

ЛЕКЦИЯ №1

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Функцию $y = F(x)$, заданную на промежутке X , называют *первообразной* для функции $y = f(x)$, заданной на том же промежутке, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, из определения следует, что функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$, так как $(\frac{x^3}{3})' = x^2$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Следовательно, если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то любая другая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$. При этом функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, знак $\int$ – знаком интеграла, x называется *переменной интегрирования*.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет совокупность кривых, каждая из которых получается путём сдвига одной из кривых параллельно самой себе вдоль оси Oy .

Операция нахождения первообразной по её производной или неопределённого интеграла по заданной подынтегральной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx .$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int d(f(x)) = f(x) + C .$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k - \text{постоянная}).$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx .$$

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \neq -1.$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C .$$

$$\text{III. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$$

$$\text{IV. } \int e^x dx = e^x + C .$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C .$$

$$\text{VI. } \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C .$$

$$\text{VII. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$\text{VIII. } \int \sin x dx = -\cos x + C .$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \sin x + C .$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C .$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C .$$

$$\text{XII. } \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Интегралы этой таблицы принято называть *табличными*.

При вычислении неопределённых интегралов бывает полезно применять следующие правила:

1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C.$$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись действиями со степенями и таблицей интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3} \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$$

Пример 2. Найти $\int (\frac{2}{1+x^2} + 6x - 3x^2 + 7)dx$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись свойствами 4 и 5:

$$\begin{aligned} \int (\frac{2}{1+x^2} + 6x - 3x^2 + 7)dx &= 2 \int \frac{dx}{1+x^2} + 6 \int x dx - 3 \int x^2 dx + 7 \int dx = \\ &= 2 \operatorname{arctg} x + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 7x + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\int \cos 3x dx$.

Решение. Умножаем и делим интеграл на 3 и вносим множитель 3 под знак интеграла, затем под знак дифференциала:

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^3} dx$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию на три слагаемых, разделив числитель на знаменатель. Затем выполним преобразования и интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^3} dx = \int \left(\frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{3}{x^3} \right) dx = 2 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx - 3 \int x^{-3} dx =$$

$$= 2 \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} - 3 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \sin(3x+1) dx$.

Решение. Применим правило $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ и получим

$$\int \sin(3x+1) dx = \frac{1}{3} \int \sin(3x+1) d(3x+1) = -\frac{1}{3} \cos(3x+1) + C..$$

Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной интегрирования является одним из самых эффективных приёмов сведения неопределённого интеграла к табличному. Такой приём называется также методом подстановки.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T , а X – некоторое множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве X , то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Последнее выражение называется формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

Замечания: 1. Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределённый интеграл, стоящий в правой части равенства.

2. В найденной первообразной следует вернуться к исходной переменной интегрирования.

Пример 6. Найти $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Введём новую переменную $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x dx$ или $\sin x dx = -dt$. В результате подстановки исходный интеграл преобразуется к табличному виду

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = - \int \frac{dt}{t^2} = - \int t^{-2} dt = - \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = - \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Пример 7. Найти $\int \frac{3e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} + 5}}$.

Решение. Заметим, что $e^{4x} = (e^{2x})^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x} = t$. Тогда $de^{2x} = dt$; $(e^{2x})' dx = dt$; $e^{2x} 2dx = dt$. Заменяя всюду под интегралом выражение $e^{2x} dx$ на $\frac{dt}{2}$, а e^{2x} на t , получим

$$\int \frac{3dt}{2\sqrt{t^2 + 5}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5}} = \frac{3}{2} \ln |t + \sqrt{t^2 + 5}| + C = \frac{3}{2} \ln |e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 5}| + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{2 \sin x dx}{\sqrt{3 + \cos^2 x}}$.

Решение. Введём новую переменную $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x dx$. Заменяя всюду под интегралом выражение $\sin x dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t , получим

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x}{\sqrt{3 + \cos^2 x}} &= -2 \int \frac{dt}{\sqrt{3 + t^2}} = -2 \ln |t + \sqrt{3 + t^2}| + C = \\ &= -2 \ln |\cos x + \sqrt{3 + \cos^2 x}| + C. \end{aligned}$$

Пример 9. Найти $\int \frac{(\arcsin x + 5)^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение. Введём новую переменную $t = \arcsin x + 5$. Тогда $dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. В результате подстановки получим

$$\int \frac{(\arcsin x + 5)^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\arcsin x + 5)^4}{4} + C.$$

Интегрирование по частям

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на промежутке X , причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

С учётом определения дифференциалов функций предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Полученное равенство называется *формулой интегрирования по частям*.

Формулу интегрирования по частям можно применять многократно.

Рекомендации по использованию метода интегрирования по частям

В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x)\sin ax dx, \int P(x)\cos ax dx,$$

где $P(x)$ – многочлен относительно x , a – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители принимают равными dv .

В интегралах вида

$$\int P(x)\ln|ax| dx, \int P(x)\arcsin ax dx, \int P(x)\arccos ax dx, \\ \int P(x)\arctg ax dx, \int P(x)\operatorname{arcctg} ax dx$$

обозначают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители полагают равными функции u .

Пример 1. Найти $\int (x-3)\sin x dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям. Обозначим $u = x-3$; $dv = \sin x dx$, тогда $du = dx$; $v = \int \sin x dx = -\cos x$; по формуле $\int u dv = uv - \int v du$ получим

$$\int (x-3)\sin x dx = -(x-3)\cos x + \int \cos x dx = (3-x)\cos x + \sin x + C.$$

Пример 2. Найти $\int (2x+1)\ln x dx$

Решение. Положим $u = \ln x$, $dv = (2x+1)dx$, тогда

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx, v = \int dv = \int (2x+1)dx = 2\int x dx + \int dx = x^2 + x,$$

Следовательно, по формуле интегрирования по частям

$$\int (2x+1)\ln x dx = \ln x \cdot (x^2 + x) - \int (x^2 + x) \frac{dx}{x} = \ln x(x^2 + x) - \\ - \int (x+1)dx = \ln x(x^2 + x) - \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть дана функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, где $a < b$ и $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

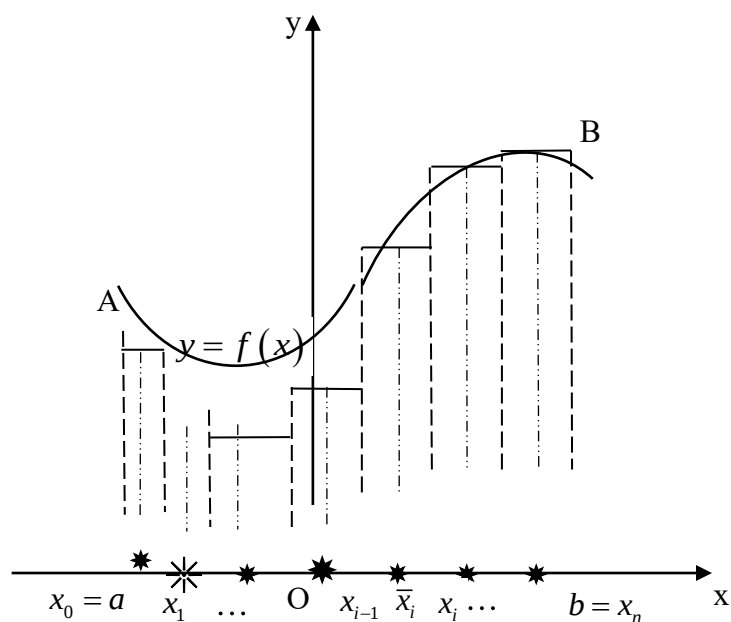


Рис.3.1

Назовём фигуру, ограниченную кривой $f(x)$, прямыми $x = a$; $x = b$ и отрезком оси Ox , криволинейной трапецией (рис.3.1).

Выполним следующие действия:

1) разобьём отрезок $[a; b]$ произвольным образом на n частичных отрезков длиной Δx_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), так что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$;

2) выберем в каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ по одной произвольной точке $c_1, c_2, \dots, c_n$;

3) вычислим значения функции $f(x)$ в выбранных точках c_i ;

4) составим сумму произведений вида

$$\sigma_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i,$$

она называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Очевидно, что для различных разбиений отрезка $[a; b]$ на части получим бесконечное множество интегральных сумм вида σ_n . Таким образом, для данной функции $f(x)$ и данного отрезка $[a; b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм σ_n . Последние зависят от числа разбиений n и от выбора точек деления x_i и точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. При этом оказывается, что все эти различные интегральные

суммы при неограниченном возрастании n и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных отрезков имеют общий предел.

Определение. Если при любой последовательности разбиений отрезка, $[a; b]$ таких, что $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), при любом выборе точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ интегральная сумма $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ стремится к одному и тому же конечному числу A : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = A$, то число A называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Итак, по определению, } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Числа a и b называются пределами интегрирования: a – нижним, b – верхним. Отрезок $[a; b]$ называется отрезком интегрирования. Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а переменная x – переменной интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла на отрезке: определенный интеграл от неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и отрезком $[a, b]$ оси абсцисс.

Замечание. Очевидно, что $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$, т. е. переменную

интегрирования в определенном интеграле можно переобозначать, при этом величина интеграла от этого не зависит.

Функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, если существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом, всякая кусочно-непрерывная на заданном отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла

1. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

2. При перестановке пределов интегрирования меняется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_b^b f(x)dx = 0.$$

4. Если $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

5. Если $m \leq f(x) \leq M$ при всех x из промежутка $[a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

6. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a, b).$$

Данное свойство называется свойством аддитивности.

7. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k - \text{постоянная}).$$

8. **Теорема** (о среднем значении). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a, b]$. Тогда существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Формула Ньютона – Лейбница

Теорема. (Ньютона – Лейбница). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a, b]$ и $F(x)$ – одна из её первообразных. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула называется формулой Ньютона–Лейбница.

Пример 10. Вычислить $\int_1^4 \left(1 - 4x + \frac{3\sqrt{x}}{2} \right) dx$.

Решение. Используя свойства 1 и 7, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(1 - 4x + \frac{3\sqrt{x}}{2} \right) dx &= \int_1^4 dx - 4 \int_1^4 x dx + \frac{3}{2} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \left(x - 4 \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = \left(x - 2x^2 + \sqrt{x^3} \right) \Big|_1^4 = \\ &= (4 - 1) - 2(4^2 - 1^2) + (\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) = 3 - 30 + 7 = -20. \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислить $\int_0^4 (1 + e^{\frac{x}{4}}) dx$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком дифференциала, затем разложим интеграл на сумму интегралов и применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_0^4 (1 + e^{\frac{x}{4}}) dx = \int_0^4 dx + 4 \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} d \frac{x}{4} = \left(x + 4e^{\frac{x}{4}} \right) \Big|_0^4 = 4 + 4e - 4 = 4e.$$

Пример 12. Вычислить $\int_0^1 (3x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} - 2^x \cdot \ln 2) dx$.

Решение. Разложим определенный интеграл на сумму трёх табличных интегралов и получим следующее:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} - 2^x \cdot \ln 2) dx &= 3 \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} - \ln 2 \int_0^1 2^x dx = \\ &= (x^3 + \operatorname{arctg} x - 2^x) \Big|_0^1 = 1 + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 - 2^1 + 2^0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Приёмы вычисления определенных интегралов практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые применяются при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, надо не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема (о замене переменной в определенном интеграле). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a, b]$ и $x = x(t)$. При этом

$$1) x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b;$$

$$2) x(t), \quad x'(t) \text{ непрерывны } \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда формула замены переменной в определенном интеграле имеет вид $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt$.

Пример 13. Вычислить $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^x} dx$.

Решение. Сделаем замену переменной по формуле $t = \sqrt{1+e^x}$. Тогда

$$e^x = t^2 - 1 \Rightarrow x = \ln(t^2 - 1) \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2 - 1}.$$

Кроме того, если $x=0$, то $t=\sqrt{2}$; если $x=\ln 2$, то $t=\sqrt{3}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^x} dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t \frac{2t dt}{t^2 - 1} = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = 2 \left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 - 1} \right) = \\ &= 2 \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \right) = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ln \left(\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} \right). \end{aligned}$$

Замечание. Следует обратить внимание на то, что при выполнении замены переменной в определенном интеграле надо пересчитать пределы интегрирования, то есть найти отрезок, на котором изменяется новая переменная, но при этом к старой переменной возвращаться не надо.

Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла имеет вид

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

Пример 14. Вычислить $\int_1^e x \ln x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.
Положим $u = \ln x$; $dv = x dx$, тогда $du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$; $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_1^e (x \ln x) dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

Вычисление площади плоской фигуры

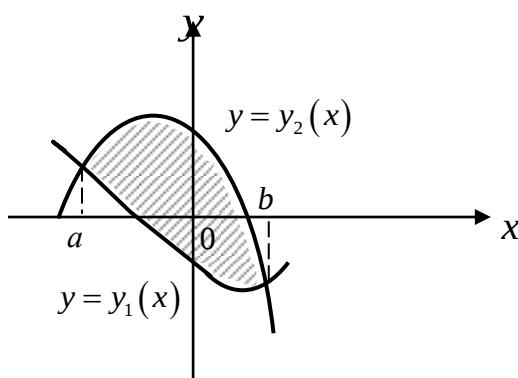


Рис.3.5

Если $y_1(x) \leq y_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$, то, исходя из геометрического смысла определённого интеграла, площадь области, ограниченной графиками этих функций (рис.3.5), можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Пример 15. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = -3x$.

Решение. Построим графики этих функций (рис.3.6) и найдем точки их пересечения:

$$4 - x^2 = -3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4.$$

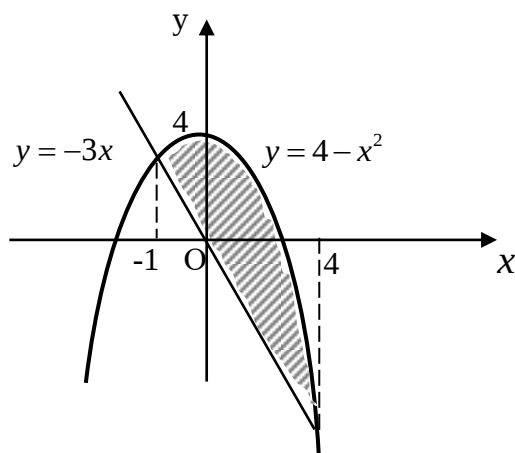


Рис.3.6

Искомую площадь фигуры найдём по формуле, приведённой выше:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 (4 - x^2 + 3x) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^4 = \\ &= 16 - \frac{64}{3} + 24 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

