## §2. Несобственные интегралы

### *1. Интеграл с бесконечными пределами.*

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $a < b < \infty$, то полагают

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.7)$$

Интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если существует предел правой части равенства (2.7), и называется ***расходящимся***, если указанный предел не существует. Аналогично, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $-\infty < a < b$, то полагают

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2.8)$$

Наконец, если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$ числовой оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.9)$$

Сходимость или расходимость несобственных интегралов часто устанавливается с помощью следующих признаков сходимости [9]:

интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ $(a>0)$:

а) сходится, если

$$|f(x)| \le \frac{M}{x^m} \text{ и } m>1, \qquad (2.10)$$

б) расходится, если

$$|f(x)| \ge \frac{M}{x^m} \text{ и } m\le 1. \qquad (2.11)$$

Здесь $M$ и $m-$постоянные.

**Пример 1.** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.

**Решение.** По определению (2.8) имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}-(-1)\right] = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} + \lim_{b\to\infty}1 =$$
$$=0+1=1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

**Пример 2.** $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x}$; $(a>1)$.

**Решение.** По определению (2.8) имеем

$$\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln b-\ln a\right)=\infty-\ln a=\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

**Пример 3.** Установить сходимость или расходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx$.

**Решение.** Так как $\left|\cos x\right|\le 1$, то $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$, т.е. подынтегральная функция удовлетворяет неравенству (2.11) при $m=3>1$ и $M\le 1$. Следовательно, интеграл сходится.

## *2.Интегралы от неограниченных функций*

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a<x<b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)dx=\infty$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (2.12)$$

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если существует предел в правой части равенства (2.12), и называется ***расходящимся***, если указанный предел не существует.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющий бесконечный разрыв в правом конце отрезка $[a;b]$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^b f(x)dx;\ (\varepsilon>0). \qquad (2.13)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a\le x<c$, $c<x\le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx,\ (\varepsilon>0). \qquad (2.14)$$

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если оба предела в правой части равенства (2.14) существуют, и называется ***расходящимся***, если хотя бы один из указанных пределов не существует.

На практике для решения вопроса о сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций часто используются следующие ***признаки сходимости***.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в одном из концов интегрирования $(a;b)$, например в точке $x=a$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$:

а) сходится, если

$$|f(x)| \le \frac{M}{(x-a)^m} \text{ и } m<1; \tag{2.15}$$

б) расходится, если

$$|f(x)| \ge \frac{M}{(x-a)^m} \text{ и } m \ge 1. \tag{2.16}$$

Здесь $M$ и $m-$постоянные.

Если же $f(x)$ имеет разрыв во внутренней точке $x=c$ интервала $(a;b)$, то интеграл разбивают на два; от $a$ до $c$ и от $c$ до $b$ и применяют указанные признаки к каждому из полученных интегралов.

**Пример 4.** $\int\limits_6^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

**Решение.** Функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывна при $0<x\le 1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$.

Поэтому в силу равенства (2.12)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_\varepsilon^1 = \lim 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2 - 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon} = 2-2\cdot 0 = 2.$$

Значит, интеграл сходится и равен 2.

**Пример 5.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Решение.** Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна при $0\le x<1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$.

Поэтому в силу равенства (2.12) имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin 0 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

**Пример 6.** $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

**Решение.** Функция $\frac{1}{(x-1)^2}$ непрерывна при $0 \le x < 1$ и $1 < x \le 3$, т.к. $\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$ и $\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$. Значит, в точке $x = 1$ функция имеет бесконечный разрыв. Поэтому в силу равенства (2.14) имеем

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-2}\,d(x-1) + \int_{1+\varepsilon}^3 (x-1)^{-2}\,d(x-1)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\Big|_0^{1-\varepsilon} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\Big|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{-1}{1-\varepsilon-1} - \frac{-1}{0-1}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{-1}{3-1} - \frac{-1}{1+\varepsilon-1}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{-\varepsilon}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{-1}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{1}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} = \infty - \frac{3}{2} + \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

**Пример 7.** $\int_0^5 \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$.

**Решение.** Функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$, т.к. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$. Но для $x > 0$ $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{\sqrt{x}}$, т.к. $|\cos x| < 1$. Значит, эта функция удовлетворяет неравенству (2.14) при $m = \frac{1}{2} < 1$ и $M = 1$.