§1. Физико-техническое применение определённого интеграла

1. Применение определённого интеграла к вычислению работы.

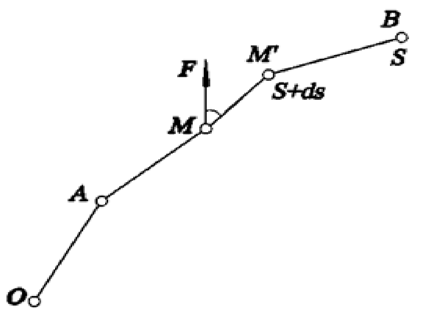

Рис.

Из элементарной механики известно, что если сила, приложенная к движущейся точке *M,* сохраняет постоянную величину и постоянный угол с направлением перемещения точки, то работа A этой силы на перемещении s точки выразится произведением

$$F\cos(F, s)\cdot s,$$

где $(F,\ s)$ обозначает угол между направлениями силы и перемещения точки. Произведение

$$F_s = F\cos(F, s),$$

очевидно, представляет собой проекцию силы F на перемещение s; вводя эту проекцию, можно выражение для работы представить в виде

$$A = F_s\cdot s.$$

Если направление силы совпадает с направлением перемещения точки, то

$$A = F\cdot s,$$

в случае же, когда оба направления прямо противоположны,

$$A = -F\cdot s.$$

Вообще говоря, и величина силы F и её угол (F, s) с направлением перемещения могут не оставаться постоянными. При непрерывном изменении хоть одной из этих величин для выражения величины работы приходится прибегнуть снова к определенному интегралу.

Пусть путь s, проходимый точкой, будет независимой переменной: при этом предположим, что начальному положению A нашей точки M соответствует значение, а конечному B - значение $s = S$ (рис. 3.1). Каждому значению s в промежутке $(s_0,\ S)$ отвечает определенное положение движущейся точки, а также определенные значения величин F и $\cos(F, s)$, которые, таким образом, можно рассматривать как функции от s. Взяв точку M в каком-нибудь ее положении, определяемом значением s пути, найдем теперь приближённое выражение для элемента работы, соответствующего приращению ds пути, от s до $s+ds$, при котором точка M перейдет в близкое положение M' (см. рис. 3.1). В положении M на точку действует определенная сила F под определенным углом (F, s); так как изменение этих величин при переходе точки из M в

M' - при малом ds - также мало, пренебрежем этим изменением и, считая величину силы F и угол (F, s) приближенно постоянными, найдем для элемента работы на перемещении ds выражение

$$dA = F\cos(F, s)ds,$$

так что вся работа A представится интегралом

$$A = \int_{S_0}^{S} F\cos(F, s)ds. \tag{3.1}$$

Из этого общего выражения для работы силы F ясно, что при $(F, s) = \dfrac{\pi}{2}$ работа обращается в нуль; действительно, при этом cos (F, s)=0, так что подынтегральная функция оказывается нулем. Таким образом, сила, перпендикулярная к направлению перемещения, механической работы не производит. Если направление силы совпадает с направлением перемещения, то cos (F, s)=1 и формула (3.1) примет вид

$$A = \int_{S_0}^{S} Fds. \tag{3.2}$$

Пример 1. Материальная точка M движется по координатной прямой под действием силы, величина которой меняется прямо пропорционально расстоянию точки до начала координат O. Известно, что направление силы совпадает с направлением оси и что она равнялась 1 Н, когда расстояние MO было 3 м. Вычислить работу этой силы по переносу точки на расстояние 15 м от начала координат.

Решение. Из условия задачи следует, что сила $F(x)$ действующая на точку, меняется по закону $F(x) = kx$, где коэффициент пропорциональности k определяется из уравнения

$$9{,}8 \cdot 3 = k \cdot x.$$

Откуда

$$k = \frac{9{,}8 \cdot 3}{0{,}04}$$

$$F(x) = \frac{9{,}8 \cdot 3}{0{,}04}x.$$

Таким образом, $F(x)=x/3$ и работа силы на пройдённом пути согласно формуле (3.2) равна

$$A = \int_0^{15} \frac{x}{3}ds = \left.\frac{x^2}{6}\right|_0^{15} = \frac{15^2}{6} \approx 37{,}5\,\text{Дж}.$$

Пример 2. Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы выкачать воду из цилиндрического резервуара, высота которого h = 140 м, а радиус основания r = 3 м.

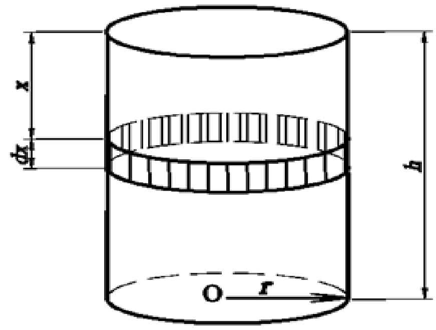

Рис. 3.2

Решение. Работа, необходимая для поднятия тела, сила тяжести которого P, на высоту h, определяется по формуле $A = Ph$. Слои воды в резервуаре находятся на разной глубине, поэтому высота поднятия для разных слоев различна.

Если выделить из всей массы воды бесконечно тонкий слой, то можно считать, что вода этого слоя находится на одной глубине. Обозначим глубину слоя через x, а толщину – через dx (рис. 3.2). Площадь основания слоя

$$S = \pi r^2 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Следовательно, объем такого бесконечно тонкого слоя равен

$$\pi r^2\, dx \text{ (м}^3\text{)},$$

сила тяжести его

$$P = 9806{,}65\, \pi r^2\, dx \text{ (Н)},$$

где 9806,65 Н/м^3 – удельный вес воды. Работа, необходимая для поднятия тела на высоту x, равна

$$x \cdot 9806{,}65\, \pi r^2\, dx \text{ (Дж)}.$$

Работа, затрачиваемая на выкачивание всей воды из резервуара, определяется суммой бесконечно большого числа таких выражений, причем глубина слоя меняется от $x = 0$ до $x = h$. Итак, окончательно имеем

$$A = \int_0^h 9086{,}65 \pi r^2 x dx = 9086{,}65 \pi r^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h \approx$$

$$\approx \frac{9086{,}65 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 25}{2} \approx$$

$$\approx 3\,464\,189{,}1 \text{Дж} \approx 3{,}46 \text{ МДж}.$$

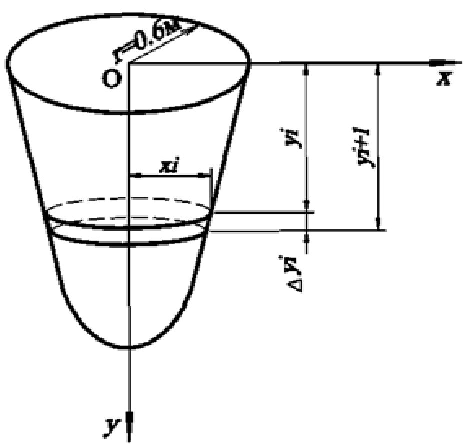

Рис. 3.3

Пример 3. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферы, радиус которой r = 0,6 м (рис. 3.3).

Решение. Разбиваем объем полусферы плоскостями, параллельными основанию, на элементарные объемы высотой Δy_i. Элементарный слой будем считать цилиндрическим с переменным радиусом основания x_i, следовательно, объем такого слоя приближенно равен $\Delta y_i \pi x_i^2$. Сила тяжести воды в этом объеме приближенно равна

$$P \approx 9086{,}65\pi x_i^2 \Delta y_i \,(\text{Н}),$$

где 9806,65 Н/м^3 –удельный вес воды. Работа, затрачиваемая для подъема этой массы воды с глубины y_i, приближенно равна

$$\Delta A \approx 9086{,}65\pi x_i^2 y_i \Delta y_i \,(\text{Дж}).$$

Сечением полусферы в плоскости xOy является полуокружность

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Поэтому $x_i^{\,2} = r^2 - y_i^{\,2}$. Подставляем последнее равенство в выражение элементарной работы:

$$\Delta A \approx 9086{,}65\pi \left(r^2 - y_i^{\,2}\right) y_i \Delta y_i .$$

Просуммируя все элементарные работы, получим

$$\Delta A \approx 9086{,}65\pi \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - y_i^{\,2}\right) y_i \Delta y_i .$$

Переходя к пределу, имеем

$$\Delta A = 9086{,}65\pi \int_0^r \left(r^2 - y^2\right) y\,dy = 9086{,}65\pi \left(r^2 \int_0^r y\,dy - \int_0^r y^3\,dy \right) =$$

$$= 9086{,}65\pi \left(r^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^r = 9086{,}65\pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = 2451{,}66\pi r^4.$$

В результате подстановки числовых значений получаем

$$\Delta A = 2451{,}66\pi r^4 \approx 997{,}8\,\text{Дж} \approx 1\,\text{кДж}.$$

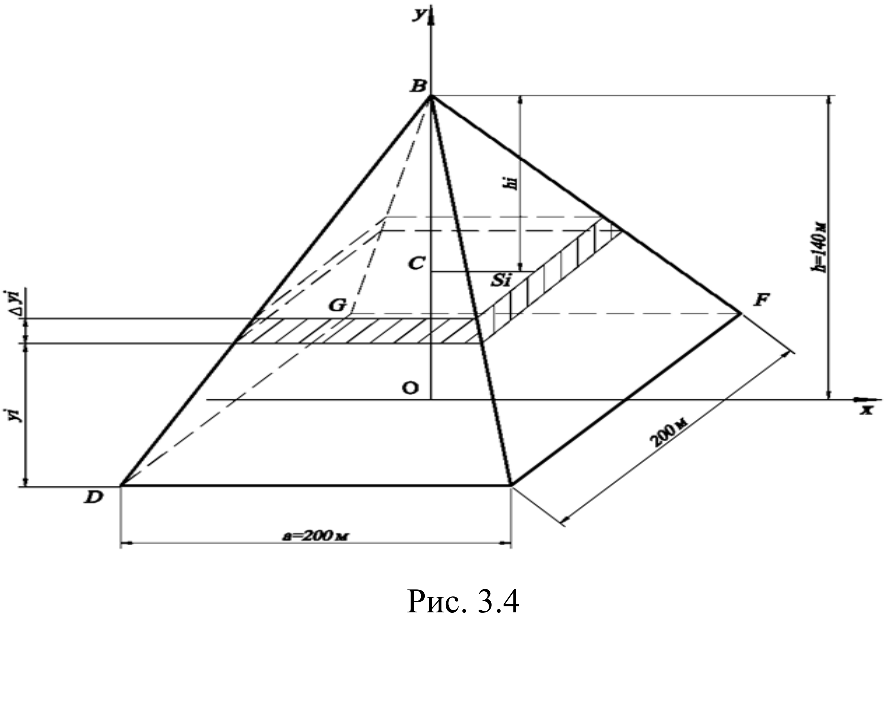

Рис. 3.4

Пример 4. Вычислить работу, которую необходимо затратить на преодоление силы тяжести при постройке квадратной пирамиды высотой h=140 м с квадратным основанием, a = 200 м (рис. 3.4). Удельный вес камня γ = 24517 Н/м^3, или 24,5 кН/м^3.

Решение. Разобьем высоту пирамиды h на элементарные промежутки $[0, y_1,)$, $[y_1, y_2)$, ..., $[y_i, y_{i+1})$, ..., $[y_{n\text{-}1}, H]$ и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию пирамиды. Таким образом, пирамида разбивается на элементарные слои высотой Δy_i (i = 0, 1, 2, . . ., n–1). Выделенный слой (на рис. 3.5 заштрихован) будем считать прямой призмой с площадью основания S_i. Элементарная работа, которую необходимо затратить на поднятие камня на высоту y_i, чтобы заполнить им элементарный слой высотой $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, произведению силы тяжести тела на высоту подъема, т. е.

$$\Delta A \approx \gamma S_i y_i \Delta y_i\,,$$

где y_i –высота подъема камня до слоя S_i, y_i – удельный вес камня. Так как пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то площади сечения и основания относятся как квадраты их расстоянии от вершины

$$\frac{S_i}{S_{\text{осн}}} = \frac{h_i^2}{h^2}\,.$$

Поскольку

$$S_{\text{осн}} = a^2\,, h_i = h - y_i\,,$$

то

$$S_i = \frac{a^2 (h - y_i)^2}{h^2}\,.$$

Подставляя это выражение в формулу работы, получим

$$\Delta A_i = \gamma \frac{a^2}{h^2} y_i (h - y_i)^2 \Delta y_i\,.$$

Переходя к пределу элементарных работ, находим

$$\Delta A = \gamma \frac{a^2}{h^2} \int_0^h y(h-y)^2\, y dy = \gamma \frac{a^2}{h^2} \int_0^h \left(h^2 y - 2hy + y^2\right) dy =$$

$$= \gamma \frac{a^2}{h^2} \left(h^2 \frac{y^2}{2} - 2h \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^h = \gamma \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{h^4}{2} - 2\frac{h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right) = \gamma \frac{a^2 h^2}{12}\,.$$

Окончательно получим

$$A = \gamma \frac{a^2 h^2}{12} = \frac{24517 \cdot 40000 \cdot 19600}{12} \approx 1601777000\ 000 \text{ Дж} \approx 1602 \text{ ГДж}\,.$$

В качестве применения определённого интеграла в физике рассмотрим вывод формулы кинетической энергии движущейся точки.

Если действующую на точку силу F разложить (по правилу параллелограмма) на две составляющие – по касательной к пути, т. е. по направлению перемещения, и по нормали к нему, то, согласно сказанному, работу будет производить лишь касательная составляющая

$$F_s = F\cdot\cos(F, s).$$

Положим теперь, что F есть равнодействующая всех приложенных к точке сил; тогда, по закону движения Ньютона, касательная составляющая F_s равна произведению массы m точки на её ускорение a, и выражение для работы A можно написать в виде

$$A = \int_{s_0}^{S} mads. \qquad (3.3)$$

Вспомним теперь, что

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ и } v = \frac{ds}{dt}, \text{ так что } a = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot v,$$

где через v_0 и V обозначены величины скорости, соответственно, в конечной и начальной точках пути.

Как известно, $\frac{1}{2}mv^2$ – есть живая сила, или кинетическая энергия точки; таким образом, мы пришли к важному предложению: *механическая работа A, произведенная силой, под действием которой происходило движение точки, равна приращению кинетической энергии точки.* (Разумеется, работа A и приращение кинетической энергии могут одновременно оказаться и отрицательными.) Этот принцип, который можно распространить и на системы материальных точек, и на сплошные тела, играет в механике и физике очень важную роль. Его называют «законом живой силы».

2. Деформация спиральной пружины

Рассмотрим применение полученной формулы (3.2) к вычислению работы растяжения (или сжатия) пружины с укрепленным одним кондом (рис. 3.5); с этим приходится иметь дело, например, при расчете буферов у железнодорожных вагонов.

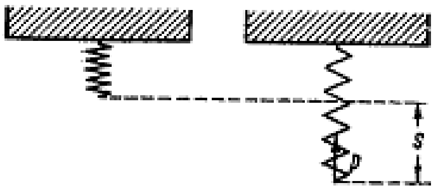

Рис. 3.5

Известно, что растяжение s пружины (если только пружина не перегружена) создаст натяжение $p,$ по величине пропорциональное растяжению, так что $p = cs,$ где с – некоторая постоянная, зависящая от упругих свойств пружины («жесткость» пружины). Сила, растягивающая пружину, должна преодолевать это натяжение. Если учитывать только ту часть действующей силы, которая на это затрачивается, то ее работа при возрастании растяжения от 0 до S выразится так:

$$A = \int_0^S csds = c\int_0^S sds = c \cdot \left.\frac{s^2}{2}\right|_0^S = \frac{cS^2}{2}. \qquad (3.4)$$

Обозначив через P наибольшую величину натяжения (или преодолевающей ее силы), соответствующую растяжению S пружины (и равную cS), мы можем представить выражение для работы в виде

$$A = \frac{PS^2}{2}.$$

Если бы к свободному концу пружины сразу была приложена сила P (например, подвешен груз), то на перемещении S ею была бы произведена вдвое большая работа PS. Как видим, лишь половина её затрачивается на растяжение пружины; другая половина пойдет па сообщение пружине с грузом кинетической энергии.

Пример 5. Вычислить работу растяжения на 0,001м медной проволоки длиной 1м с радиусом сечения 2 мм.

Решение. Сила F натяжения проволоки длиной l м и площадью сечения S мм^2 при удлинении ее на x м определяется формулой $F = E\dfrac{Sx}{l}$, где E – модуль упругости. Для меди можно принять

$$E = 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2.$$

Тогда $F = 1{,}2 \cdot 10^5 \dfrac{\pi 2^2 x}{1} = 480\,000\pi x$. По формуле (3.8), учитывая, что направление силы совпадает с направлением перемещения, получим

$$A = \int_0^{0{,}001} 480\,000\pi x dx = 480\,000\pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0{,}001} = 0{,}24\text{Дж}.$$

Пример 6. Груз массой в 3 кг растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу он при этом совершает?

Решение. Из условия задачи следует, что сила $F(x)$, действующая на точку, меняется по закону $F(x) = kx,$ где коэффициент пропорциональности k определяется из уравнения

$$9{,}8\cdot 3 = k\cdot x.$$

Откуда

$$k = \frac{9{,}8\cdot 3}{0{,}04}.$$

Таким образом,

$$F(x) = \frac{9{,}8\cdot 3}{0{,}04}x$$

и работа силы на пройдённом пути согласно формуле (3.8)равна

$$A = \int_0^{0{,}04} \frac{9{,}8\cdot 3}{0{,}04} x dx = \frac{9{,}8\cdot 3}{0{,}04}\cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}04} = 0{,}59\,\text{Дж}.$$

4. Путь, пройденный телом

Скорость поступательно движущегося тела определяется по формуле $v = \frac{ds}{dt}$, откуда $ds = vdt$. При неравномерном движении скорость v есть известная функция времени:

$$v = v(t).$$

Путь s, пройденный телом за время $t_2 – t_1$, определяется так:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Пример 8. Скорость движущегося тела задана формулой $v = \sqrt{1+t}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения.

Решение. В данном случае $t_1 = 0$, $t_2 = 10$с и путь, пройденный телом за 10 с, равен

$$s = \int_0^{10} \sqrt{1+t}\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3}\Big|_0^{10} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{11^3} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(11\sqrt{11} - 1\right) =$$

$$\approx 23{,}65\,\text{м}.$$

Пример 9. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $v = 39{,}2 – 9{,}8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

Решение. Тело достигнет наибольшей высоты подъема в момент времени t, когда скорость v равна нулю, т. е.

$$39{,}2 – 9{,}8t = 0,$$

откуда $t = 4$ с. Следовательно, наибольшая высота подъема

$$h=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt=\int_0^4 (39{,}2-9{,}8t)dt=39{,}2\int_0^4 dt-9{,}8\int_0^4 tdt=\left(39{,}2t-9{,}8\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=39{,}2\cdot 4-9{,}8\frac{16}{2}=78{,}4\,\text{м}.$$

5. Сила притяжения

Два тела, масса которых m_1 и m_2, находятся на расстоянии r_1 друг от друга. Какую работу необходимо совершить, чтобы рас стояние между ними стало равным r_2?

Физический закон притяжения $F=f\dfrac{m_1\cdot m_2}{r^2}$. Здесь f – константа притяжения. Действующая сила переменна и зависит от расстояния между двумя массами. Работа, согласно формуле (3.2),

$$A=-f\cdot m_1\cdot m_2\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr=-f\cdot m_1\cdot m_2\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}dr=-f\cdot m_1\cdot m_2\frac{r^{-1}}{-1}\Bigg|_{r_1}^{r_2}=$$

$$=f\cdot m_1\cdot m_2\frac{1}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2}=f\cdot m_1\cdot m_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Пример 10. Какую работу нужно затратить, чтобы ракету массой m с поверхности Земли удалить в бесконечность?

Решение. Как известно, закон притяжения любого тела Землей

$$F=mg\frac{R^2}{r^2},$$

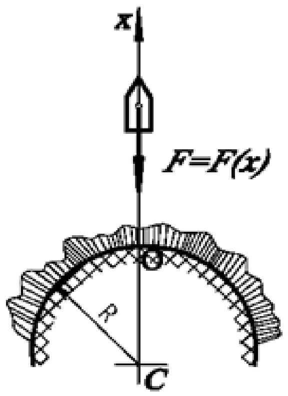

Рис. 3.7

где m – масса тела; g – ускорение силы тяжести; R – радиус Земли; r – расстояние тела до центра Земли.

Если тело поднято на высоту $OB = x$ над поверхностью Земли (рис. 3.7), то сила притяжения

$$F=mg\frac{R^2}{(r+x)^2}.$$

При перемещении тела на dx производится элементарная работа

$$dA=mg\frac{R^2}{(r+x)^2}dx.$$

Так как по условию x изменяется от 0 до $+\infty$, то искомая работа

$$A = mgR^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(r+x)^2} dx = mgR^2 \lim_{h\to\infty} \int_0^{h} \frac{1}{(r+x)^2} dx = mgR^2 \lim_{h\to\infty} \left.\frac{-1}{(r+x)}\right|_0^h =$$

$$= mgR^2 \lim_{h\to\infty} \left[\frac{-1}{(R+h)} - \left(\frac{-1}{(R+0)} \right) \right] = mgR^2 \lim_{h\to\infty} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) =$$

$$= mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \lim_{h\to\infty} \frac{1}{R+h} \right) = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - 0 \right) = mgR.$$

Следовательно, для удаления ракеты массой m с поверхности Земли в бесконечность нужно затратить работу

$$A = mgR \text{ (ед. работы).}$$

6. Давление жидкости на погруженную поверхность

Давление жидкости на горизонтальную поверхность равно силе тяжести вертикального столба жидкости, основание которого есть эта поверхность, а высота равна расстоянию до свободной поверхности жидкости. Давление p на глубине h(м) на 1 м^2 площади равно $p = h\gamma$, где γ (Н/м^3) – удельный вес жидкости. Полное гидростатическое давление (сила давления на горизонтальную поверхность площади S:

$$P = pS = yhS \text{ Н.}$$

Рассмотрим задачу определения гидростатического давления на плоскую фигуру, вертикально погруженную в жидкость. Пусть в жидкость вертикально погружена плоская фигура $a_1a_2d_2d_1$ (рис. 3.8). Свободная поверхность жидкости отмечена осью $0x$. Элементарная площадка на глубине y имеет площадь

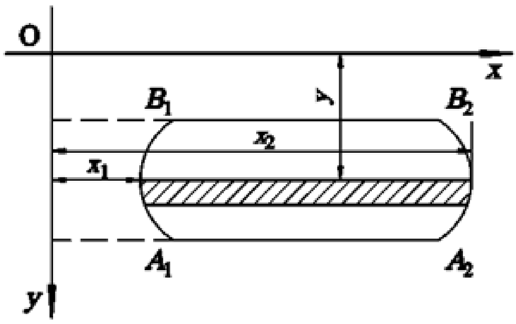

Рис. 3.8

$$dS = (x_2(y) - x_1(y))dy,$$

которая испытывает давление

$$dP = \gamma(x_2(y) - x_1(y))ydy.$$

Отсюда

$$P = \int_c^d \gamma(x_2(y) - x_1(y))ydy. \qquad (3.7)$$

Для интегрирования x_1 и x_2 надо выразить через y.

Если известна функция $h(y)$, определяющая ширину плоской фигуры на глубине y, то формула (3.7) примет вид:

$$P = \int_c^d \gamma h(y) y dy. \qquad (3.8)$$

Пример 11. Вычислить силу давления воды на треугольную пластинку *ABC* с основанием *AC* = 9м и высотой *BD* =2 м, вертикально погруженную, если вершина *B* лежит на свободной поверхности жидкости, а *AC* – параллельна ей.

Решение. Пусть *MN* – поперечное сечение пластины на уровне *BE=y*. Найдем зависимость длины *MN* от *y*. Из подобия треугольников *MBN* и *ABC* имеем

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD} \text{ или } \frac{MN}{9} = \frac{y}{2}.$$

Отсюда

$$MN = \frac{9y}{2} = 4{,}5y \text{ или } MN = h(y) = 4{,}5y.$$

На основании формулы (3.14) получим

$$P = \int_c^d \gamma h(y) y dy = \gamma \int_0^2 4{,}5y^2 dy = \gamma 4{,}5 \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2 \approx 12 \cdot 10^4 \text{ Н},$$

так как удельный вес воды 9806,65 Н/м^3.

Пример 12. Найти гидростатическое давление на полукруг, вертикально погруженный в воду, если его радиус равен 1м, а диаметр совпадает со свободной поверхностью воды (рис. 3.9).

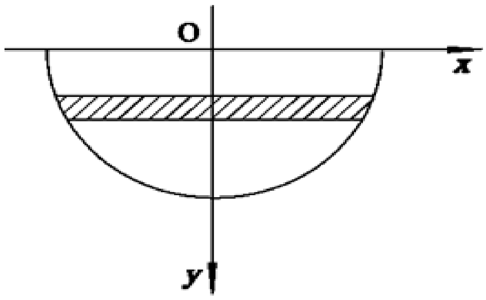

Рис. 3.9

Решение. Уравнение окружности, ограничивающее полукруг радиусом 1, имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Тогда заштрихованная на рис. 3.10 элементарная площадка на глубине *y* имеет ширину, изменяющуюся по формуле

$$x = 2\sqrt{1 - y^2}.$$

В силу формулы (3.14) испытывает силу давления воды

$$P = 9806{,}65 \int_0^1 2\sqrt{1 - y^2} y dy,$$

так как удельный вес воды *y* = 9806,65 Н/м^3. Следовательно, искомое полное гидростатическое давление

$$P = 9806{,}65\int_0^1 2\sqrt{1-y^2}\,ydy = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем замену } t\Big|_1^0 = 1-y^2\Big|_0^1 \\ dt = -2ydy \end{array} \right| = -\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot 9806{,}65\,t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 = -\frac{19613{,}3}{3}(0-1) \approx 6537{,}7\ \text{Н}.$$

Пример 13. Цилиндрический резервуар наполнен маслом. Вычислить силу давления масла на боковую поверхность резервуара, если его высота h= 2 м, радиус основания r=1 м. Удельный вес масла γ = 8820 Н/м^3.

Решение. На глубине y выделим горизонтальную круговую полоску шириной dy. Изменение глубины y на малую величину dy вызовет изменение силы давления P на величину dP. Площадь круговой полоски

$$\Delta S = 2\pi r dy.$$

Сила давления в ньютонах на горизонтальную площадку

$$P = \gamma y S,$$

где γ – удельный вес жидкости, Н/м^3; S – площадь площадки, м^3; y – глубина погружения площадки, м.

Найдем элементарное давление на полоску ΔS:

$$dP = \gamma y \Delta S dy = \gamma y 2\pi r dy.$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от $y=h_1$ до $y = h_2$ получим

$$P = 2\int_{h_1}^{h_2} \gamma\pi r y dy.$$

Подставляя в последнюю формулу данные из условия задачи, получим

$$P = 2\cdot 8820\,\pi\int_0^2 1\cdot ydy = 55\,390\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2 = 55\,390\cdot 2 = 110\,780\ \text{Н}.$$

Пример 14. Определить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции (рис. 3.10).

Решение. Верхнее основание трапеции, a = 6,4 м, нижнее b = 4,2 м, высота h = 3 м. С помощью прямой CE, параллельной BD, разбиваем трапецию на параллелограмм $CDBE$ и треугольник AEC. Выделяем элементарную полоску высотой Δy_i и заменяем ее прямоугольником, длина которого $LN = LM + MN = l_i + b$. Слагаемое l_i изменяется, а b

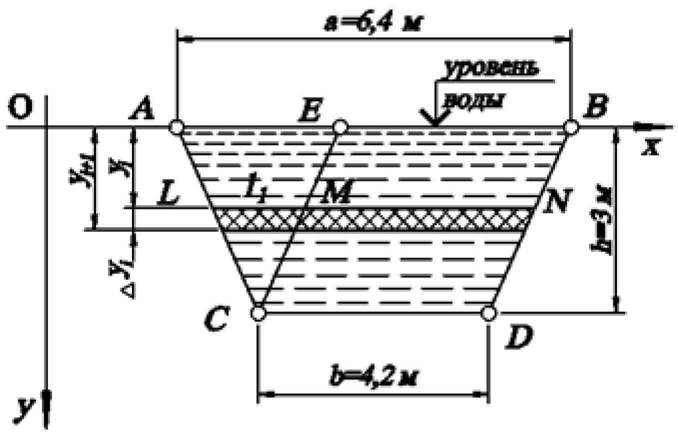

Рис. 3.10

остается всюду постоянным. Площадь элементарной полоски трапеции приближенно равна (l_i + b) Δy_i. Давление на элементарную полоску на глубине y_i

$$\Delta P_i \approx \gamma y_i \left(b + i_i\right) \Delta y_i .$$

Из подобия треугольников AEC и CLM получаем

$$\frac{l_i}{a-b} = \frac{h-y_i}{h}.$$

Откуда

$$l_i = \left(a-b\right)\frac{h-y_i}{h}.$$

А значит элементарное давление на рассмотренную выше полоску равно

$$\Delta P_i = \gamma y_i \left[b + \left(a-b\right)\frac{h-y_i}{h} \right] \Delta y_i = \gamma y_i \left[a - \frac{a-b}{h} y_i \right] \Delta y_i .$$

Просуммировав все элементарные давления, получим интегральную сумму, предел от которой равен интегралу, определяющему силу давления жидкости на плотину:

$$P = \gamma \int_0^h y \left[a - \frac{a-b}{h} y \right] dy = \gamma \int_0^h \left(ay - \frac{a-b}{h} y^2 \right) dy =$$

$$= \gamma \left(\frac{ay^2}{2} - \frac{a}{h}\frac{y^3}{3} + \frac{b}{y}\frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^h = \gamma \left(\frac{ah^2}{2} - \frac{a}{h}\frac{h^3}{3} + \frac{b}{y}\frac{h^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{\left(a+2b\right)h^2\gamma}{6} = \frac{\left(6{,}4 + 2\cdot 4{,}2\right)\cdot 9 \cdot 9806{,}65}{6} \approx 217\,374 \text{ Н}.$$