} - \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x}.$$

Разделим уравнение на $e^{-x} \neq 0$ и упростим:

$$2A - 2(2Ax + B) = x,$$
$$2A - 4Ax - 2B = x.$$

$$\left.\begin{array}{c|c} x^1 & -4A = 1; \\ x^0 & 2A - 2B = 0, \end{array}\right\} \qquad \begin{cases} A = -1/4; \\ B = -1/4. \end{cases}$$

Частное решение: $y_ч = -\dfrac{1}{4}\left(x^2 + x\right) \cdot e^{-x}$.

5)Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x - \frac{1}{4}\left(x^2 + x\right) \cdot e^{-x}.$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 + 3k + 2 = 0;$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}.$$

$k_1=-1;\qquad k_2=-2.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$:

$$y_0=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-2x}.$$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x)=4\sin 3x+2\cos 3x$ с $f(x)=M\cdot\cos\beta x+N\cdot\sin\beta x$. Здесь $M=2,\quad N=4;\ \alpha=0,\quad \beta=3.$ Так как числа $\pm\beta i=\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде $y_ч=A\cdot\cos 3x+B\cdot\sin\ 3x.$

4) Найдем $y_ч'$, $y_ч''$ и запишем столбиком

$$\begin{array}{c|l} 2 & y_ч=A\cdot\cos\ 3x+B\cdot\sin 3x, \\ 3 & y_ч'=-3A\cdot\sin 3x+3B\cdot\cos 3x, \\ 1 & y_ч''=-9A\cdot\cos 3x-9B\cdot\sin\ 3x. \end{array}$$

Подставив эти выражения в данное дифференциальное уравнение, получим
$-9A\cdot\cos\ x-9B\cdot\sin\ 3x-9A\cdot\sin\ 3x+9B\cdot\cos 3x+2A\cdot\cos\ 3x+2B\cdot\sin\ 3x=$
$=4\sin\ 3x+2\cos\ 3x$ или
$\sin\ 3x\cdot(-7B-9A)+\cos\ 3x\cdot(-7A+9B)=4\sin\ 3x+2\cos\ 3x.$

Приравниваем коэффициенты при $\sin\ 3x$ и $\cos\ 3x$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} \sin\ 3x & -7B-9A=4; \\ \cos\ 3x & -7A+9B=2, \end{array}\Bigg\}$$

$$A=-\frac{5}{13};\qquad B=-\frac{1}{13}.$$

Частное решение: $y_ч=-\dfrac{5}{13}\cos\ 3x-\dfrac{1}{13}\sin 3x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-2x}-\frac{5}{13}\mathrm{cox}\ 3x-\frac{1}{13}\sin\ 3x.$$

Пример 5. Решить уравнение $y''+2y'+5y=2\cos x.$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:
$k^2+2k+5=0;$

$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i\ (a=-1;\quad b=2).$$

2)По формуле (2.16) общим решением будет

$$y_0=e^{-x}\cdot(C_1\cdot\cos\ 2x+C_2\cdot\sin\ 2x).$$

3)Сравним правую часть уравнения $f(x)=2\cos\ x$ с $f(x)=M\cdot\cos\ \beta x+N\cdot\sin\ \beta x.$

Здесь $M = 2$, $N = 0$; $\beta = 1$. Числа $\pm\beta i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде

$$y_ч = A \cdot \cos\ x + B \cdot \sin\ x.$$

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} 5 & y_ч = A\cos\ x + B\sin\ x, \\ 2 & y_ч' = -A\sin x + B\cos\ x, \\ 1 & y_ч'' = -A\cos\ x - B\sin\ x. \end{array}$$

Подставив $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в уравнение, получим

$-A\cos\ x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos\ x + 5A\cos\ x + 5B\sin\ x = 2\cos\ x,$

или $\sin x \cdot (4B - 2A) + \cos x \cdot (4A + 2B) = 2\cos x.$

Задачи для индивидуальных заданий

Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, используя метод подбора коэффициентов частного решения (метод неопределенных коэффициентов)

3.1. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x) \cdot e^{3x}$.

3.2. $y'' - 4y' + 4y = x \cdot e^{2x}$.

3.3. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-3x}$.

3.4. $9y'' + 24y' + 16y = -5x \cdot e^{3x}$.

3.5. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.

3.6. $y'' - 3y' + 2y = x \cdot e^{x}$.

3.7. $y'' - 3y' + 2y = 10 \cdot e^{-x}$.

3.8. $y'' - 2y' + y = x^3$.

3.9. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-2x}$.

3.10. $y'' + y' = 3 \cdot e^{-x} + 2x$.

3.11. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.

3.12. $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x)$.

3.13. $y'' + y' - 2y = x^2 \cdot e^{4x}$.

3.14. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

3.15. $y'' - y' = x + 2$.

3.16. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

3.17. $y'' + 6y' + 34y = 5x^2$

3.18. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x)$.

3.19. $y'' + 2y' + y = x^2 + x - 1$.

3.20. $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x)$.

3.21. $y'' - y' = 2x + 3$.

3.22. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$

3.23. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.

3.24. $3y'' + y' = 6x - 1$.

3.25. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 2x$.