Раздел 1. *ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙН0Й АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИИ*

Тема 1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§1. Матрицы.

1.1. Основные определения

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, *A*, *B*, *C*, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: $a_{ij}\ (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$, где i - номер строки, j - номер столбца.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Например,

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Равными, называются две матрицы A и B одного размера если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\ldots m;\ j = 1,2,\ldots,n.$

Матрицей-строкой (вектором-строкой) называется матрица, состоящая из одной строки, а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

Например,

$A = (a_{11}\, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ – матрица-строка; $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица у которой, число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица третьего порядка.

Диагональными элементами матрицы A называются элементы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, и они образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Диагональной матрицей называется матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

- диагональная матрица третьего порядка.

Верхней треугольной матрицей n-го порядка называется матрица у которой, элементы ниже диагонали равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

-верхняя треугольная матрица второго порядка.

Нижней треугольной матрицей n-го порядка называется матрица у которой, элементы выше диагонали равны нулю.

Например,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- нижняя треугольная матрица второго порядка.

Единичной матрицей n-го порядка называется диагональная n-го порядка у которой все диагональные элементы равны единице. Она обозначается буквой E.

Например,

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- единичная матрица третьего порядка.

Нулевой, или **нуль-матрицей** любого размера называется матрица, у которой все элементы равны нулю:

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & ... \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Действия над матрицами.

1. Произведением матрицы A на число λ называется матрица $C=\lambda A$, элементы которой $c_{ij}=\lambda\, a_{ij}$ ($i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n$). Например, если

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{то}\quad 3A=\begin{pmatrix} -15 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за её знак.

Например,

$$\begin{pmatrix} 22 & 14 & 6 \\ 42 & 0 & 4 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 \\ 21 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1,2,\ldots, m;\quad j = 1,2,\ldots, n$) (т.е.).

Замечание. Матрицы складываются поэлементно

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В частном случае $A + O = A$.

Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции:

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Пример. Найти линейную комбинацию матриц $2A - 5B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A - 5B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -8 & 14 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 5 & 20 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-0 & 4+5 & 6-10 \\ -8-5 & 14-20 & 0-15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 \\ -13 & -6 & -15 \end{pmatrix}.$$

3. Произведением матрицы A на матрицу B называется такая матрица

$$C_{m \times n} = A_{m \times k} \cdot B_{k \times n},$$

каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1,2,\ldots, m; \quad j = 1,2,\ldots, n.$$

Замечание. Произведение матриц определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пример. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно). Вычислим элементы матрицы-произведения *C*, умножая элементы каждой строки матрицы *A* на соответствующие элементы столбцов матрицы *B* следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) \\ (-3)\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & (-3)\cdot(-1) + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1 & (-3)\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+1-0 & -1-2-2 & 2+3+4 \\ -6+0+0 & 3+0+1 & -6+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -6 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Следовательно $C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Некоторые свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами. Это следует из определений этих операций:

1. $A+B=B+A$. 2. $(A+B)+C=A+(B+C)$. 3. $\alpha\,(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
4. $A(B+C)=AB+AC$. 5. $(A+B)C=AC+BC$. 6. $A(BC)=(AB)C$.
7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

Если произведение матриц *AB* существует, то после перестановки сомножителей местами произведение матриц *BA* может и не существовать. Если даже произведения *AB* и *BA* существуют, то они могут быть матрицами разных размеров и **коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется,** т.е.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Рассмотрим это утверждение на следующем примере.

Пример. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют): $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot 2 & 2\cdot 7+3\cdot(-3) \\ -1\cdot 3+1\cdot 2 & -1\cdot 7+1(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+7\cdot(-1) & 3\cdot 3+7\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-3)\cdot(-1) & 2\cdot 3+(-3)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 16 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получим, что $AB\neq BA$, т.е. произведение матриц не обладает коммутативным свойством.

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу Е того же порядка, причем это произведение равно:

$$AE=EA=A.$$

Таким образом, единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

4. Целой положительной степенью $A^m(m>1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m=A\cdot A\cdot\ldots\cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0=E,\quad A^1=A.$ Нетрудно показать, что $A^m\cdot A^k=A^{m+k},\quad (A^m)^k=A^{mk}.$

Пример. Найти A^2, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. $A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$

5. Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^T называется **транспонированной** относительно матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m\times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $n\times m$.

При *Найти линейную комбинацию матриц* $2A-5B$, *если* $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A-5B=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -8 & 14 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 5 & 20 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-0 & 4+5 & 6-10 \\ -8-5 & 14-20 & 0-15 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 \\ -13 & -6 & -15 \end{pmatrix}.$

Пример. Транспонировать матрицу $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A имеет размерность 2×3, следовательно, размерность матрицы A^T – 3×2:

$$A^T{}_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T=A.$ 2) $(\alpha A)^T=\alpha A^T.$ 3) $(A+B)^T=A^T+B^T$

4) $(AB)^T=B^T A^T.$

Задания для решения в аудитории

1. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det ($AB$).

5. .Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B, A\cdot B$

6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^{\mathrm{T}}B+\alpha C$.

7. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

9. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, показать, что

$(AB)^T = B^T A^T$

10. Найти линейную комбинацию матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 5 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$: а) $A-2B$; б) $2A+3B$.

Ответы.

1. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = 21$. 2. $\begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$. 3. 19. 4. -26.

5. $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$. 6. $A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $AB = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$. 10. а) $\begin{pmatrix} -2 & -13 \\ 7 & -11 \\ -16 & 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 17 & -12 \\ 7 & 20 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Индивидуальные задания

1. Выполнить действия над матрицами.

1. $A \cdot C + B$, если $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A \cdot C - B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $C \cdot A + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

4. $C \cdot A + B^T$, если $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

5. $C \cdot A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

6. $C^T \cdot A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $A^T \cdot C + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $A \cdot C - 4B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $A^T \cdot C - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. $A \cdot C - 5B$, если $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

11. $A \cdot C - 4B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

12. $A \cdot C \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $A \cdot C - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

14. $A^T \cdot X - B = C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

15. $2A\cdot C^T+4B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

16. $A\cdot C-B^T$, если $A=\begin{pmatrix}10 & 3\\ -7 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

17. $A\cdot C+3B$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

18. $A\cdot C^T+B$, если $A=\begin{pmatrix}13 & 4\\ 6 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-8 & 5\\ 9 & -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 9 & -10\end{pmatrix}$.

19. $X\cdot A-B=C^T$, если $A=\begin{pmatrix}9 & 10\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -7\end{pmatrix}$.

20. $C\cdot A-4B$, если $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -4 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

21. $C\cdot A+5B$, если $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 9 & -8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & -5\\ 8 & -7\end{pmatrix}$.

22. $C\cdot A+3B$, если $A=\begin{pmatrix}8 & 5\\ -4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-9 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -9\\ 2 & -7\end{pmatrix}$.

23. $2B-C\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 9 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -11\\ 2 & -7\end{pmatrix}$.

24. $B^T+C\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}15 & 11\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

25. $-2B+C\cdot A^T$, если $A=\begin{pmatrix}-8 & 10\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 9 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 17\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

2. Найти, если это возможно, произведение матриц AB и BA.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\quad$ B$=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 10\\3 & 5 & 7\\-4 & -2 & 1\end{pmatrix}$, B$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\\-5\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 1\\0 & \sqrt{3} & 1\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 10 & 0\\1 & 0 & 100\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\-1 & 0 & -1\\-5 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

10. $2A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\2 & -2 & -8\\0 & -4 & -6\end{pmatrix}$, $3B=\begin{pmatrix}3 & 9 & 6\\0 & -6 & 9\\9 & -3 & 15\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\x & x & x\\x^2 & x^2 & x^2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x^2 & x^2 & x^2\\x & x & x\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & -5\\1 & 2 & 3 & -4\\-1 & -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\4 & 1 & -1\\1 & 3 & 2\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & a & -a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ a & 1 & -a \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

17. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix} \mathrm{tg}^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\alpha & \mathrm{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix} \cos 3\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos 3\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}$.

26. $5A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 50 & 10 & 100 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, $3B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=A^2$.

28. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a & b \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix} -15 & 3 & 0 \\ 1 & 23 & 10 \\ 0 & 10 & 27 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

§2. Определители квадратных матриц

Определитель матрицы А обозначается $|A|$, Δ или $\det A$.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или ***определителем первого порядка***, называется элемент

$$a_{11}: \Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Например, пусть

$$A=(7), \text{ тогда } \Delta_1 = |A| = 7.$$

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, *или* ***определителем второго порядка*** называется выражение, равное:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, пусть $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

тогда

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 8 \cdot 1 = -14.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, или ***определителем третьего порядка*** называется выражение, равное:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

Используем разложение определителя по 1-й строке.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (2-5) - 3 \cdot (1+2) - 2 \cdot (-5-4) = -12 - 9 + 18 = -3.$$

Замечание. Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Саррруса), которое определяется схемой

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} \right)$$

.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 5\cdot 4 - \left(2\cdot 0\cdot 4 + (-1)\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 5\right) =$$

$$= 0 + 6 - 20 - \left(0 - 12 + 5\right) = -7.$$

Для определения определителя более высокого порядка высокого порядка введём некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} ***элемента*** a_{ij} матрицы n-го порядка A называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i + j)$ - нечетное число.

Например,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}.$$

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4.$$

Определителем квадратной матрицы А n-го порядка называется число, равное сумме попарных произведений элементов i-ой строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{s=1}^{n}a_{1S}A_{1S}$$

- разложение по элементам 1-й строки.

Так, например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.
Для избегания громоздких вычислений необходимо знание свойств определителей.

Свойства определителей

1. Если матрица содержит строку (или столбец), состоящую из нулей, то её определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число α, то её определитель умножится на это число α.

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбц; за знак матрицы можно выносить общий множитель лишь всех элементов.

3. Определитель транспонированной матрицы A^T равен определителю исходной матрицы A:

$$\left|A^T\right|=|A|.$$

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.
5. Если все элементы некоторой строки (или столбца) матрицы пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то её определитель равен нулю.
6. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой её строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{is}.$$

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т. е.

$$\sum_{S=1}^{n}a_{iS}A_{jS}=0 \quad \text{при} \quad i\neq j .$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

9.Если каждый элемент i-й строки матрицы представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы равен сумме определителей таких матриц: у первой из них i-я строка состоит из первых слагаемых, а у второй – из вторых. Все остальные строки у всех трех матриц не изменятся.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

10. Сумма произведений произвольных чисел $b_1,b_2,\dots,b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1,b_2,\dots,b_n$.

11. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$|C|=|A|\cdot|B|, \text{ где } C=A\cdot B;\ A \text{ и } B \text{ - матрицы } n\text{-го порядка.}$$

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB\neq BA,\ |AB|=|BA|$.

Используя свойства определителей при их вычислении целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1-9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержащую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 & 6 \\ 2 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вынесем за знак определителя множитель 2 из первой строки. Тогда

(-2) (-1) (1)

$$\Delta=2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad + \quad + \quad + \quad .$$

Прибавим к элементам второй строки элементы 1-й строки, умноженные на (-2); к элементам третьей строки-элементы первой строки, умноженные на (-1); к элементам четвертой строки – элементы первой строки. В результате этого в первом столбце все элементы, кроме первого, будут нулевыми. Разложим определитель по первому столбцу. Таким образом, сводим вычисление определителя 4-го порядка к вычислению определителя 3-го порядка.

$$\Delta=2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 14 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}=2\cdot 5\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=$$

$$=10\cdot(63-16)=470.$$

При вычислении был разложен определитель третьего порядка по элементам второй строки. В типовом расчете не всегда полученный определитель 3-го порядка будет иметь какую-нибудь строчку или столбец с двумя нулями. Поэтому для его вычисления можно воспользоваться правилом треугольников или с помощью элементарных преобразований получить в каком-либо ряду два нулевых элемента.

Например,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0\cdot(-7)+5\cdot 2\cdot 2+6\cdot 3-6\cdot 7-6\cdot 2\cdot 0-5\cdot(-1)=$$

$$=+20+18-42+5=1$$

или

$$\begin{vmatrix}0&1&2\\5&7&6\\3&2&-1\end{vmatrix}\quad\begin{matrix}(-7)&(-2)\\+&+\end{matrix}\quad=\begin{vmatrix}0&1&2\\5&0&-8\\3&0&-5\end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку на (-7) и складываем со второй, и умножаем первую строку на (-2) и складываем с третьей. Раскладываем полученный определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix}0&1&2\\5&0&-8\\3&0&-5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}5&-8\\3&-5\end{vmatrix}=-(-25+24)=1.$$

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$|A|=\begin{vmatrix}4&6&-2&4\\1&2&-3&1\\4&-2&1&0\\6&4&4&6\end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A|=\begin{vmatrix}4&6&-2&4\\1&2&-3&1\\4&-2&1&0\\6&4&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12&2&-2&4\\13&-4&-3&1\\0&0&1&0\\-10&12&4&6\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}12&2&4\\13&-4&1\\-10&12&6\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного).

Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A|=\begin{vmatrix}12&2&4\\12&-4&1\\-10&12&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-40&18&4\\0&0&1\\-88&36&6\end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Пример. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 1 \cdot 2(-1) \cdot 3 + 0 = -6.$$

Замечание. Из приведённого выше примера следует, что определитель треугольной (и, очевидно, любой треугольной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \mathrm{tg}\varphi \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить уравнения: а) $\begin{vmatrix} x-3 & x+4 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix} = 20$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -x & -2 \\ -5x & 6 & 3x \\ -7 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

4. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 & 6 \\ 2 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Ответы.

1. а) 17; б) –15; в) $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$; г) $\cos 2\alpha$. 2. а) –252; б) 37. 3. а) –2; б) –1, 12.
4. 470. 5. -24.

Индивидуальные задания.

Вычислить определитель четвертого порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$

11. $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -10 & -20 & 30 & -40 \end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$

14. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 8 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

18. $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & -1 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$

21. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 4 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$

23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$

24. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$

25. $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$

26. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

28. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

29. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{8} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{8} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}.$

30. $\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix}.$

§3. Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Обратной по отношению к квадратной матрице A называется матрица A^{-1} если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E .$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Невырожденной, или ***неособенной*** матрицей называется такая квадратная матрица у которой определитель отличен от нуля $(|A| \neq 0)$. В противном случае $(\text{при}\,|\mathrm{A}| = 0)$ матрица называется **вырожденной** или **особенной**.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная. Можно доказать, что обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^{T} \; ; \; (|A| \neq 0) \qquad (1.1)$$

где $\tilde{A}$ - квадратная матрица n-го порядка, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратная матрица A^{-1} не существует.

Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A_{ij}\ (i=1,2,...,n;\ \ j=1,2...n)$ и составляем из матрицу $\tilde{A}$:

3. Находим матрицу $\tilde{A}^T$, транспонированную к $\tilde{A}$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле (1).

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A = A\cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

Пример. Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Определитель матрицы $|A| = 2 \neq 0$, т. е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Вычисляем алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}=0,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=-9,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}=4,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}=14,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-6.$$

3 Находим присоединённую матрицу: $\tilde{A}=\begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 14 & -6 \end{pmatrix}.$

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}^T$:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3 & -9 & 4\\ 0 & 4 & -2\\ -4 & 14 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5 & -4{,}5 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 7 & -3\end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1}=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 3\\ 8 & -3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1{,}5 & -4{,}5 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 7 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+0-2 & -9+2+7 & 4-1-3\\ 6+0-6 & -18-2+21 & 8+1-9\\ 12+0-12 & -36-6+42 & 16+3-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

1) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$;

2) $(A^{-1})^{-1}=A$;

3) $\left(A^{m}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{m}$;

4) $\left(A^{-1}\right)'=(A')^{-1}$;

5) $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

С помощью обратной матрицы решаются матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X:

$AX=B \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$;

$XA=B \quad\Rightarrow\quad X=B\cdot A^{-1}$;

$AXB=C \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить матрицу, обратную данной:

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 3/32 & -1/4 & 3/64 \\ -1/32 & -1/4 & -1/64 \\ -1/8 & 0 & 7/16 \end{pmatrix}$. 2. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -7/4 & 0 \end{pmatrix}$.

§4. Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

Минорами k-го порядка матрицы A называются определители (квадратные подматрицы k-го порядка), которые получаются из A размером $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов ($k \le \min(m;n)$). Определители таких подматриц

Например, из матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается rang A или r (A). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т. е. $r(A) \le \min(m;n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. A=O;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. Для матрицы $A_{3\times 4}$ $r(A)\le \min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т. е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 10 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 10 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Так как все миноры третьего порядка нулевые, $r(A)\le 2$. В силу того, что существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7\ne 0$, $r(A)=2$.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Следующие преобразования назовем ***элементарными***:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т. е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Если $a_{11}=0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11}\neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы.

2. Если $a_{11}\neq 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11}=0,\ -a_{31}/a_{11}=2,\ -a_{41}/a_{11}=1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22}\neq 0$ (в данном случае $a_{22}=-1\neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22}=-3,\ -a_{42}/a_{22}=-3)$, добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме $a_{12},\, a_{22}$) равнялись нулю.

Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$.

Поэтому ранг полученной ступенчатой, а, следовательно, и данной матрицы равен двум.

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответы.

1. 2. 2. 3.

§5. Системы линейных уравнений

5.1. Общие понятия.

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n b_m. \end{cases} \qquad (1.2)$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2..., m;\ j = 1, 2, ..., n\right)$- произвольные числа, называемые соответственно ***коэффициентами при переменных*** и **с*вободными***

членами уравнений. В более краткой записи с помощью наков суммирования систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

Решением системы (2) называется такая совокупность n чисел $(x_1 = d_1,\ x_2 = d_2, ..., x_n = d_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Например, система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 22, \\ 3x_1 - x_2 = -4 \end{cases}$$

- совместная и определенная, так как имеет единственное решение (2;10); система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8, \\ x_1 + 3x_2 = 16 \end{cases}$$

- несовместная, а система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$$

- совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а именно, бесконечное множество решений
$(x_1 = c,\ x_2 = 10 - 2c,\ где\ \ c - любое\ число)$.

Две системы уравнений называются ***равносильными***, или ***эквивалентными***, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (2) в матричной форме. Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_x+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

есть матрица-столбец. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2). Воспользовавшись определением равенства матриц систему (2) можно записать в виде

$$AX=B. \tag{3}$$

5.2. Решение квадратных систем методом обратной матрицы.

Пусть число уравнений системы (2) равно числу переменных, т.е. $m=n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta=|A|$ называется **определителем системы**. Предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A|\neq 0$. В этом случае существует обратная A^{-1}

Умножая слева обе части матричного равенства (3) на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B.$$

Так как $A^{-1}(AX)=\left(A^{-1}A\right)X=EX=X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X=A^{-1}B. \tag{3}$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 3x+2y+z=5 \\ 5x-y+z=12 \end{cases}$$

матричным способом.

Решение. Введем обозначения

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде систему можно переписать следующим образом:

$$AX=B.$$

Определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$; следовательно, матрица A - невырожденная и существует обратная ей матрица A^{-1}. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся приведённым в §3 алгоритмом вычисления обратной матрицы. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3,\qquad A_{21}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-4,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=2,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-3,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1,$

$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-13,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=17,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5.$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -13 & 17 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 13 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B,$$

т. е. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 13 & -17 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+20-12 \\ -4+15-12 \\ 26-85+60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Таким образом получили ответ: $x=2,\ y=-1,\ z=1.$

5.3. Решение квадратных систем по формулам Крамера.

Сформулируем теорему

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j=1,2,\ldots,\ n). \qquad (4)$$

Формулы (4) получили название формул Крамера.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 3x+2y+z=5 \\ 5x-y+z=12 \end{cases}$$

методом Крамера.

Решение. Найдем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4-3+15-10+2-9=-1.$$

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где Δ_i - определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой i-го столбца на столбец правых частей: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{-1} = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 & 38 \\ 13 & 0 & 29 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 17 & 38 \\ 13 & 29 \end{vmatrix} =$$

$$17 \cdot 29 - 13 \cdot 38 = 493 - 494 = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ответ: $x = 2,\ \ y = -1,\ \ z = 1$.

5.4. Решение линейных систем Методом Гаусса.

Рассмотрим решение системы (2) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11},\ -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (2), исключим переменную x_1, из всех последующих уравнений, начиная со второго.

Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ .... \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + ... + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ .... \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} .$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа

$$\left(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, ..., \ldots, -\mathrm{a}_{\mathrm{m2}}^{(1)}/\mathrm{a}_{22}^{(1)} \right)$$

и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m–му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, ..., x_{r-1}$, после $(r-1)$–го шага, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r}^{(1)}x_{r+1} + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ .... \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + ... + a_{2n}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ .... \\ 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ .... \\ 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \quad (5)$$

Число нуль в последних $m - r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел

$b_{r+1}^{(r-1)},...,b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)},...,b_m^{(r-1)}$ в системе (5) равны нулю. В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (5) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая:

а) число уравнений системы (5) равно числу переменных, т. е. $r=n$ (в этом случае система (5) имеет треугольный вид);

б) $r<n$ (в этом случае система (5) имеет ступенчатый вид). Переход системы (2) к равносильной ей системе (5) называется ***прямым ходом*** метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (5) – ***обратным ходом***.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемую ***расширенной матрицей системы*** (2),так как в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}. \ (A/B) = \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 3$, а $a_{21} = 1$меняем первую и вторые строки. Исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая полученную первую строку на 3 и вычитая её из второй строки матрицы. Затем вычитаем первую строку из третьей и четвёртой строки.

$$(A/B) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Шаг 2. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = -2$. Выносим из второй строки общий множитель -2. Получим матрицу эквивалентную данной

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку матрицы на число 3 и прибавляя её к третьей строке. Затем из четвертой строки вычитаем вторую получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. По последней матрице системы определяем ранг системы $r(A/B) = r(A) = n = 3$, значит, система совместна и определённа. Записываем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad\quad x_2 + 3x_3 = 3, \\ \quad\quad\quad 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Шаг 4. Находим из последнего уравнения $x_3 = 1$, затем из 2-го уравнения $x_2 + 3\cdot 1 = 3 \Rightarrow x_2 = 0$, из 1-го уравнения $x_1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 2$ $\Rightarrow x_1 = -1$. Получаем решение системы $(-1;\ 0;\ 1)$.

Шаг 5. Делаем проверку: $\begin{cases} 3\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 3\cdot 1 = 0, \\ -1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 2, \\ -1 - 0 + 1 = 0, \\ -1 + 3\cdot 0 - 1 = -2. \end{cases}$

Пример. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0=-1$, следовательно, данная система несовместна.

Вопрос о разрешимости системы (2) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы. Если $r(A) \neq r(A_1)$, то система не совместна

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т. е. $r = n$, то система (2) имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т. е. $r < n$, то система (2) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пусть $r < n$, то r переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$ называются ***основными*** (или базисными), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются неосновными (или свободными).

Решение системы (2), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется ***базисным решением.***

Пример. Исследовать на совместность и решить методом Гаусса данную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4, \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и выполним над ней элементарные преобразования:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2. \end{cases}$$

$r(A/B) = r(A) = 2 < n = 4$, следовательно, система совместна и неопределённа, т.к. имеет бесконечное множество решений.

Оставим в левой части переменные x_1, x_2, которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0).$$

Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5, \\ x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2. \end{cases}$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1 = 5 - 17c_1 + 29c_2;\ x_2 = -2 + 10c_1 - 17c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2\right)$.

Найдём одно из частных решений системы, для этого положим $c_1 = 1, c_2 = 1$, тогда $x_1 = 17$, $x_2 = -9$.

Проверка: $\begin{cases} 17 + 2\cdot(-9) - 3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 1, \\ 17 + 3\cdot(-9) - 13\cdot 1 + 22\cdot 1 = -1, \\ 3\cdot 17 + 5\cdot(-9) + 1 - 2\cdot 1 = 5, \\ 2\cdot 17 + 3\cdot(-9) + 4\cdot 1 - 7\cdot 1 = 4. \end{cases}$

Задания для решения в аудитории

Задача 1. Исследовать систему на совместность. Если она совместна найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}.$$

Задача 2. Исследовать систему на совместность. Если она совместна найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}.$$

Ответ.

1. Система не совместна. 2. $\begin{cases} x_1 = -1 - 3C_3 + 5C_4 \\ x_2 = 3 + 4C_3 - 7C_4 \\ x_3 = C_3 \\ x_4 = C_4 \end{cases}$, где $C_3, C_4 \in R$

Индивидуальные задания.

Задача 1.

Решить систему методом Крамера и средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 4x - 3y + z = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -7 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 5y - z = -1 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y + z = 8 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} 4x + 5y - 2z = -3 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ x - 4y = -7 \end{cases}.$

9. $\begin{cases} x + y - 2z = 16 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}.$

10. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}.$

11. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}.$

12. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}.$

13. $\begin{cases} 7x-5y=31 \\ 4x+11y=-43 \\ 2x+3y+4z=-20 \end{cases}$. 14. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$. 15. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 4x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$. 17. $\begin{cases} 3x+y+z=5 \\ x-4y-2z=-3 \\ -3x+5y+6z=7 \end{cases}$. 18. $\begin{cases} 2x-y+5z=4 \\ 5x+2y+13z=2 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-4y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$. 20. $\begin{cases} 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$. 21. $\begin{cases} 3x+5y+7z=24 \\ x+y-z=8 \\ 3x+4y-z=27 \end{cases}$.

22. $\begin{cases} 7x+2y+3z=5 \\ 3x-3y+5z=6 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$. 23. $\begin{cases} 3x+4y+5z=7 \\ 2x-y+z=0 \\ 5x+3y+3z=1 \end{cases}$. 24. $\begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ x+y-z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases}$.

25. $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+2y+z=9 \\ x+y-z=0 \end{cases}$. 26. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-3y+2x=1 \\ 3x+2y+z=4 \end{cases}$. 27. $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 5x+y-z=2 \\ 3x+3y+z=3 \end{cases}$.

28. $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+3y+z=7 \\ x+5y+3z=8 \end{cases}$. 29. $\begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ x+y+z=5 \\ 6x+y-5z=3 \end{cases}$. 30. $\begin{cases} 2x+3y-6z=15 \\ x+y-2z=6 \\ 5x-6y+z=8 \end{cases}$.

Задача 2.

Исследовать систему на совместность. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3-4x_4=1 \\ 2x_1-2x_2+2x_3+3x_4=2 \\ -x_1+x_2-13x_3-18x_4=-1 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+x_4=6 \\ 7x_1+5x_2-7x_3-x_4=8 \\ x_1+8x_2-18x_3-5x_4=-6 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 5x_1+12x_2+5x_3+3x_4=10 \\ 4x_1+3x_2+x_3+3x_4=2 \\ 11x_1+11x_2+4x_3+8x_4=8 \end{cases}$. 4. $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=2 \\ 4x_1+4x_2-4x_3=5 \\ -x_1-5x_2+7x_3=-1 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 12x_5 = 0 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$.

15.
$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2 \end{cases}$
.

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$.

17.
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$
.

19.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}.$$

20.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}.$$

21. $$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}.$$

22.
$$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23 \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 = -8 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1 \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}$$
.

23.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}.$$

24.
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 4x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}.$$

25. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

26. $$\begin{cases} x_1 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2. \\ x_1 - x_4 = 5 \end{cases}$$

27.
$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 10 \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 7 \end{cases}.$$

28.
$$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8 \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}.$$

29.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}.$$

30.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}.$$

Контрольная работа по теме «Линейная алгебра»

Вариант № 1.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$2x_1-3x_2-x_3+5x_4-x_5=2$

$3x_1+4x_2-x_3+4x_4-x_5=9$

$6x_1+2x_2-3x_3+10x_4-3x_5=12$

$3x_1-2x_2-2x_3+6x_4-2x_5=3$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$5x_1+6x_2-x_3 =10$

$x_1+x_2-x_3 =1$

$3x_1+4x_2-x_3 =6$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 2.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+3x_2-x_3+5x_4-x_5=8$

$x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5=4$

$3x_1+5x_2-2x_3+8x_4-2x_5=12$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$2x_1+4x_2-x_3+7x_4-x_5=11$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1+4x_2-2x_3=5$

$5x_1+6x_2-x_3=10$

$x_1+x_2-x_3=1$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&3\\1&4&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1.5&-1.5\\1&-1&0\\-1&0.5&0.5\end{pmatrix}.$$

Вариант № 3.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+8x_2-4x_3+x_4-x_5=5$

$x_1-x_3+4x_4-2x_5=2$

$4x_1+3x_2-x_3-4x_4-x_5=1$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$2x_1+8x_2+x_4-x_5=10$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$2x_1+3x_2-4x_3=1$

$3x_1+3x_2-x_3=5$

$-2x_1+x_2-x_3=-2$

3. Решить матричное уравнение:

$$A\cdot B-E=X, \text{ где}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-0.5&3&-1.5\\1&-1&0\\-0.5&0&0.5\end{pmatrix}.$$

Вариант № 4.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5=4$

$4x_1-2x_2-x_3+x_4-3x_5=-1$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$6x_1+x_2-2x_3+2x_4-4x_5=3$

$7x_1+2x_2-3x_3+3x_4-5x_5=4$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1-4x_2-x_3 =-2$

$x_1+x_2-x_3 =1$

$-3x_1+x_2-x_3 =-2$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B – E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 5.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+3x_2-x_3+5x_4-x_5=7$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$3x_1+x_2-4x_3+x_4-x_5=0$

$2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=2$

$2x_2+4x_4-=6$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1+2x_2-4x_3=1$

$x_1+2x_2-x_3=2$

$-3x_1+x_2-x_3=-3$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-5 & 12 & -3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 6.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$3x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=7$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$4x_1+5x_2-x_3+x_4-x_5=8$

$4x_1+5x_2-2x_3+3x_4-2x_5=8$

$3x_1+4x_2=7$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_2-x_3=0$

$3x_1+x_2-x_3=3$

$-2x_1+3x_2-x_3=0$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&3\\2&3&7\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5&-18&7\\-1&5&-2\\-1&3&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 7.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$3x_1+4x_2-x_3+x_4-5x_5=2$

$2x_1+3x_2-3x_3+x_4-x_5=2$

$4x_1+3x_2-x_3+3x_4-x_5=8$

$-2x_1-2x_3-2x_4=-6$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$7x_1+3x_2-2x_3=8$

$3x_1+4x_2-x_3=6$

$x_1+x_2-x_3=1$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&3\\2&3&7\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5&-18&7\\-1&5&-2\\-1&3&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 8.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$3x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=7$

$x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0$

$2x_1+3x_2-x_3+4x_4-x_5=7$

$x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5=3$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+3x_2-x_3=0$

$-4x_1+2x_2-x_3=-3$

$7x_1+4x_2-x_3=10$

3. Решить матричное уравнение: $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1.2 & 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 9.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5=4$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$3x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=4$

$4x_1+4x_2-2x_3+4x_4-2x_5=8$

$2x_1-2x_4=0$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$7x_1+x_2-x_3=7$

$x_1+x_2-x_3=1$

$-3x_1+4x_2-x_3=0$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&4&2\\2&3&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-6&3&2\\4&-2&-1\\-5&3&1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 10.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=4$

$3x_1+x_2-3x_3+7x_4-x_5=14$

$5x_1+x_2-x_3+8x_4-x_5=24$

$x_1+4x_2-x_3+x_4-x_5=8$

$4x_1+x_2-5x_3+x_4-6x_5=10$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$6x_1+3x_2-x_3=8$

$x_1+x_2-x_3=1$

$x_1+4x_2-x_3=4$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&4&2\\1&3&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}6&-3&-2\\-2&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 11.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$3x_1+4x_2-x_3+x_4-x_5=6$

$x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5=0$

$2x_1+2x_2-4x_3+3x_4-2x_5=1$

$3x_1+3x_2-7x_3+5x_4-3x_5=1$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1+x_2-x_3=3$

$x_1+4x_2-x_3=4$

$x_1+x_2-5x_3=-3$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&4&2\\1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&-1&-1\\-3&2&1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 12.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3$

$x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=-1$

$x_1+3x_2-x_3+x_4-4x_5=0$

$6x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5=8$

$x_1+2x_3+x_4=4$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$4x_1+x_2-x_3=4$

$x_1+3x_2-x_3=3$

$x_1+x_2-2x_3=0$

3. Решить матричное уравнение: $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&3&2\\1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&0.5&1.5\\1&-0.5&-0.5\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Вариант № 13.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=2$

$x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=-1$

$x_1+4x_2-x_3+5x_4-2x_5=7$

$2x_1+3x_2-4x_3+2x_4-2x_5=1$

$x_2+2x_3=3$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$6x_1+x_2-x_3=6$

$x_1+4x_2-x_3=4$

$x_1+x_2-2x_3=0$

3. Решить матричное уравнение: $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&2\\1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 14.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$2x_1+3x_2-2x_3+x_4-x_5=3$

$x_1+3x_2-x_3+4x_4-x_5=6$

$3x_1+4x_2-3x_3+2x_4-2x_5=$

$-x_1-2x_2+x_3=-2$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_1+x_2-x_3 = 1$

$x_1+2x_2-3x_3 = 0$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 15.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=2$

$x_1+3x_2-2x_3+3x_4-x_5= 4$

$3x_1+4x_2-3x_3+4x_4-2x_5= 6$

$x_1-2x_2+x_3-2x_4= -2$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3=-2$

$x_1+x_2-x_3=1$

$3x_1+4x_2-x_3=6$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 16.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$3x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=3$

$x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5=4$

$4x_1+3x_2-2x_3+4x_4-2x_5=7$

$2x_1-x_2-2x_4=-1$

$x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=5$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-x_1+3x_2-x_3=1$

$4x_1+x_2-x_3=4$

$3x_1+2x_2-x_3=4$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1.4&1.2&0.6\\0.6&0.2&-0.4\\0.2&-0.6&0.2\end{pmatrix}.$$

Вариант № 17.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$3x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=3$

$x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=2$

$x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5=3$

$4x_1+3x_2-2x_3+2x_4-2x_5=5$

$2x_1-x_2=1$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$2x_1+x_2-x_3 = 2$

$x_1+4x_2-x_3 = 4$

$x_1+x_2-6x_3 = -4$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&3\\1&4&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4&0&-3\\1&-1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 18.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$4x_1+4x_2-4x_3+4x_4-2x_5= 6$

$-2x_1-2x_3-2x_4 = -6$

$x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5= 0$

$3x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5= 6$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_1+3x_2-x_3 = 3$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

$x_1+x_2-x_3 = 1$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & -1.5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 19.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$4x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=5$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 1$

$5x_1+2x_2-2x_3+3x_4-2x_5= 6$

$3x_1+x_4 =4$

$8x_1+2x_2-2x_3+4x_4-2x_5= 10$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_1+x_2-x_3 = 1$

$x_1+2x_2-x_3 = 0$

$-3x_1+x_2-x_3 = -3$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&2&0\\2&3&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-5&3&3\\0&0.5&0\\2&-15&-1\end{pmatrix}....$$

Вариант № 20.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 1$

$2x_1+x_2-2x_3+3x_4-x_5=3$

$3x_1+2x_2-3x_3+4x_4-2x_5=4$

$-x_1+x_3-2x_4= -2$

$2x_1+2x_2-2x_3+2x_4-2x_5= 2$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1+x_2-x_3 = 3$

$x_1+4x_2-x_3 = 4$

$-x_1+2x_2-x_3 = 0$

3. Решить матричное уравнение: $A\cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}7&-6&3\\2&-1&-1\\-4&3&2\end{pmatrix}.$$

Вариант № 21.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 1$

$2x_1+3x_2-x_3+4x_4-x_5= 7$

$3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5= 2$

$3x_1+4x_2-2x_3+5x_4-2x_5= 8$

$-x_1-2x_2-3x_4= -6$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

$x_1+3x_2-x_3 = 3$

$-6x_1+x_2-x_3 = -6$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -14 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 22.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 2$

$x_1+4x_2-x_3+x_4-x_5= 4$

$x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5= 3$

$3x_1+5x_2-2x_3+2x_4-2x_5= 6$

$x_1-3x_2 = -2$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-x_1+3x_2-x_3 = 1$

$x_1+4x_2-x_3 = 4$

$3x_1+x_2-x_3 = 3$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&1\\1&3&5\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1&3&-3\\-1&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 23.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$

$2_1+x_2-6x_3+x_4-x_5= -3$

$3x_1+x_2-4x_3+x_4-x_5= 0$

$3x_1+2x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -2$

$-x_1+5x_3 = 4$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

$x_1+4x_2-x_3 = 4$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&0\\1&3&2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}4&3&-6\\-2&-1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 24.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$1x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=8$

$2x_1+3x_2-6x_3+x_4-x_5= -6$

$3x_1+3x_2-4x_3+x_4-x_5= 4$

$3x_1+2x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -4$

$-x_1+5x_3 = 8$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

$3x_1+4x_2-x_3 = 6$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

3. Решить матричное уравнение: $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Вариант № 25.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5=5$

$2x_1+4x_2-6x_3+x_4-x_5= 0$

$3x_1+3x_2-4x_3+x_4-x_5= 2$

$3x_1+2x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -2$

$-3x_1+5x_3 = 2$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+4x_2-x_3 = 1$

$3x_1+4x_2-x_3 = 6$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

3. Решить матричное уравнение: $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&0\\1&4&2\end{pmatrix}\; B=\begin{pmatrix}0&3&-6\\-2&-1&3\\1&2&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 26.

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+5x_2-x_3+x_4-x_5=4$

$2x_1+x_2-6x_3+x_4-x_5= -3$

$3x_1+2x_2-4x_3+x_4-x_5= 1$

$3x_1+6x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -2$

$-2x_1+5x_3 = 3$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+2x_2-x_3 = -1$

$2x_1+4x_2-x_3 = 5$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$

3. Решить матричное уравнение: $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix}2&3&3\\1&3&0\\1&3&2\end{pmatrix}\; B=\begin{pmatrix}5&3&-6\\-2&-1&3\\1&6&-1\end{pmatrix}.$$

Теоретические вопросы по теме: «Линейная алгебра»

1.Денйствия над матрицами.

2.Обратная матрица, алгоритм нахождения. Теорема существования и единственности.

3.Решение систем линейных уравнений матричным способом.

4.Теорема Крамера.

5.Метод Гаусса.

6.Решение однородных систем. Ранг матрицы.

7.Теорема Кронекера-Капелли.

Тема 2. ЭДЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Векторы и действия над ними.

1.1 Основные понятия

Вектором $\vec{a} = \overline{AB}$ называется направленный отрезок, где A – начало вектора, B – конец вектора.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|.$$

Вектор $\vec{e}$ называется **единичным**, если его длина равна единице

$$|\vec{e}| = 1.$$

Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору

Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}.$$

Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называются **противоположными**, если

$$|\vec{a}| = |-\vec{a}| \text{ и } \vec{a} \uparrow\downarrow -\vec{a}.$$

Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

1.2 Действия над векторами

1. Сложение векторов (рис. 2.1):
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

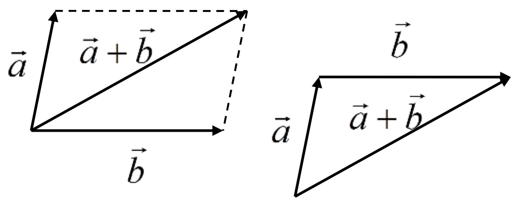


Рис. 2.1

2. Вычитание векторов (рис. 2.2):
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

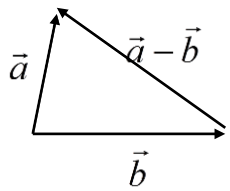


Рис. 2.2

3. Умножение на число (рис.2.3): $\lambda\vec{a} = \vec{b}$: $\vec{b} \parallel \vec{a}$,

$$\begin{cases} \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \text{ при } \lambda > 0, \\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \text{ при } \lambda < 0. \end{cases}$$

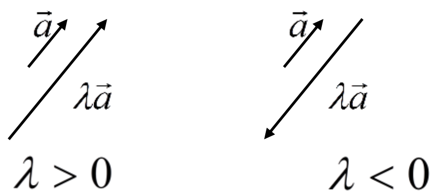


Рис. 2.3

4. Проекция вектора на ось (рис.2.4):

$$np_l\,\overline{AB} = \begin{cases} \overline{A_1B_1},\ \overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow l, \\ -\overline{A_1B_1},\ \overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow l. \end{cases}$$

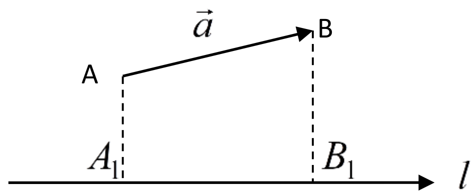


Рис. 2.4

Свойства проекции:

1. $np_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, l}\right)$;

2. $np_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$;

3. $np_l\lambda\vec{a} = \lambda \cdot np_l\vec{a}$.

Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

1.3 Декартова прямоугольная система координат

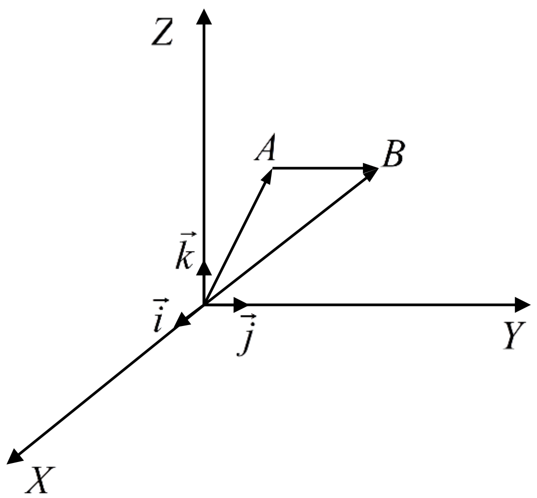


Рис. 2.5

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортонормированный базис, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (рис. 2.5).

$\vec{a} = \overline{AB} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$,

$a_x = \text{пр}_{OX}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha$,

$a_y = \text{пр}_{OY}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta$,

$a_z = \text{пр}_{OZ}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma$,

α, β, γ – углы $\vec{a}$ с осями OX, OY, OZ.

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Ортом вектора $\vec{a}$, называется вектор $\vec{a}^0$, если он удовлетворяет свойствам

$$\left|\vec{a}^0\right| = 1,\ \vec{a}^0 \uparrow\uparrow \vec{a}.$$

Его координаты находятся из соотношения

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Пусть заданы координаты точек $A(x_A, y_A, z_A),\ B(x_B, y_B, z_B)$ тогда

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}.$$

Если точка $M(x, y, z)$ **делит отрезок** ***AB*** **в соотношении λ/μ,** считая от *A*, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_A + \lambda x_B}{\mu + \lambda}, \quad y = \frac{\mu y_A + \lambda y_B}{\mu + \lambda}, \quad z = \frac{\mu z_A + \lambda z_B}{\mu + \lambda}.$$

В частности, при делении отрезка пополам:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2},\ y = \frac{y_A + y_B}{2},\ z = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

1. Сложение векторов:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}\ .$$

2. Умножение вектора на число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}\ .$$

3. Условие коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$.

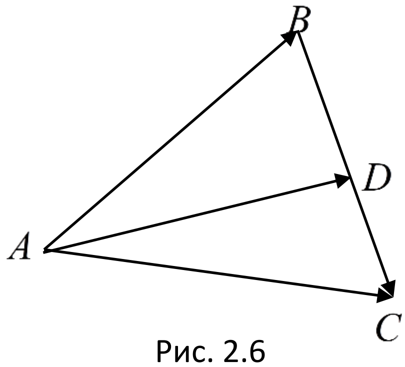


Рис. 2.6

Решение. $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \vec{c} - \vec{b}$ (рис. 2.6). Так как AD – медиана, то $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, следовательно, $\overline{BD} = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$.

Находим вектор $\overline{AD}$ как сумму векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$:

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \vec{b} + \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

Пример. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, приложены к общей точке. Найти орт вектора, равного $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Решение. $2\vec{a} = (4;\ -6;12)$, $\vec{b} = (-3;6;-6)$,

$$\vec{c} = \overrightarrow{2a} + \overrightarrow{3b} = (4-3,\ -6+6,\ 12-6) = (1,\ 0,\ 6).$$

Найдем длину вектора $\vec{c}$ $|\vec{c}| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (6)^2} = \sqrt{37}$, тогда орт

$$\vec{c}^{\,0} = \frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{0}{\sqrt{37}}, \frac{6}{\sqrt{37}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{37}}, 0, \frac{6}{\sqrt{37}}\right).$$

Пример. Даны векторы $\vec{a} = \{4,-1,5\}$, $\vec{b} = \{0,-2,1\}$ и $\vec{c} = \{-1,7,3\}$. Найти координаты вектора $2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$.

Решение.

$2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c} = 2\{4,-1,5\} - 5\{0,-2,1\} + \{-1,7,3\} =$
$= \{8,-2,10\} - \{0,-10,5\} + \{-1,7,3\} = \{7,15,8\}$.

Пример. Проверить, лежат ли точки $A(4,4,3)$, $B(0,-2,-3)$ и $C(8,10,9)$ на одной прямой.

Решение. Три точки будут лежать на одной прямой в том случае, когда векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ – коллинеарные. Найдем координаты векторов:

$\overline{AB} = \{0-4,-2-4,-3-3\} = \{-4,-6,-6\}$, $\overline{AC} = \{8-4,10-4,9-3\} = \{4,6,6\}$.

Координаты найденных векторов пропорциональны: $\frac{-4}{4} = \frac{-6}{6} = \frac{-6}{6} = -1$, т.е. $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{AC}$, а значит точки A, B, C лежат на одной прямой.

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{-2,3,6\}$.

Решение. Найдем длину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = 7$. Следовательно, $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{6}{7}$.

Пример. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют с осью l соответственно углы $\frac{2\pi}{3}$ и π. Найти проекцию вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$ на ось l, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$.

Решение.

$$np_l\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) = np_l\, 2\vec{a} + np_l\, 3\vec{b} = 2np_l\vec{a} + 3np_l\vec{b} =$$
$$= \{8,-2,10\} - \{0,-10,5\} + \{-1,7,3\} = \{7,15,8\}$$

Задания для решения в аудитории

1. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, если его начало совпадает с точкой M (1; 2;-3).

2. В треугольнике ОАВ даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, где M – середина стороны AB.

3. Даны точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$ *и* $D(5; -4; 2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее

другого и во сколько раз, как они направлены – в одну сторону или в противоположные.

4. Даны модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

5. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}\{12; -15; -16\}$.

6. Найти орт вектора $\vec{a} = \{3;\ 4;\ -12\}$.

7. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \{4, \alpha, -3\}$ и $\vec{b} = \{\beta, 1, -1\}$ коллинеарны?

8. По заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы: а) $\vec{b} - \vec{a}$; б) $2\vec{a} - \vec{b}$; в) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; г) $\dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{3}$.

9. В параллелограмме $ABCD$ даны стороны $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AD} = \vec{d}$. Выразить через $\vec{b}$ и $\vec{d}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ и $\overline{DB}$.

Ответы.

1. $N(4,1,1)$. 4. $(\sqrt{2}, 1, -2)$. 5. $\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$; $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\dfrac{16}{25}$.
6. $\vec{a} = \left(\dfrac{6}{7}, -\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$, 7. $\alpha = 3$, $\beta = 4/3$, 9. $\overline{BC} = \vec{d}$, $\overline{CB} = -\vec{d}$, $\overline{CD} = -\vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{b} + \vec{d}$, $\overline{BD} = \vec{d} - \vec{b}$, $\overline{DB} = \vec{b} - \vec{d}$.

Индивидуальные задания

Даны точки *A, B* и *C*. Разложить вектор $\vec{a}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Найти длину, направляющие косинусы и орт вектора $\vec{a}$.

1. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
2. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.
3. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.
4. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$.
5. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
6. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

7. $A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),$
$C(0;\ 1;\ 5),\ \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.$

8. $A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$
$\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}.$

9. $A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),$
$C(0;\ 1;\ 5), \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}.$

10. $A(1;\ 2;\ -1),\ B(1;\ 3;\ 4),\ C(0;\ 1;\ 5),$
$\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.$

11. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),$
$C(6;\ 3;\ 1),\ \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$

12. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}.$

13. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),$
$C(6;\ 3;\ 1), \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

14. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$
$\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}.$

15. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),$
$C(6;\ 3;\ 1),\ \vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$

16. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$
$\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}.$

17. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),$
$C(6;\ 3;\ 1),\ \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.$

18. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$
$\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}.$

19. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),$
$C(6;\ 3;\ 1),\ \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}.$

20. $A(4;\ 1;\ 0),\ B(2;\ -2;\ 1),\ C(6;\ 3;\ 1),$
$\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.$

21. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1), \vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.$

22. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}.$

23. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\ \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

24. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}.$

25. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\ \vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$

26. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}.$

27. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1), \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.$

28. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}.$

29. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\ \vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}.$

30. $A(-1;\ -2;\ 4),\ B(-4;\ -2;\ 0),$
$C(3;\ -2;\ 1),\quad \vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.$

§2. Нелинейные операции над векторами.

2.1 Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними (рис.2.6).

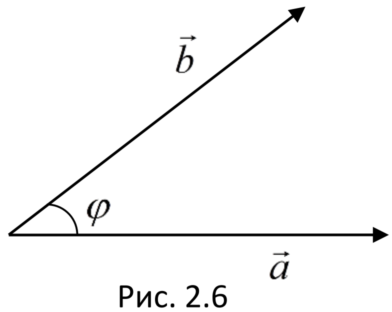


Рис. 2.6

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a,b)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Если заданы векторы $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Тогда из определения скалярного произведения следует

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительное);
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательное относительно числового множителя);
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (распределительное относительно суммы векторов);
4. $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$;
5. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Физический смысл скалярного произведения: если вектор $\vec{F}$ представляет силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа A этой силы определяется равенством $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

Геометрические приложения:

1. Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$;

2. Проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$: $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Пример. Найти $(5\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Решение.

$(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = =10$ $|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Решение. По условию задачи $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2). Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

Откуда по формуле

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 6, \quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

Решение.

$(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b}) = 15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15$ $|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 36 =$

$=240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

Решение. По условию $\vec{a}$ = (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, -3, -4). Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1.$$

Пример. На материальную точку действуют силы $\vec{f}_1 = -\vec{j}, \quad \vec{f}_2 = -\vec{i}, \quad \vec{f}_3 = -\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил

$\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2,-1,0)$ в положение $B(4,1,-1)$.

Решение. Найдем силу $\vec{R}$ и вектор перемещения

$$\vec{R}=\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\,,\ \vec{S}=\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\,.$$

Тогда искомая работа $A=\left(\vec{R},\vec{S}\right)=-2-2+1=-3$.

Пример. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=7\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$. Найти $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

Решение. Найдем координаты вектора

$$\vec{a}-2\vec{b}=\{4,-3,1\}-2\{7,5,-3\}=\{-10,-13,7\}.$$

Тогда

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=4\cdot(-10)-3\cdot(-13)+1\cdot7=-40+39+7=6\,.$$

Пример. Найти проекцию вектора $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

Решение. Проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ найдем по формуле

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{4-1+6}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{9}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\,.$$

2.2 Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением $\vec{a}\times\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (рис. 2.7), который:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Если заданы векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

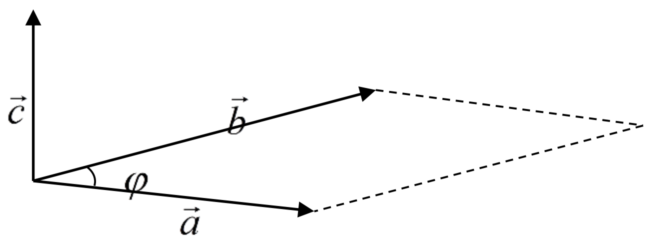


Рис. 2.7

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
4. $a \parallel b \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, т.е. векторы параллельны;

5. Если заданы векторы $\vec{a}$ *(x_a, y_a, z_a)* и $\vec{b}$ *(x_b, y_b, z_b)* в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Геометрические приложения:

1. площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|;$$

2. площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|;$$

Физический смысл векторного произведения.

Если A – неподвижная точка, B– точка приложения силы $\vec{F}$, то момент силы $\vec{F}$ относительно точки Aравен векторному произведению

$$M_A = \overline{AB} \times \vec{F},$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решение. По условию задачи $\vec{a}$ = (2, 5, 1) и $\vec{b}$ = (1, 2, -3). Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 2, 2)$, $B(4, 0, 3)$, $C(0, 1, 0)$.

Решение. Найдём координаты векторов, выходящих из одной вершины A

$$\overrightarrow{AC} = (0-2;1-2;0-2) = (-2;-1;-2), \overrightarrow{AB} = (4-2;0-2;3-2) = (2;-2;1).$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ равна

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|.$$

Вычислим векторное произведение

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) + \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Тогда модуль найденного векторного произведения

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$$

Следовательно, $S_{\Delta} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (кв.ед).

Пример. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $3\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\widehat{\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Площадь треугольника определяем по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|(3\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+3\vec{b})\right|.$$

После упрощения выражение примет вид

$$(3\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+3\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+9\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=$$
$$=9\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}=8(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Тогда $S=\dfrac{1}{2}\left|8(\vec{a}\times\vec{b})\right|=4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\dfrac{\pi}{3}=4\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$ (кв. ед).

2.3 Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Если заданы векторы

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

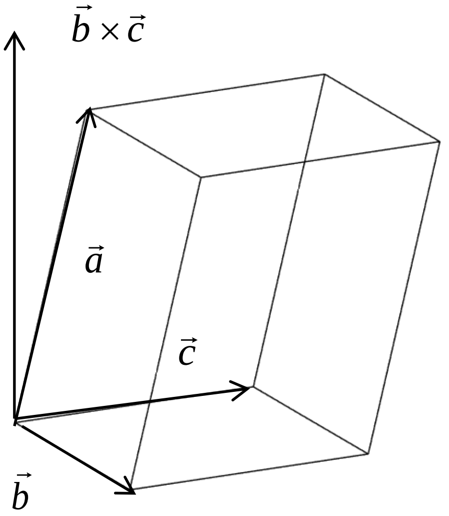
Свойства смешанного произведения:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;
3. $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Геометрические приложения.

1. Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

2. Объём треугольной пирамиды, построенной на $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:
$V=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Пример. Доказать, что точки $A(5;\,7;\,2)$, $B(3;\,1;\,-1)$, $C(9;\,4;\,-4)$, $D(1;\,5;\,0)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1),\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2),\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2).$$

Если точки лежат в одной плоскости, то смешанное произведение полученных векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны. Следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань *BCD*, если вершины имеют координаты *A*(0; 0; 1), *B*(2; 3; 5), *C*(6; 2; 3), *D*(3; 7; 2).

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-4), \overrightarrow{BD} = (1;4;-3), \overrightarrow{BC} = (4;-1;-2).$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) =$$

$$= \frac{1}{6}(22 + 30 + 68) = 20(\text{куб.ед}).$$

С другой стороны, объём пирамиды можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Тогда $V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot H = \frac{1}{6} \left| \overline{BD} \times \overline{BC} \right| \cdot H$. Отсюда длина высоты

$$H = \frac{6V}{\left| \overline{BD} \times \overline{BC} \right|}.$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \bar{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Тогда площадь грани равна

$$\left| \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}.$$

$S_{\text{осн}}$ = $\sqrt{510}/2$ (кв. ед). А значит длина высоты

$$H = \frac{6V}{\left| \overline{BD} \times \overline{BC} \right|} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17} (\text{ед}).$$

Задания для решения в аудитории

1. Найти длины сторон и величины углов ΔABC, если

$$A(1;1;-1),\ B(2;3;1),\ C(3;2;1).$$

2. Найти работу равнодействующей сил

$$\vec{f}_1=(1;-1;3),\quad \vec{f}_2=(2;1;3)$$

при перемещении её точки приложения из начала координат в точку $M(2;-1;0)$.

3. При каком значении α векторы

$$\vec{a}=(\alpha;-5;3),\ \vec{b}=(1;2;-\alpha)$$

перпендикулярны?

4. Дано: $|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=240^\circ$. Вычислить:

а) $\vec{a}^{\,2}$, б) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$, в) $(a+b)^2$.

5. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;-4),\ \vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, б) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$, в) $(a-b)^2$, г) $|2\vec{a}-\vec{b}|$, д) $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, е) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, ж) $\text{пр}_{\vec{a}-\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$, з) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

6. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\{4,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=-84$.

7. Упростить выражение: а) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{c}-\vec{b})$; б) $3\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})+2\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+7\vec{k}\cdot(\vec{i}\times\vec{j})$.

8. Дано: $|\vec{a}|=5,\quad |\vec{b}|=5,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=45^\circ$. Найти векторное произведение

$$(\vec{a}-2\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b}).$$

9. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;2),\ \vec{b}=(1;2;-1)$. Найти векторные произведения:

а) $(3\vec{a}-\vec{b})\times\vec{b}$, б) $(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})$.

10. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, где $|\vec{a}|=2,\quad |\vec{b}|=6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=150^\circ$.

11. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины B треугольника с вершинами $A(2;-4;21)$, $B(1;-6;3)$, $C(2;3;-2)$.

12. Сила $\vec{F}=\{-1,2,3\}$ приложена к точке $A(0,1,-1)$. Определить величину момента этой силы относительно точки $B(0,-3,2)$.

13. Доказать, что точки $A(3;5;1)$, $B(2;4;7)$, $C(1;5;3)$, $D(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.

14. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

15. Даны вершины пирамиды $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $D(2;2;2)$. Найти объём пирамиды и длину высоты, опущенной на грань *ABC*.

16. При каком λ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут компланарны? Если они равны соответственно $\vec{a}=(\lambda;3;1)$, $\vec{b}(5;-1;2)$, $\vec{c}=(-1;5;4)$.

Ответы.

1. 8/9; $\frac{1}{3\sqrt{2}}$; $\sqrt{2},3,3$. 2. A=2. 3. α=-5. 4. 9,-61,13. 5. а)22, б) -200, в)41, г) $\sqrt{105}$, д) $\frac{22}{6}$, е) $\frac{22}{7}$, ж) $\frac{55}{\sqrt{41}}$, з) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{11}{21}$. 6. $\{-16,-4,8\}$. 7. а) $5\sqrt{6}/3$, б) $45/7$. 8. $100\sqrt{2}$. 9. а) $(3\vec{a}-\vec{b})\times\vec{b}=(-6;10;14)$, б) $(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})=(-12;20;28)$. 10 48. 11. $H=\sqrt{\frac{66}{65}}$. 12. $\sqrt{349}$.

14. 1 ед^3., 15. $V=4$, $H=\frac{4}{\sqrt{3}}$ $S=3\sqrt{3}$. 16. λ=–3.

Индивидуальные задания

Задача. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Требуется найти:

1) длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;

2) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;

4) площадь грани *ABC*;

5) объем пирамиды *ABCD*.

1. $A(-2;\ 0;\ 4)$, $B(4;\ -3;\ -2)$, $C(7;-2;\ 2)$, $D(-1;\ 2;\ 6)$.
2. $\mathrm{A}(0;-1;\ 1)$, $\mathrm{B}(6;\ -4;\ -5)$, $\mathrm{C}(9;-3;\ -1)$, $\mathrm{D}(1;\ 1;\ 3)$.
3. $\mathrm{A}(-5;\ 1;\ 3)$, $\mathrm{B}(1\ -2;\ -3)$, $\mathrm{C}(4;-1;\ 1)$, $\mathrm{D}(-4;\ 3;\ 5)$.
4. $\mathrm{A}(-1;\ -3;\ 0)$, $\mathrm{B}(5;\ -6;\ -6)$, $\mathrm{C}(8;-5;\ -2)$, $\mathrm{D}(0;\ -1;\ 2)$.
5. $\mathrm{A}(1;\ 2;\ 5)$, $\mathrm{B}(7;\ -1;\ -1)$, $\mathrm{C}(10;0;\ 3)$, $\mathrm{D}(2;\ 4;\ 7)$.
6. $\mathrm{A}(-3;\ -2;-1)$, $\mathrm{B}(3;\ -5;\ -7)$, $\mathrm{C}(6;-4;\ -3)$, $\mathrm{D}(-2;\ 0;\ 1)$.
7. $\mathrm{A}(2;\ 3;\ 2)$, $\mathrm{B}(8;\ 0;\ -4)$, $\mathrm{C}(11;1;\ 0)$, $\mathrm{D}(3;\ 5;\ 4)$.
8. $\mathrm{A}(-4;\ 4;\ -2)$, $\mathrm{B}(2;\ 1;\ -8)$, $\mathrm{C}(5;2;\ -4)$, $\mathrm{D}(-3;\ 6;\ 0)$.
9. $\mathrm{A}(3;\ 5;-3)$, $\mathrm{B}(9;\ 2;\ -9)$, $\mathrm{C}(12;3;\ -5)$, $\mathrm{D}(4;\ 7;\ -1)$.
10. $\mathrm{A}(4;\ -4;\ 1)$, $\mathrm{B}(10;\ -7;\ -5)$, $\mathrm{C}(13;-6;\ -1)$, $\mathrm{D}(5;\ -2;\ 3)$.
11. $\mathrm{A}(4;\ 0;\ 4)$, $\mathrm{B}(0;\ 5;\ 0)$, $\mathrm{C}(0;0;\ 6)$, $\mathrm{D}(1;\ 3;\ -1)$.
12. $\mathrm{A}(-1;\ -3;\ 4)$, $\mathrm{B}(2;\ 3;\ -4)$, $\mathrm{C}(-3;1;\ -2)$, $\mathrm{D}(4;\ -1;\ 3)$.
13. $\mathrm{A}(0;\ 0;\ 0)$, $\mathrm{B}(2;\ 3;\ -1)$, $\mathrm{C}(-2;4;\ 5)$, $\mathrm{D}(3;\ -1;\ 4)$.
14. $\mathrm{A}(3;\ 2;\ -4)$, $\mathrm{B}(2;\ -5;\ 3)$, $\mathrm{C}(-5;6;\ -1)$, $\mathrm{D}(5;\ 2;\ 4)$.
15. $\mathrm{A}(6;\ 0;\ 1)$, $\mathrm{B}(-6;\ 2;\ -3)$, $\mathrm{C}(2;2;\ 4)$, $\mathrm{D}(3;\ 4;\ -2)$.
16. $\mathrm{A}(-4;\ 1;-4)$, $\mathrm{B}(0;\ -5;\ 0)$, $\mathrm{C}(0;0;-2)$, $\mathrm{D}(-1;\ 3;\ 1)$.
17. $\mathrm{A}(2;\ 3;\ 5)$, $\mathrm{B}(3;\ -2;\ 6)$, $\mathrm{C}(2;\ 2;\ -5)$, $\mathrm{D}(6;\ 3;\ -3)$.
18. $\mathrm{A}(5;\ -2;-1)$, $\mathrm{B}(3;\ 3;\ 4)$, $\mathrm{C}(3;-1;\ -2)$, $\mathrm{D}(0;\ -1;\ 2)$.
19. $\mathrm{A}(3;\ -1;\ -2)$, $\mathrm{B}(5;\ -2;\ -1)$, $\mathrm{C}(0;-1;\ 2)$, $\mathrm{D}(3;\ 3;\ 4)$.

20.	$A(5;\ 2;\ 4)$,	$B(-5;\ 6;\ -1)$,	$C(3;\ 2;\ -4)$,	$D(2;\ -5;\ 3)$.
21.	$A(4;\ 0;\ 0)$,	$B(-2;\ 1;\ 2)$,	$C(1;\ 3;\ 2)$,	$D(3;\ 2;\ 7)$.
22.	$A(4;\ 2;\ 5)$,	$B(0;\ 7;\ 1)$,	$C(0;\ 2;\ 7)$,	$D(1;\ 5;\ 0)$.
23.	$A(4;\ 4;\ 10)$,	$B(7;\ 10;\ 2)$,	$C(2;\ 8;\ 4)$,	$D(9;\ 6;\ 9)$.
24.	$A(4;\ 6;\ 5)$,	$B(6;\ 9;\ 4)$,	$C(2;\ 10;\ 10)$,	$D(7;\ 5;\ 9)$.
25.	$A(3;\ 5;\ 4)$,	$B(8;\ 7;\ 4)$,	$C(5;\ 10;\ 4)$,	$D(4;\ 7;\ 8)$.
26.	$A(10;\ 6;\ 6)$,	$B(-2;\ 8;\ 2)$,	$C(6;\ 8;\ 9)$,	$D(7;\ 10;\ 3)$.
27.	$A(1;\ 8;\ 2)$,	$B(5;\ 2;\ 6)$,	$C(5;\ 7;\ 4)$,	$D(4;\ 10;\ 9)$.
28.	$A(6;\ 6;\ 5)$,	$B(4;\ 9;\ 5)$,	$C(4;\ 6;\ 11)$,	$D(6;\ 9;\ 3)$.
29.	$A(7;\ 2;\ 2)$,	$B(5;\ 7;\ 7)$,	$C(5;\ 3;\ 1)$,	$D(2;\ 3;\ 7)$.
30.	$A(8;\ 6;\ 4)$,	$B(10;\ 5;\ 5)$,	$C(5;\ 6;\ 8)$,	$D(8;\ 10;\ 7)$.

Контрольная работа по теме: «Элементы векторной алгебры»

Вариант № 1

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,2,3), $\vec{a}_2$=(1,2,3), $\vec{a}_3$=(1,1,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора x=(3,0,-2) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(1,-2,5) и $\vec{b}$=(3,0-1) ? Если $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}+5\vec{q}$, если $|p|=2, |q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен π/6.

4. Даны вершины тетраэдра A(1,-2,3), B(2,-3,2), C(-1,4,2), D(-3,2,1). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(-1,3,4) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 2

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,1,-1), $\vec{a}_2$=(2,-3,1), $\vec{a}_3$=(-1,-2,-4) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(8,-1,9) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(3,4,-1) и $\vec{b}$ =(2,-1,1) ? Если $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$,$\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $4\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}$, если $|p|=2, |q|=1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(1,2,-3), *B*(-2,3,4), *C*(-5,1,1), *D*(1,3,-4). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(1,-2,3) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 3

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(1,2,0), $\vec{a}_2$=(0,-3,0), $\vec{a}_3$=(2,1,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(5,-6,3) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(-2,-3,-2) и $\vec{b}$ =(1,0,5) ? Если $\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b}$,$\vec{c}_2= -\vec{a}-3\vec{b}$

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $-2\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, если $|p|=3, |q|=1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(1,2,-3), *B*(-3,2,1), *C*(4,5,6), *D*(6,5,4). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(1,-3,4) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 4

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(3,3,1), $\vec{a}_2$=(2,-2,1), $\vec{a}_3$=(2,1,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(1,0,5) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(-1,4,2) и $\vec{b}$ =(3,-2,6) ? Если $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$,$\vec{c}_2= -6\vec{a}+3\vec{b}$

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p}-3\vec{q}$, если $|p|=4$,$|q|=2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $4\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра A(2,-3,1), B(3,2,1), C(1,2,3), D(-1,2,4). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC,проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(2,-3,4) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 5.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,1,1), $\vec{a}_2$=(0,2,2), $\vec{a}_3$=(-2,3,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(1,2,5) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(5,0,-1) и $\vec{b}$ =(7,2,3) ? Если $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$,$\vec{c}_2=-6\vec{a}+3\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b} =-3\vec{p}+2\vec{q}$, если $|p|=2$,$|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $5\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра A(-2,3,1), B(1,3,-1), C(2,3,4), D(-4,3,2). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(-2,3,4) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 6

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,0,1), $\vec{a}_2$=(1,1,-2), $\vec{a}_3$=(-1,5,2) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(1,3,4) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(0,3,-2) и $\vec{b}$ =(1,-2,1) ? Если $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$,$\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$.
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=-3\vec{p}+\vec{q}$, если $|p|=2, |q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/6$.
4. Даны вершины тетраэдра A(1,2,3), B(3,2,1), C(-2,3,-3), D(-3,1,-3). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC,проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}$ =(-3,4,5) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.
Вариант № 7.
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,1,-1), $\vec{a}_2$=(5,-1,2), $\vec{a}_3$=(1,2,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(-5,2,11) в этом базисе.
2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(-2,7,-1) и $\vec{b}$ =(-3,5,2) ? Если $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$,$\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$.
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $3\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, если $|p|=1, |q|=2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.
4. Даны вершины тетраэдра A(2,3,5), B(-2,3,4), C(-3,4,5), D(1,1,1). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}$ =(2,5,4) приложенной к точке A при перемещении ее в точку В Координаты точек следует взять из задания 4.
Вариант № 8
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(3,2,1), $\vec{a}_2$=(2,5,3), $\vec{a}_3$=(3,4,2) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(3,1,0) в этом базисе.
2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(3,7,0) и $\vec{b}$ =(1,-3,4) ? Если $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$,$\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, если $|p| = 2, |q| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2,1,3)$, $B(-3,2,1)$, $C(2,5,6)$, $D(-6,4,5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (1,2,3)$ приложенной к точке А при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 9.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (1,-2,3)$, $\vec{a}_2 = (2,1,4)$, $\vec{a}_3 = (3,1,-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (10,5,2)$ в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (-1,2-1)$ и $\vec{b} = (2,-7,1)$? Если $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = -3\vec{a} + \vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$, если $|p| = 2, |q| = 1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2,-2,3)$, $B(1,2,3)$, $C(-3,2,1)$, $D(3,2,-4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (3,-4,6)$ приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 10

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (0,2,-3)$, $\vec{a}_2 = (5,-1,4)$, $\vec{a}_3 = (2,1,-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (0,5,5)$ в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (7,9,-2)$ и $\vec{b} = (5,4,3)$? Если $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = -\vec{a} + 4\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, если $|p| = 3, |q| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(3,1,-3)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$, $D(-1,0,3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(1,-7,3)$ приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 11.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(3,4,5)$, $\vec{a}_2=(-3,-5,-6)$, $\vec{a}_3=(2,2,4)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(2,1,3)$ в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(5,0,-2)$ и $\vec{b}=(6,4,3)$? Если $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=-10\vec{a}+6\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=-2\vec{p}+3\vec{q}$, если $|p|=2$, $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $3\pi/3$

4. Даны вершины тетраэдра $A(3,4,1)$, $B(2,-3,4)$, $C(1,2,2)$, $D(-2,3,4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(2,-3,4)$ приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант №12

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(1,2,3)$, $\vec{a}_2=(2,-1,1)$, $\vec{a}_3=(-3,4,-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(0,5,2)$ в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(8,3,-1)$ и $\vec{b}=(4,1,3)$? Если $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=-4\vec{a}+2\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, если $|p|=3$, $|q|=4$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$, $C(-2,3,-4)$, $D(-4,2,-3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC,

проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(-3,4,-5) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 13.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,5,2), $\vec{a}_2$=(1,1,1), $\vec{a}_3$=(1,3,2) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(2,14,5) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(3,-1,6) и $\vec{b}$=(5,7,10) ? Если $\vec{c}_1$=4$\vec{a}$-2$\vec{b}$, $\vec{c}_2$=-2$\vec{a}+\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}$ -3$\vec{q}$ и $\vec{b}$ =2$\vec{p}$ +3$\vec{q}$, если $|p|$=2,$|q|$= 1и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 5*π*/3.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(3,2,1), *B*(-1,2,-3), *C*(4.2,-2), *D*(1,2,3). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(1,-5,4) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку В Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 14.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,3,-2), $\vec{a}_2$=(-1,-1,1), $\vec{a}_3$=(4,1,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(15,8,0) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(1,-2,4) и $\vec{b}$=(7,3,5) ? Если $\vec{c}_1$=6$\vec{a}$-3$\vec{b}$, $\vec{c}_2$=-2$\vec{a}+\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}$ +3$\vec{q}$ и $\vec{b}$ = - 4$\vec{p}$ +5$\vec{q}$, если $|p|$=2,$|q|$=4 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен *π*/4 .

4. Даны вершины тетраэдра *A*(2,1,4), *B*(-4,2,1), *C*(3,-2,6), *D*(6,-2,3). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$ =(3,-5,7) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 15.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(1,1,4), $\vec{a}_2$=(1,2,4), $\vec{a}_3$=(1,-1,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(1,-5,2) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(3,7,0) и $\vec{b}$ =(4,6,-1) ? Если $\vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}$,$\vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}$ -4$\vec{q}$, если $|p|$=3,$|q|$=2 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра A(2,-3,4), B(4,-3,2), C(1,2,3), D(-3,2,1). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$ =(1,-2,3) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 16.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(3,2,4), $\vec{a}_2$=(2,4,-3), $\vec{a}_3$=(-4,-5,2) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(8,11,1) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(2,-1,4) и $\vec{b}$ =(3,-7,-6) ? Если $\vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b}$,$\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}$ -3$\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}$ +3$\vec{q}$, если $|p|$=3,$|q|$=4 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/6$.

4. Даны вершины тетраэдра A(1,2,3), B(3,2,1), C(-4,2,-3), D(-3,4,-3). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(-4,4,-3) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 17.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,1,3), $\vec{a}_2$=(-4,-2,-1), $\vec{a}_3$=(3,4,5) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(1,3,2) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(5,-1,-2) и $\vec{b}$=(6,0,7) ? Если $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$,$\vec{c}_2= - 6\vec{a}+4\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p}-3\vec{q}$ и $\overline{b}=2\vec{p}+4\vec{q}$, если $|p|$=2,$|q|$=3 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(3,4,5), *B*(5,4,3), *C*(-1,-3,1), *D*(1,-2,4). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(7,-3,4) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 18.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,3,1), $\vec{a}_2$=(-1,2,-2), $\vec{a}_3$=(1,2,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(2,-2,1) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(-9,5,3) и $\vec{b}$=(7,1,-2) ? Если $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$,$\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p}-5\vec{q}$ и $\overline{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, если $|p|$=4,$|q|$=4 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(2,5,6), *B*(6,5,2), *C*(-1,-2,-3), *D*(1,0,6). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(2,4,-5) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку В. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 19.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(1,2,1), $\vec{a}_2$=(2,-1,3), $\vec{a}_3$=(3,-1,4) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(5,1,6) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(4,2,9) и $\vec{b}$ =(0,-1,3) ? Если $\vec{c}_1$=4$\vec{a}$-3$\vec{b}$,$\vec{c}_2$=4$\vec{a}$-3$\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ =- 4$\vec{p}$+3$\vec{q}$ и $\overline{b}=\vec{p}$-$\vec{q}$, если $|p|$=3,$|q|$=2 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $4\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра A(2,4,6), B(6,4,-2), C(1,-1,0), *D*(0,2,3). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(2,-4,7) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 20.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,1,7), $\vec{a}_2$=(1,-2,1), $\vec{a}_3$=(-1,2-1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(5,-5,10) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(2,-1,6) и $\vec{b}$ =(-1,3,8) ? Если $\vec{c}_1$=5$\vec{a}$-2$\vec{b}$,$\vec{c}_2$=2$\vec{a}$-5$\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}+\vec{q}$ и $\overline{b}=\vec{p}$-4$\vec{q}$, если $|p|$=3,$|q|$=1 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(2,-1,-1), *B*(0,2,-3), *C*(-3,2,0), *D*(0,0,1). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(1,-2,4) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 21.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(3,1,4), $\vec{a}_2$=(2,1,-1), $\vec{a}_3$=(1,-1,5) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(5,0,3) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(5,0,8) и $\vec{b}$ =(-3,1,7) ? Если $\vec{c}_1$=3$\vec{a}$-4$\vec{b}$,$\vec{c}_2$= - 9$\vec{a}$+12$\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}$ - 4$\vec{q}$ и $\vec{b}$ = -3 $\vec{p}+\vec{q}$, если $|p|$=4,$|q|$=1 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $3\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(-2,1,0), *B*(-4,1,3), *C*(3,1,-4), *D*(0,0,0). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(-2,0,3) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 22.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(1,2,1), $\vec{a}_2$=(1,3,-2), $\vec{a}_3$=(-2,1,-1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(1,0,7) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(-1,3,4) и $\vec{b}$ =(2,-1,0) ? Если $\vec{c}_1$=6$\vec{a}$-2$\vec{b}$,$\vec{c}_2$=-3$\vec{a}+\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}$ - 2$\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}$ +3$\vec{q}$, если $|p|$=5,$|q|$=2 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра *A*(1,2,3), *B*(3,2,1), *C*(-1,-2,-3), *D*(0,0,0). Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overline{AB}$ на основание $\overline{BC}$, угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}$=(1,5,-6) приложенной к точке *A* при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 23.

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(4,1,-2), $\vec{a}_2$=(2,-3.0), $\vec{a}_3$=(3,-1,-2) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(7,-1,-3) в этом базисе.

2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(1,4.-2) и $\vec{b}$ =(1,1.-1) ? Если $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$,$\vec{c}_2$ =4$\vec{a}$ +2$\vec{b}$.
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $\vec{p}$ -2$\vec{q}$ и $\vec{b}$ =3$\vec{p}$ +2$\vec{q}$, если $|p|$=2,$|q|$=3 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен π/4.
4. Даны вершины тетраэдра A(2,-2,3), B(1,1,-2), C(0,0,-1), D(1,2.3). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}$ =(3,4.1) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.
Вариант № 24.
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(1,0,1), $\vec{a}_2$=(1,1,0), $\vec{a}_3$=(1,2.1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$ =(3,-5,1) в этом базисе.
2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(3,5,4) и $\vec{b}$ =(5,9,7) ? Если $\vec{c}_1$=-2$\vec{a}$+$\vec{b}$,$\vec{c}_2$ =3$\vec{a}$ -2$\vec{b}$.
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = 2$\vec{p}$ -3$\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p}$ +4$\vec{q}$, если $|p|$=3,$|q|$=3 и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен π/3.
4. Даны вершины тетраэдра A(1,-2,3), B(-2,1,2), C(0,-4,1), D(1,2,3). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}$ =(2,3,-2) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.
Вариант № 25.
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(2,2,1), $\vec{a}_2$=(1,-3,1), $\vec{a}_3$=(-1,0,-1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$ =(3,-1,5) в этом базисе.
2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ =(1,2,-3) и $\vec{b}$ =(2,-1,-1) ? Если $\vec{c}_1$=4$\vec{a}$+3$\vec{b}$,$\vec{c}_2$ =8$\vec{a}$ -$\vec{b}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\bar{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, если $|p|=1, |q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.
4. Даны вершины тетраэдра A(1,-2,3), B(0,2.3), C(-2,3,1), D(-2,1,3). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}$=(-2,2,3) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.
Вариант № 26.
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1$=(1,1.1), $\vec{a}_2$=(0,1,12), $\vec{a}_3$=(0,0,1) образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}$=(5,6,-3) в этом базисе.
2. Коллениарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$=(-2,4,1) и $\vec{b}$ =(1,-2,7) ? Если $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}$.
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\bar{b} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$, если $|p|=3, |q|=4$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/6$.
4. Даны вершины тетраэдра A(3,-2,4), B(1,2.-3), C(4.1,2), D(-2,3,4). Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overline{A}\overline{B}$ на основание $\overline{B}\overline{C}$, угол между векторами $\overline{A}\overline{D}$ и $\overline{A}\overline{C}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}$=(4,-3,2) приложенной к точке A при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Теоретические вопросы по теме: «Элементы векторной алгебры»

1. Линейное пространство, примеры.
2. Векторы, проекция вектора на ось, свойства операций над векторами.
3. Скалярное произведение векторов.
4. Векторное произведение векторов.
5. Смешанное произведение векторов.

Тема 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§1. Плоскость в пространстве

1.1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$***, перпендикулярно вектору*** $\vec{N} = \{A, B, C\}$**.**

Покажем, что это уравнение можно привести к виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

Действительно, пусть $M(x, y, z)$– произвольная точка на искомой плоскости. Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) .$$

Т.к. вектор $\vec{N}$ – вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0 M}$. Тогда скалярное произведение

$$\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{N} = 0.$$

Вычислив скалярное произведение, получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 ,$$

где $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – *нормальный вектор* плоскости (рис. 3.15).

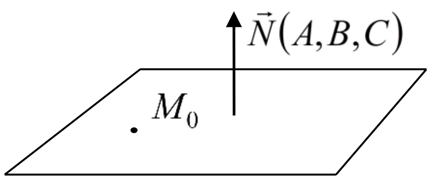


Рис. 3.15

Раскрыв в последнем равенстве скобки, получим *общее уравнение плоскости:*

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

1.2. Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на (-D)

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

заменив $-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – абсцисса, ордината, аппликата точек пересечения плоскостью координатных осей.

1.3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка $M(x,y,z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0.$$

Найдём эти векторы

Таким образом,

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.4. Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Определение. *Углом между плоскостями* называется любой из двух смежных двугранных углов, образованных плоскостями при их пересечении. Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0 или π радиан.

Рассмотрим плоскости

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1) \text{ и}$$
$$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2).$$

Очевидно угол между плоскостями,

$$\varphi=(\alpha_1,\alpha_2)=\left(\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\right)$$

или

$$\cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right|\cdot\left|\overline{N}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\vec{N}_1 \,||\, \vec{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\vec{N}_1\perp\vec{N}_2 \Rightarrow \vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0 \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

1.5. Расстояние от точки (x_0,y_0,z_0) *до плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

1.6. Примеры решения задач

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,0,-3)$, $M_2(4,-1,2)$, $M_3(2,-2,1)$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 4-1 & -1-0 & 2+3 \\ 2-1 & -2-0 & 1+3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки имеем:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, 6(x-1) - 7y - 5(z+3) = 0.$$

Окончательно получим уравнение искомой плоскости $6x - 7y - 5z - 21 = 0$.

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка P(4; -3; 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Решение.

$\overrightarrow{OP} = (4;-3;12)$; $\qquad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13$

$\overrightarrow{N} = (\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13})$.

Таким образом, A = 4/13; B = -3/13; C = 12/13, воспользуемся формулой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\frac{4}{13}(x-4) - \frac{3}{13}(y+3) + \frac{12}{13}(z-12) = 0.$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{16}{13} - \frac{3}{13}y - \frac{9}{13} + \frac{12}{13}z - \frac{144}{13} = 0,$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{169}{13} = 0,$$

$$4x - 3y + 12z - 169 = 0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P(2; 0; -1) и Q(1; -1; 3) перпендикулярно плоскости
$3x + 2y - z + 5 = 0$.

Решение.

Вектор нормали к плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$ $\overrightarrow{N} = (3;2;-1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0,$$

$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0,$$

$$-7x + 14 + 11y + z + 1 = 0,$$

$$-7x + 11y + z + 15 = 0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,1)$ и перпендикулярной плоскостям $3x + y - 5z - 7 = 0$ и $x + 2y - 3z + 8 = 0$.

Решение. Нормальный вектор $\vec{N}$ искомой плоскости будет перпендикулярен нормальным векторам $\vec{N}_1 = \{3,1,-5\}$ и $\vec{N}_2 = \{1,2,-3\}$ заданных плоскостей, поэтому вектор $\vec{N}$ найдем как векторное произведение векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$.

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\ .$$

Далее воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,1)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{7,4,5\}$:

$7(x+1) + 4(y-2) + 5(z-1) = 0$ или $7x + 4y + 5z - 6 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Пример. Дан тетраэдр с вершинами $A(1,-3,4)$, $B(0,-2,-1)$, $C(1,1,-1)$ и $D(1,-3,2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Длину высоты, опущенной из вершины D, найдем как расстояние от точки D до плоскости ABC.

Составим уравнение плоскости ABC, используя уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ 0-1 & -2+3 & -1-4 \\ 1-1 & 1+3 & -1-4 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки: $15(x-1)-5(y+3)-4(z-4)=0 \Rightarrow 15x-5y-4z-14=0$.

Находим расстояние от точки $D(1,-3,2)$ до плоскости $15x-5y-4z-14=0$: $d=\dfrac{|15\cdot 1-5\cdot(-3)-4\cdot 2-14|}{\sqrt{15^2+(-5)^2+(-4)^2}}\approx 0{,}5$.

Пример.

Найти расстояние от точки $M_0(1,\,-2,\,3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3,\ -1,\ 2)$, $M_2(4,\ -1,\ -1)$, $M_3(2,\ 0,\ 2)$.

Решение. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1, M_2,\ M_3$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по первой строке:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0$; $3x+3y+z-9+3-2=0$; $3x+3y+z-8=0$.
Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости $3x+3y+z-8=0$.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|3\cdot 1-3\cdot 2+3-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

Пример. Какой угол образуют плоскости $\alpha_1: x-2y-z+4=0$, $\alpha_2: 3x+y-2z-7=0$?

Решение. Угол между плоскостями есть угол между нормальными векторами заданных плоскостей. По условию задачи

$$\vec{N}_1=(1;-2;-1), \text{ а } \vec{N}_2=(3;1;-2).$$

Тогда их скалярное произведение равно

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 3 - 2 + 2 = 3$$

$$\left|\vec{N}_1\right| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}, \quad \left|\vec{N}_2\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Какой угол образуют плоскости

$\alpha_1 : x + y - 1 = 0$, $\alpha_2 : 2x - y + \sqrt{3}z + 1 = 0$?

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(1, \;\; 4, \;\; -7)$ и перпендикулярно вектору $\vec{N} = \left\{2; \;\; -1; \;\; 3\right\}$.

3. Установить, что плоскости

$x - y - z - 10 = 0$, $4x + 11z + 43 = 0$, $7x - 5y - 31 = 0$

имеют единственную общую точку. Найти её.

4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(2; \;\; -3; \;\; -7)$ параллельно плоскости

$$2x - 6y - 3z + 5 = 0.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;5)$ и перпендикулярно линии пересечения плоскостей

$$2x + y - 2z + 1 = 0 \text{ и } x + y + z - 5 = 0.$$

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(1;2;3),\; M_2(4;-1;-2),\; M_3(4;0;3).$$

7. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x - 2y + 5z + 12 = 0$ и $6x - 4y + 10z + 45 = 0$.

Ответы.

1. $\varphi = \arccos\frac{1}{4}$. 2. $2x - y + 3z + 23 = 0$. 3. $M(3, \ -2, \ -5)$.
4. $2x - 6y - 3z - 43 = 0$. 5. $3x - 4y + z - 23 = 0$. 6.
$-10x - 15y + 3z + 31 = 0$. 7. 1,7.

Индивидуальные задания

Задача 1. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2 и M_3:

1. $M_1(-3,\ 4,\ -7)$, $M_2(1,\ 5,\ -4)$, $M_3(-5,\ -2,\ 0)$, $M_0(-12,\ 7,\ -1)$.
2. $M_1(-1,\ 2,\ -3)$, $M_2(4,\ -1,\ 0)$, $M_3(2,\ 1,\ -2)$, $M_0(1,\ -6,\ -5)$.
3. $M_1(-3,\ -1,\ 1)$, $M_2(-9,\ 1,\ -2)$, $M_3(3,\ -5,\ 4)$, $M_0(-7,\ 0,\ -1)$.
4. $M_1(1,\ -1,\ 1)$, $M_2(-2,\ 0,\ 3)$, $M_3(2,\ 1,\ -1)$, $M_0(-2,\ 4,\ 2)$.
5. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(1,\ -1,\ 2)$, $M_3(0,\ 1,\ -1)$, $M_0(2,\ -1,\ 4)$.
6. $M_1(1,\ 0,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(2,\ -2,\ 1)$, $M_0(-5,\ -9,\ 1)$.
7. $M_1(1,\ 2,\ -3)$, $M_2(1,\ 0,\ 1)$, $M_3(-2,\ -1,\ 6)$, $M_0(3,\ -2,\ -9)$.
8. $M_1(3,\ 10,\ -1)$, $M_2(-2,\ 3,\ -5)$, $M_3(-6,\ 0,\ -3)$, $M_0(-6,\ 7,\ -10)$.
9. $M_1(-1,\ 2,\ 4)$, $M_2(-1,\ -2,\ -4)$, $M_3(3,\ 0,\ -1)$, $M_0(-2,\ 3,\ 5)$.
10. $M_1(0,\ -3,\ 1)$, $M_2(-4,\ 1,\ 2)$, $M_3(2,\ -1,\ 5)$, $M_0(-3,\ 4,\ -5)$.
11. $M_1(1,\ 3,\ 0)$, $M_2(4,\ -1,\ 2)$, $M_3(3,\ 0,\ 1)$, $M_0(4,\ 3,\ 0)$.
12. $M_1(-2,\ -1,\ -1)$, $M_2(0,\ 3,\ 2)$, $M_3(3,\ 1,\ -4)$, $M_0(-21,\ 20,\ -16)$.
13. $M_1(-3,\ -5,\ 6)$, $M_2(2,\ 1,\ -4)$, $M_3(0,\ -3,\ -1)$, $M_0(3,\ 6,\ 68)$.
14. $M_1(1,\ 5,\ -7)$, $M_2(-3,\ 6,\ 3)$, $M_3(-2,\ 7,\ 3)$, $M_0(1,\ -1,\ 2)$.
15. $M_1(1,\ -1,\ 2)$, $M_2(2,\ 1,\ 2)$, $M_3(1,\ 1,\ 4)$, $M_0(-3,\ 2,\ 7)$.
16. $M_1(1,\ 3,\ 6)$, $M_2(2,\ 2,\ 1)$, $M_3(-1,\ 0,\ 1)$, $M_0(5,\ -4,\ 5)$.

17. $M_1(-4,\ 2, 6)$, $M_2(2,\ -3,\ 0)$, $M_3(-10,\ 5,\ 8)$, $M_0(-12,\ 1, 8)$.

18. $M_1(7,\ 2,\ 4)$, $M_2(7,\ -1,\ -2)$, $M_3(-5, -2, -1)$, $M_0(10,\ 1,\ 8)$.

19. $M_1(2,\ 1,\ 4)$, $M_2(3,\ 5,\ -2)$, $M_3(-7,\ -3,\ 2)$, $M_0(-3,\ 1, 8)$.

20. $M_1(-1,\ -5,\ 2)$, $M_2(-6,\ 0, -3)$, $M_3(3,\ 6, -3)$, $M_0(10,\ -8, -7)$.

21. $M_1(0, -1, -1)$, $M_2(-2,\ 3, 5)$, $M_3(1, -5, -9)$, $M_0(-4, -13,\ 6)$.
22. $M_1(5,\ 2,\ 0)$, $M_2(2,\ 5,\ 0)$, $M_3(1,\ 2,\ 4)$, $M_0(-3,\ -6,\ -8)$.
23. $M_1(2,\ -1,\ -2)$, $M_2(1,\ 2,\ 1)$, $M_3(5,\ 0,\ -6)$, $M_0(14,\ -3,\ 7)$.
24. $M_1(-2,\ 0,\ -4)$, $M_2(-1,\ 7,\ 1)$, $M_3(4,\ -8,\ -4)$, $M_0(-6,\ 5,\ 5)$.

25. $M_1(14,\ 4,\ 5)$, $M_2(-5,\ -3,\ 2)$, $M_3(-2, -6, -3)$, $M_0(-1, -8,\ 7)$.

26. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(3,\ 0,\ -3)$, $M_3(5,\ 2,\ 6)$, $M_0(-13,\ -8,\ 16)$.

27. $M_1(2,\ -1,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(3,\ 2,\ 1)$, $M_0(-5,\ 3,\ 7)$.
28. $M_1(1,\ 1,\ 2)$, $M_2(-1,\ 1,\ 3)$, $M_3(2, -2,\ 4)$, $M_0(2, 3,\ 8)$.
29. $M_1(2, 3,\ 1)$, $M_2(4,\ 1,\ -2)$, $M_3(6,\ 3,\ 7)$, $M_0(-5, -4,\ 8)$.

30. $M_1(1,\ 1, -1)$, $M_2(2, 3,\ 1)$, $M_3(3,\ 2,\ 1)$, $M_0(-3, -7,\ 6)$.

Задача 2. Найти угол между плоскостями:

1. $x-3y+5=0,\ \ 2x-y+5z-16=0$.
2. $x-3y+z-1=0,\ \ \ x+z-1=0$.
3. $4x-5y+3z-1=0,\ x-4y-z+9=0$.
4. $3x-y+2z+15=0,\ 5x+9y-3z-1=0$.
5. $6x+2y-4z+17=0, 9x+3y-6z-4=0$.
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\ \ x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
7. $3y-z=0,\ \ 2y+z=0$.
8. $6x+3y-2z=0,\ x+2y+6z-12=0$.
9. $x+2y+2z-3=0, 16x+12y-15z-1=0$
10. $2x-y+5z+16=0,\ x+2y+3z+8=0$.

11. $2x+2y+z-1=0,\ x+z-1=0$.
12. $3x+y+z-4=0,\ x+2y+3z+8=0$.
13. $3x-2y-2z-16=0,\ x+y-3z-7=0$.
14. $2x+2y+z+9=0,\ x-y+3z-1=0$.
15. $x+2y+2z-3=0,\ 2x-y+2z+5=0$.
16. $3x+2y-3z=0,\ \ x+y+z-7=0$.
17. $x-3y-2z-8=0,\ \ x+y-z+3=0$.
18. $3x-2y+3z+23=0,\ \ y+z+5=0$.
19. $x+y+3z-7=0,\ \ y+z-1=0$.
20. $x-2y+2z+17=0,\ x-2y-1=0$.
21. $x+2y-1=0,\ \ x+y+6=0$.
22. $2x-z+5=0,\ \ 2x+3y-7=0$.
23. $5x+3y+z-18=0,\ \ 2y+z-9=0$.
24. $4x+3z-2=0,\ \ x+2y+2z+5=0$.
25. $x+4y-z+1=0,\ \ 2x+y+4z-3=0$.
26. $2y+z-9=0,\ \ x-y+2z-1=0$.
27. $2x-6y+14z-1=0,\ 5x-15y+35z-3=0$.
28. $x-y+7z-1=0,\ \ 2x-2y-5=0$.
29. $3x-y-5=0,\ \ 2x+y-3=0$.
30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0, x-y+z\sqrt{2}-1=0\,2$.

§2 Прямая в пространстве

2.1. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

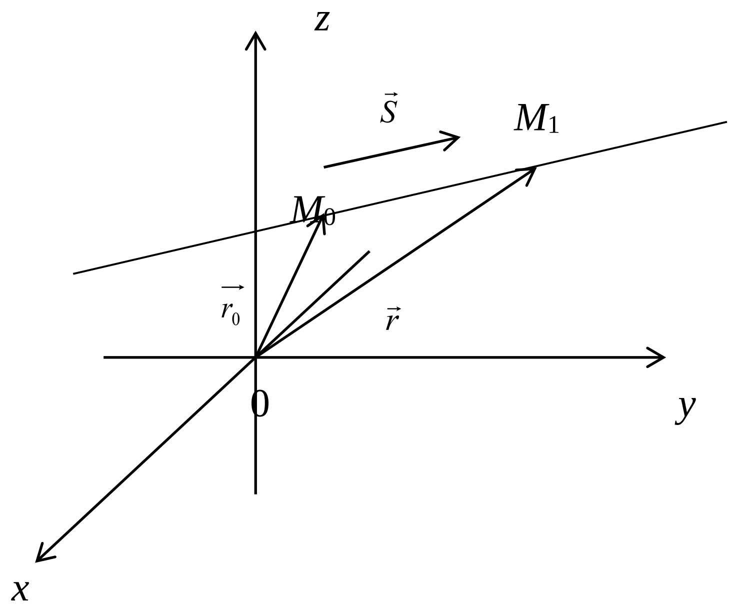
Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно вектору $\vec{s}=\{m, n, p\}$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Вектор $\vec{s}=\{m, n, p\}$ называется направляющим вектором прямой.

Действительно

На прямой дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, возьмём произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}$.



Найдём координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.
Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарные, то отношение их координат пропорционально, т.е. верно соотношение:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

В силу того что этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение является ***каноническим уравнением прямой***.

2.2. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) ***параллельно вектору*** $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

В каноническое уравнении прямой приравняем, полученные отношения координат векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ произвольному параметру *t*, получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Выразим координаты произвольной точки через параметр *t*, получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases},$$

где $t \in (-\infty;+\infty)$. Эта система равенств позволяет определить любую точку на прямой при соответствующем значении параметра *t* и носит название параметрического уравнения прямой.

2.3. Общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq 0.$$

Это уравнение прямой рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей с нормалями $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ соответственно.

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

2.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой. Подставим в это уравнение координаты точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Кроме того, для координаты точки M_1 удолетворяют тому же уравнению прямой:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

2.5. Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_2}=\frac{z-z_1}{p_3},$$

$$l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

$$\overrightarrow{S_1}=(m_1,n_1,p_1);\quad \overrightarrow{S_2}=(m_2,n_2,p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi=\varphi_1$ или $\varphi=180^0-\varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi=\pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых: $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \;\Rightarrow\; \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \;\Rightarrow$ $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

2.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

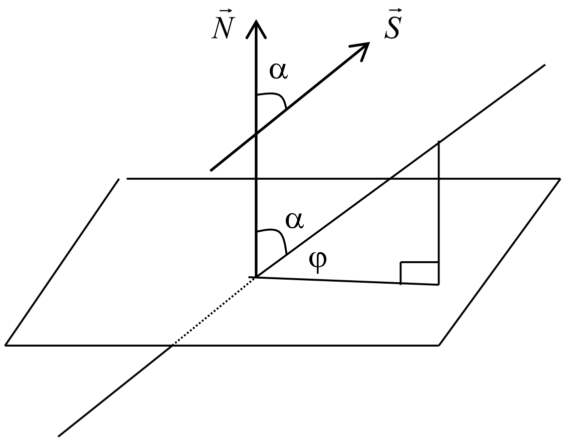
Угол между прямой $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* $Ax + By + Cz + D = 0$ находится из соотношения:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Действительно, пусть плоскость задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая - $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$.



Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол α = 90^0 - φ, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$ или $\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\dfrac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$.

В координатной форме: $\sin\varphi = \pm\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Условие параллельности прямой и плоскости: $\vec{N}\perp\vec{s} \Rightarrow \vec{N}\cdot\vec{s}=0$ $\Rightarrow Am+Bn+Cp=0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\vec{N}\,||\,\vec{s} \Rightarrow$ $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

Условие принадлежности прямой плоскости:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$$

2.7. Примеры решения задач

Пример. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-2,2)$ параллельно оси Oy.

Решение. Вектор $\vec{j}=\{0,1,0\}$, расположенный на оси Oy по условию параллелен прямой. Поэтому его можно считать направляющим вектором этой прямой. Составим каноническое уравнение прямой, где $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=2$; $\vec{s}=\vec{j}=\{0,1,0\}$, т. е. $m=0$ $n=1$, $p=0$: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{0}$.

Для нахождения параметрических уравнений прямой составляем уравнения: $\dfrac{x-1}{0}=t,\ \dfrac{y+2}{1}=t,\quad \dfrac{z-2}{0}=t,\quad \Rightarrow \begin{cases} x=1+0\cdot t, \\ y=-2+1\cdot t, \\ z=2+0\cdot t, \end{cases}$ или

$\begin{cases} x=1, \\ y=-2+t, \\ z=2, \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой, где $-\infty<t<+\infty$.

Пример.

Решение.

Уравнения полученной прямой запишем в параметрической форме. Приравнивая каждое из отношений параметру t, получим:

$$\frac{x-1}{-1}=t, \frac{y+3}{7}=t, \frac{z-5}{-7}=t .$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x=1-t, \\ y=-3+7t, \\ z=5-7t, \end{cases}$$

где $-\infty<t<+\infty$.

Пример. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(1;-2;0)$, $C(-3;2;2)$. Составить канонические уравнение медианы AP

Решение. точка P делит сторону AC пополам. Поэтому координаты точки P равны полусуммам координат B и C.

$$x_P=\frac{1-3}{2}=-1,\ y_P=\frac{-2+2}{2}=0,\ z_P=\frac{0+2}{2}=1.$$

Следовательно, $P(-1;0;1)$. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точки A и P.

Если прямую ℓ проходит через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то её уравнение имеет вид:

$$\ell: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляя координаты точек A и P , получим:

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{0-3}=\frac{z+1}{1+1} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{2}.$$

Пример. Написать уравнения прямой ℓ, которая проходит через точку $M(1;-2;3)$ параллельно прямой ℓ_1: $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-5}$.

Решение. Так как прямые параллельны ($\ell \parallel \ell_1$), то их направляющие векторы $\vec{s} \parallel \vec{s_1}$. Это значит, что в качестве направляющего вектора прямой ℓ

можно взять вектор $\vec{s_1} = (1{,}3{,}-5)$. Тогда канонические уравнения искомой прямой имеют вид

$$\ell: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}.$$

Пример. Написать уравнение прямой, которая проходит через точки $M_1(1;-3;5)$ и $M_2(0;4;-2)$.

Решение. Если прямую ℓ проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то её уравнение имеет вид:

$$\ell: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляя координаты заданных точек, получим:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+3}{4+3} = \frac{z-5}{-2-5} \qquad \text{или} \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-5}{-7}.$$

Уравнения полученной прямой запишем в параметрической форме. Приравнивая каждое из отношений параметру t, получим:

$$\frac{x-1}{-1} = t, \frac{y+3}{7} = t, \frac{z-5}{-7} = t.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -3 + 7t, \\ z = 5 - 7t, \end{cases}$$

где $-\infty < t < +\infty$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определим координаты какой-либо точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, лежащей на прямой. Для этого положим в обеих уравнениях $z_0 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 = 4, \\ 3x_0 + 2y_0 = 4. \end{cases}$$

Отсюда найдем $x_0 = 2$ и $y_0 = -1$. Таким образом, $M_0(2;-1;0)$. Найдем направляющий вектор прямой $\vec{s}$. Он должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей $\vec{N}_1 = \{1;-2;3\}$ и $\vec{N}_2 = \{3;2;-5\}$. Следовательно, в качестве вектора $\vec{s}$ берем векторное произведение векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$.

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = .$$

$= 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}.$

Запишем канонические уравнения:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

Пример. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Решение. Приведем уравнения прямой к параметрическому виду:

$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} = t$; $\quad \frac{x-12}{4} = t \Rightarrow x = 12 + 4t$;

$\frac{y-9}{3} = t \Rightarrow y = 9 + 3t$; $\frac{z-1}{1} = t \Rightarrow z = 1 + t$, т. е. параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдем t:

$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0; \quad t = -3.$

Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты

$x_0 = 12 + 4(-3) = 0$; $y_0 = 9 + 3(-3) = 0$; $z_0 = 1 - 3 = -2$, т. е. $M(0;\ 0;\ -2)$.

Задачи для решения в аудитории

1. Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(-1;0;-5)$, $B(1;2;0)$, и плоскостью $x - 3y + z + 5 = 0$.

2. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0, \\ x - 2y + 3z + 3 = 0. \end{cases}$$

3. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и плоскостью $3x + 5y - z - 2 = 0$. Вычислить угол между прямой и плоскостью.

4. Вычислить угол между прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z}{4}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $A(4,1,-1)$.

Ответы

1. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{33} \approx 3^\circ$. 2. $\dfrac{x-1}{11} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z}{-7}$. 3. (0,0,–2), $\arcsin 0{,}9$.
4. $\arccos 0{,}04$.

Индивидуальные задания

Задача 1. Написать канонические уравнения прямой:

1. $\begin{cases} 2x - y - 3z + 1 = 0, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 8x + 3y - 6z - 2 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 4x - 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 5y - 3z - 4 = 0, \\ 4x - 3y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 7y - z - 8 = 0, \\ x + 2y + z - 4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z - 8 = 0, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 4y - 3z + 3 = 0, \\ 3x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x+2y+z-4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+y+z-5=0, \\ 4x-3y+z-1=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-3y+2z+2=0, \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0, \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0, \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0, \\ x+y+z+10=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$

Задача 2. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ и $x+2y+3z-14=0$.

2. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$ и $x+2y-5z+20=0$.

3. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ и $x-3y+7z-24=0$.

4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$ и $2x-y+4z=0$.

5. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$ и $3x+y-5z-12=0$.

6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+3y-5z+9=0$.

7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ и $x-2y+5z+17=0$.

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$ и $x-2y+4z-19=0$.

9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-y+3z+23=0$.

10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и $2x-3y-5z-7=0$.

11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и $4x+2y-z-11=0$.

12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$ и $3x-2y-4z-8=0$.

13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и $x+2y-z-2=0$.

14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$ и $5x-y+4z+3=0$.

15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и $x+3y+5z-42=0$.

16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ и $7x+y+4z-47=0$.

17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$ и $2x+3y+7z-52=0$.

18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$ и $3x+4y+7z-16=0$.

19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-5y+4z+24=0$.

20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$ и $x-2y-3z+18=0$.

21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$ и $x+7y+3z+11=0$.

22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$ и $3x+7y-5z-11=0$.

23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$ и $4x+y-6z-5=0$.

24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$ и $5x+9y+4z-25=0$.

25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$ и $x+4y+13z-23=0$.

26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$ и $3x-2y+5z-3=0$.

27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ и $3x-y+4z=0$.

28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+2y-5z+16=0$.

29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$ и $3x-7y-2z+7=0$.

30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$ и $5x+7y+9z-32=0$.

Контрольная работа по теме «Аналитическая геометрия в пространстве»