Тема 4.2. Экстремум функций нескольких переменных.

Понятие экстремума, необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

Необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если

$f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

2. Условный экстремум.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение

φ(x, y) = 0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)).

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

(1)

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

(2)

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение u = f(x, y) + λφ(x, y) называется **функцией Лагранжа.**

Пример. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи:

2x + 3y – 5 = 0

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего