

Полный дифференциал; дифференцируемость.

Полный дифференциал, необходимые и достаточные условия дифференцируемости.

Определение: Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y) .

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2z-1} dx + 2x^{y^2z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2z} \ln x dz$$

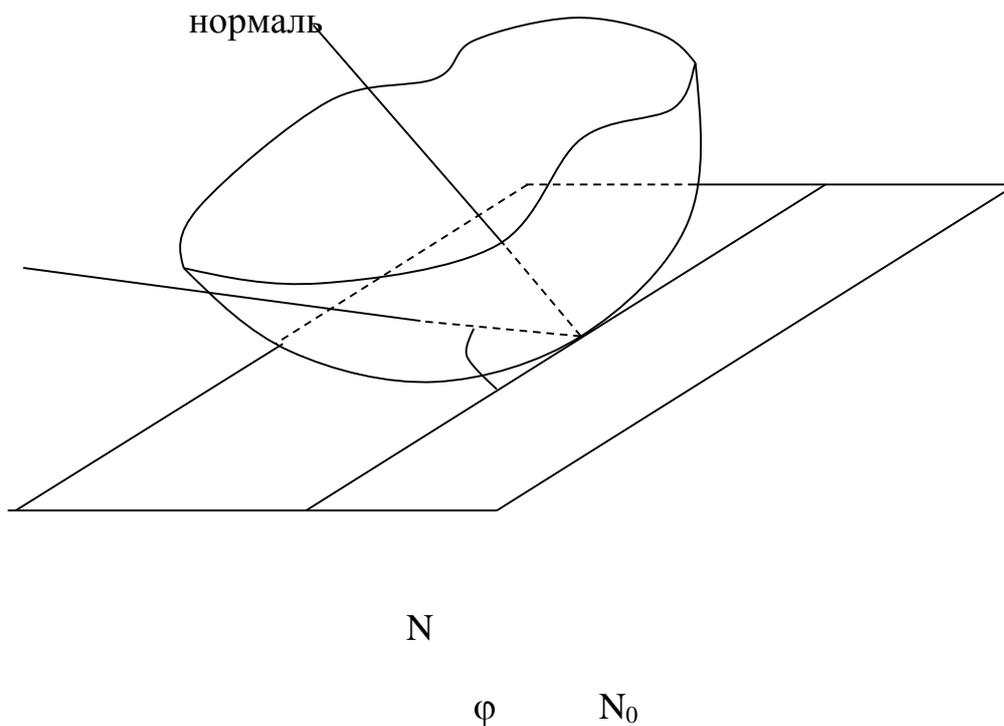
Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2} dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy$$

4. Геометрический смысл полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



касательная плоскость

Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0 . Плоскость, которая проходит через точку N_0 , называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0 .

Определение. Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке $M(1, 1, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \quad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

4. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) . Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1, y = 2, z = 1$.

Из заданного выражения определим $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Найдем значение функции $u(x, y, z) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,04 + 0,01 = 0,05$$

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx u(1,2,1) + du = 1 + 0,05 = 1,05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

Лекция №2 Тема 4.2. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Частные производные сложных функций, неявно заданных функций.

5. Частные производные высших порядков.

Если функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D , то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка**.

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка**.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными**.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

$$d^2z = d[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy] = f''_{xx}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)(dy)^2$$

$$d^3z = f'''_{xxx}(x, y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(x, y)(dx)^2dy + 3f'''_{xy^2}(x, y)dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(x, y)(dy)^3$$

.....

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.