

## Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УПРУГОГО ИЗГИБА БАЛКИ

### § 1. Общая схема решения задач

В гл. 2 описывалось применение степенных рядов к исследованию решений дифференциальных уравнений. В данной главе мы рассмотрим применение рядов Фурье к некоторым исследованиям упругого изгиба балок [13].

Использование рядов Фурье для решения задач статики упругих тел производится по следующей схеме.

Прежде всего из физических соображений выводится соотношение, которое связывает функцию, описывающую геометрическое состояние деформированного тела, с приложенными к телу нагрузками. Это соотношение, вообще говоря, содержит, помимо самой функции состояния, еще и ее производные, а также некоторые интегральные характеристики.

Затем, исходя из геометрических очертаний тела и кинематических условий, ограничивающих его перемещения, выбирается ортогональная система функций, по которой указанная функция состояния разлагается в ряд Фурье.

Подстановка этого ряда Фурье в выведенное соотношение приводит к тождественному равенству двух рядов Фурье, от которого, пользуясь теоремой 3 § 10 гл. 2, можно перейти к равенству коэффициентов при одинаковых функциях. Из этих последних равенств можно вычислить значения коэффициентов Фурье и тем самым описать состояние деформированного тела.

Этот процесс подстановки ряда Фурье в характеризующее изгиб соотношение следует осуществлять достаточно осмотрительно, ибо в ходе его приходится несколько раз почленно дифференцировать ряды Фурье, коэффициенты которых вычисляются лишь впоследствии. Убедиться в правомерности этого дифференцирования, из производных членов дифференцируемого ряда, априори довольно затруднительно. Поэтому при решении каждой конкретной задачи мы будем рассуждать примерно следующим образом.

Сначала мы будем предполагать, что написанный с неизвестными пока коэффициентами ряд Фурье можно (в смысле теоремы 3 § 4 гл. 2) почленно дифференцировать нужное число раз. Выписывая производные и решая получающиеся уравнения, мы будем находить

интересующие нас коэффициенты Фурье. Это будет означать, что если ряд Фурье поддается почленному дифференцированию (и притом столько раз, сколько это требуется), то он является вполне определенным, найденным нами рядом. Если теперь из рассмотрения полученных коэффициентов будет видно, что этот построенный, вполне определенный ряд действительно почленно дифференцируем, то все операции, сделанные фактически именно над этим рядом, были законными, и найденные коэффициенты Фурье – искомые. Если же окажется, что получился не дифференцируемый ряд, то это значит, что сделанные с ним ранее действия были математически некорректными, а полученный на их основе результат – необоснованным, хотя, возможно, и верным. Далее мы познакомимся с примерами исходов обоих типов.

## § 2. Изгиб балки

Будем далее называть балкой достаточно жесткое и тонкое упругое тело. Тонкость и жесткость балки понимаются в том смысле, что как поперечные ее размеры, так и перемещения точек в результате приложения к балке усилий считаются достаточно малыми по сравнению с ее длиной. Мы будем предполагать балку прямолинейной, т. е. считать, что отклонениями ее формы от прямолинейного отрезка можно пренебречь. Балка оказывает сопротивление только изгибающим (т. е. изменяющим кривизну) усилиям. Мы будем считать, что растягивающим (т. е. изменяющим длину балки как целого) усилиям балка вовсе не поддается. В этом параграфе содержится формальный вывод дифференциальных соотношений, связывающих нагрузку, приложенную к балке, с деформациями балки.

Предположим, что балка расположена вдоль оси  $Ox$  между точками  $x = 0$  и  $x = 1$ . Вертикальное перемещение точки балки с абсциссой  $x$  будем обозначать через  $v(x)$ .

Положительным на оси  $v$  будем считать направление вниз (рис. 7). Мы ограничимся рассмотрением плоского изгиба, т. е. будем предполагать, что все прикладываемые к балке усилия действуют в плоскости  $xOy$ .

Для каждой системы нагрузок  $R$ , приложенных к балке, будем через  $M_R(x)$  обозначать вызываемый ею (а также порожденными ею реакциями опор) изгибающий момент в сечении  $x$  этой балки.

Рассмотрим теперь две прикладываемые к балке системы нагру-

зок,  $R$  и  $S$ . Мы будем при этом предполагать, что изгибающие усилия, порождаемые нагрузкой  $S$ , приложенной к предварительно ненагруженной балке, совпадают с дополнительными изгибающими усилиями  $M_{R+S} - M_R$ , возникающими в балке, к которой предварительно приложена нагрузка  $R$ . Иными словами, мы будем считать, что

$$M_R(x) + M_S(x) = M_{R+S}(x). \quad (3.1)$$

Разумеется, такое предположение носит чисто физический характер и должно каждый раз проверяться. Ясно вместе с тем, что если нагрузка  $R$  не очень сильно изменяет прямолинейную форму балки, а нагрузка  $S$  – поперечная, то предположение (3.1) не противоречит обстоятельствам дела.

Из (3.1), предполагая непрерывность зависимости значения изгибающего момента  $M_R(x)$  в каждой точке  $x$  от нагрузки  $R$  и обозначая через  $\alpha R$  нагрузку  $R$ , умноженную на  $\alpha$  (т. е. увеличенную в  $\alpha$  раз, если  $\alpha > 1$ , и уменьшенную в  $1/\alpha$  раз, если  $\alpha < 1$ ), мы можем получить, что

$$M_{\alpha R}(x) = \alpha M_R(x). \quad (3.2)$$

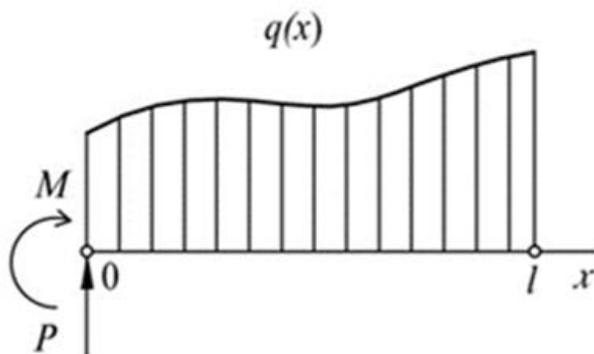


Рис. 3.1

Возьмем балку, на которую действует распределенная нагрузка  $R$ , имеющая некоторую интенсивность  $q(x)$  в каждой точке  $x$ . Пусть характер прикрепления балки к несущим ее конструкциям таков, что реакция левой ее опоры состоит из силы  $P$  и момента  $M$  (рис. 3.1). В этом случае изгибающий момент  $M_R(x)$  в поперечном сечении балки с абсциссой  $x$  равен, как легко подсчитать,

$$M + Px - \int_0^x (x-t)q(t)dt. \quad (3.3)$$

Дифференцируя это выражение по  $x$  (последнее слагаемое диф-

ференцируется, во-первых, как интеграл с переменным верхним пределом  $x$ , а во-вторых, как интеграл, зависящий от параметра  $x$ ), мы получаем

$$\frac{dM_R(x)}{dx} = P + (x-x)q(x) - \int_0^x q(t)dt = P - \int_0^x q(t)dt.$$

Повторное дифференцирование дает нам

$$\frac{d^2M_R(x)}{dx^2} = -q(x). \quad (3.4)$$

Обратимся теперь к деформациям балок.

Пусть приложенная к балке нагрузка  $R$  состоит из двух момен-

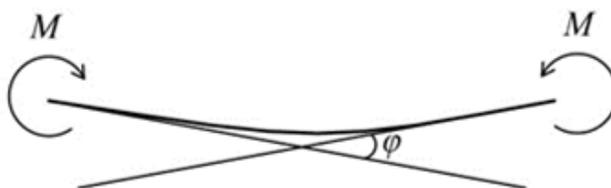


Рис. 3.2

тов, приложенных к ее концам, которые равны по величине  $M$ , противоположны по направлению и изгибают балку выпуклостью вниз (т. е. в направлении возрастания  $v$ ). Будем считать, что никаких других усилий к балке не приложено. В результате действия на балку двух указанных моментов правый конец балки повернется относительно левого на некоторый угол, который мы обозначим через  $\varphi$  (рис. 3.2). Этот угол, очевидно, является некоторой функцией изгибающего момента  $M$ :

$$\varphi = \varphi(M) \quad (3.5)$$

Предположим, что  $\varphi$  есть линейная функция  $M$ :

$$\varphi = kM \quad (3.6)$$

Это предположение соответствует закону Гука о пропорциональности деформаций усилиям. В условиях выбранных нами направлений изгибающих моментов и осей координат ( $x$  – направо, а  $v$  – вниз) угол  $\varphi$  оказывается отрицательным. Поэтому должно быть  $k < 0$ . Считая впредь рассматриваемую балку однородной по длине, можно показать, как это делается во всех курсах сопротивления мате-

риалов, что

$$k = \frac{l}{EI}, \quad (3.7)$$

где  $l$  – длина изгибаемой балки;  $I$  – момент инерции ее поперечного сечения относительно горизонтальной прямой, лежащей в плоскости этого сечения и проходящей через его центр тяжести, а  $E$  – модуль Юнга материала балки. В целях полноты изложения напомним этот вывод.

В теории изгиба призматических балок обычно принимается

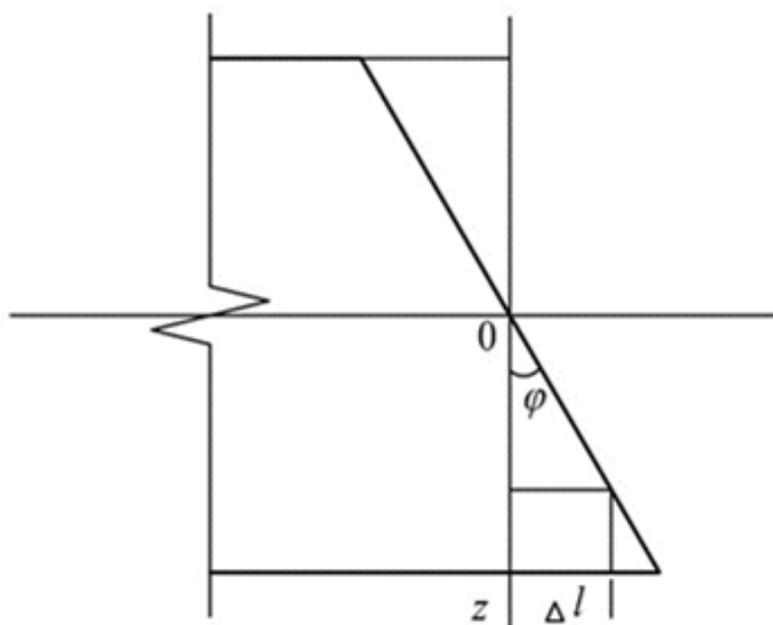


Рис. 3.3

гипотеза плоских сечений Сен-Венана. Она состоит в предположении, что каждое поперечное сечение ненагруженной балки после приложения к ней изгибающей нагрузки остается плоским и лишь поворачивается около оси изгибающего момента. Формально это равносильно предположению о том, что абсолютное удлинение  $\Delta l$  в направлении каждой нормали к сечению есть линейная функция координаты  $z$ , характеризующей (рис. 3.3) положение этой нормали по высоте балки. Тем самым линейной функцией координаты  $z$  должно быть и нормальное напряжение  $\sigma$  в каждой точке сечения.

Заметим, что при отсутствии продольной нагрузки на балку равнодействующая внутренних продольных усилий в каждом ее сечении должна быть равна нулю. Значит, при одних значениях  $z$  нормальные напряжения положительны, а при других – отрицательны. В

качестве начала отсчета  $z$  выберем тот уровень по высоте балки, на котором нормальные напряжения (а потому – и удлинения) равны нулю.

На рис. 3.3 изображен график удлинения  $\Delta l$  в зависимости от  $z$ . Поскольку балка предполагается жесткой, и углы ее поворота – малыми, угол  $\varphi$  можно по величине отождествить с его тангенсом и (с учетом выбора направлений осей) написать:

$$\Delta l = -\varphi z .$$

А так как напряжение  $\sigma$  определяется соотношением

$$\sigma = -\frac{\Delta l}{l} E ,$$

должно быть

$$\sigma = -\frac{\varphi E}{l} z .$$

Обозначим через  $b(z)$  ширину балки на уровне  $z$ . Тогда усилие, действующее в элементарном слое  $dz$ , будет равно

$$ab(z)dz = -\frac{\varphi E}{l} zb(z)dz ,$$

а момент всех таких усилий относительно оси  $z = 0$  –

$$M = -\frac{\varphi E}{l} \int_{z_1}^{z_2} z^2 b(z) dz .$$

Последний интеграл есть момент инерции  $I$  сечения относительно нейтрального слоя  $z = 0$ . Таким образом,  $M = -\frac{\varphi EI}{l}$ , что вместе с (3.6) и дает (3.7).

В условиях рассматриваемой на рис. 3.2 нагрузки  $R$  в каждом поперечном сечении балки с абсциссой  $x$  возникает изгибающий момент  $M_R(x)$ , который, очевидно, постоянен по длине балки и равен  $M$ :

$$M_R(x) = M_0 = M . \quad (3.8)$$

Из (3.6), (3.7) и (3.8) следует, что

$$\frac{\varphi}{l} = -\frac{M_0}{EI} . \quad (3.9)$$

Отношение  $\frac{\varphi}{l}$  есть угол поворота балки, отнесенный к единице

ее длины, т. е. средняя кривизна балки. Поскольку в наших условиях балка однородна и действующий в ней изгибающий момент постоянен по ее длине, кривизна балки во всех ее точках одинакова и равна средней кривизне. Но в условиях предполагаемой жесткости балки ее кривизну можно принять равной второй производной вертикального смещения точки балки по ее длине. Поэтому

$$\frac{\varphi}{l} = -\frac{d^2v}{dx^2}.$$

Вместе с (3.9) это дает нам

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_0}{EI}. \quad (3.10)$$

Заметим теперь, что кривизна (искривленность) изогнутой балки в некоторой ее точке  $x$  зависит только от изгибающего момента  $M(x)$  в этой точке и не зависит от того, какими будут его значения в остальных точках балки. Физически (т. е. интуитивно) это представляется совершенно очевидным, а с формальной точки зрения соответствует принимаемой при изучении напряжений в теле возможности отсекал любую его часть и заменять ее действие на оставшуюся часть тела надлежащей системой сил.

Значит, для каждой точки  $x$  балки можно написать

$$\frac{d^2v_R(x)}{dx^2} = -\frac{M_R(x)}{EI} \quad (3.11)$$

независимо от приложенной к балке нагрузки  $R$ . Иными словами, функция прогиба  $v(x)$  балки связана с действующим в балке изгибающим моментом  $M(x)$  дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что, какова бы ни была дважды интегрируемая функция  $M(x)$ , описывающая изгибающий момент в балке, можно указать соответствующую ей функцию  $v(x)$ , описывающую прогибы этой балки. Эта функция  $v(x)$  определяется по  $M(x)$  единственным образом с точностью до линейного слагаемого  $Ax + B$ , соответствующего перемещениям балки как твердого тела. Для определения постоянных  $A$  и  $B$  следует указывать те или иные способы закрепления кон-

цов балки. Коль скоро эти способы закрепления указаны, функция прогиба  $v(x)$  определяется по функции изгибающего момента  $M(x)$  однозначно.

С другой стороны, из того же равенства (3.12) следует, что по любой дважды дифференцируемой функции  $v(x)$ , для которой выполняются те или иные начальные (или краевые) условия, отвечающие кинематическим условиям закрепления балки, можно указать такую функцию  $M(x)$ , что приложение к балке усилий, приводящих в каждой ее точке  $x$  к изгибающему моменту  $M(x)$ , породит в каждой точке  $x$  вертикальное смещение  $v(x)$ .

Ввиду линейности дифференциального уравнения (3.12) при любых нагрузках  $R$  и  $S$ , для которых выполняется (3.1), должно иметь место и

$$\frac{d^2 v_{R+S}(x)}{dx^2} = -\frac{M_R(x) + M_S(x)}{EI}, \quad (3.13)$$

а при любом вещественном  $\alpha$  из (3.2) следует

$$\frac{d^2 v_{\alpha R}(x)}{dx^2} = -\alpha \frac{M_R(x)}{EI}. \quad (3.14)$$

Отсюда в свою очередь вытекает, что при исключении перемещения балки как твердого тела должно быть

$$v_{R+S}(x) = v_R(x) + v_S(x) \quad (3.15)$$

$$v_{\alpha R}(x) = \alpha v_R(x). \quad (3.16)$$

Тогда дифференциальное уравнение по изгибу балки (3.12) от действия на неё двух нагрузок  $R$  и  $S$ , увеличенных соответственно в  $\alpha$  и  $\beta$  раз примет вид

$$\frac{d^2 v_{\alpha R + \beta S}(x)}{dx^2} = -\frac{\alpha M_R(x) + \beta M_S(x)}{EI}.$$

Решение данного неоднородного линейного с постоянными коэффициентами дифференциального уравнения имеет вид:

$$v_{\alpha R + \beta S}(x) = \alpha v_R(x) + \beta v_S(x) \quad (3.17)$$

Отметим, наконец, что из (3.4) и (3.12) следует

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x). \quad (3.18)$$

Это соотношение принято называть дифференциальным уравнением изгиба балки.

Введем обозначения, которые упростят дальнейшее изложение решения дифференциального уравнением изгиба балки.

Пусть

$v_P(x)$  – прогиб балки от сосредоточенной нагрузки;

$v_q(x)$  – прогиб балки от распределенной нагрузки;

$v_M(x)$  – прогиб балки от сосредоточенного момента.

Тогда обобщая равенство (3.17), получим

$$v_{\sum \alpha_i P_i + \sum \beta_k M_{k+q}}(x) = \sum \alpha_i v_{P_i}(x) + \sum \beta_k v_{M_k}(x) \quad (3.19)$$

Из равенства (3.19) следует, что прогиб балки от общей нагрузки можно определить как алгебраическую сумму прогибов балки от отдельно взятых элементарных нагрузок.

Обобщая вышесказанное, рассмотрим общую схему для определения прогиба балки  $v_R(x)$  под действием на неё каких-либо элементарных нагрузок.

1) Рассматриваемую балку помещают в удобную для определения её прогиба прямоугольную систему координат, так чтобы начало балки совпало с началом системы координат, а конец помещают на ось абсцисс. В результате чего точки балки займут отрезок  $[0; l]$  длины  $l$ .

2) На отрезке  $[0; l]$  составляют функцию рассматриваемой нагрузки  $R(x)$ .

3) Для рассматриваемой нагрузки записывают соответствующее дифференциальное уравнение изгиба балки. А для положения концов балки на опорах выписывают соответствующие данному способу краевые условия для функции прогиба балки.

4) Пусть функция прогиба балки  $v(x)$  является непрерывной функцией и имеет непрерывные производные  $(n - 1)$ -го порядка, где  $n$ -порядок дифференциального уравнения изгиба балки внутри отрезка  $[0, l]$ , а  $n$ -я производная функции  $v(x)$  – кусочно-непрерывная, кусочно-монотонная и ограничена на отрезке  $[0; l]$  функция. Тогда согласно теории рядов Фурье можно выбирать базис пространства  $C_{[0; l]}$  –  $\{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots\}$ . Базис пространства выбирают таким образом, чтобы его базисные элементы  $v_k(x)$  удовлетворяли краевым условиям рассматриваемого дифференциального уравнения. А их  $n$ -е производные составляли ортогональную систему функций

$$\frac{d^n v_k(x)}{dx^n} = \lambda_k \varphi_k(x),$$

где  $n$ -порядок дифференциального уравнения.

Выбрав базис  $\{v_k(x)\}$ , составляют формальный функциональный ряд – разложение функции прогиба балки  $v(x)$  по этому базису:

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x),$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты.

5) Раскладывают функцию нагрузки на балку  $R(x)$  в ряд Фурье по ортогональной системе функций  $\{\varphi_k(x)\}$  на отрезке  $[0; l]$ .

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \varphi_k(x).$$

6) Подставив полученные ряды для  $v(x)$  и  $R(x)$  в рассматриваемое дифференциальное уравнение, получают равенство, из которого находят коэффициенты  $b_k$ .

Найденные коэффициенты  $b_k$  подставляют в разложение функции прогиба балки  $v(x)$  по базису и окончательно получают функцию прогиба балки  $v(x)$  в виде ряда.

7) Используя признак Веерштрасса о сходимости функциональных рядов, теоремы о дифференцировании функциональных рядов и теорему Дирихле о сходимости рядов Фурье, выясняют, в каких точках  $x$  для  $v(x)$  не выполняется сходимость полученного разложения к решению рассматриваемого дифференциального уравнения. Если найденная функция прогиба балки  $v(x)$  не удовлетворяет своему дифференциальному уравнению только в конечном числе точек на отрезке  $[0; l]$ , то функция  $v(x)$  является функцией прогиба рассматриваемой балки при заданной нагрузке.

8) Для определения прогиба балки в конкретной точке  $x_0 \in [0; l]$ , число  $x_0$  подставляют в функциональный ряд, представляющий функцию прогиба балки  $v(x)$  и получают числовой ряд, для которого вычисляют точную сумму или приближенную, с заданной точностью вычисления.

Для точного вычисления прогибов балки в точке используют формулы известные для некоторых сумм числовых рядов. Приведем некоторые из них, которые часто встречаются:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2};$$

$$\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

### § 3. Свободно опертая балка

Пусть балка длины  $l$ , находящаяся под воздействием некоторой нагрузки, свободно оперта по концам. Это значит, что на обоих концах балки обращаются в нуль как вертикальные ее смещения

$$v(0) = v(l) = 0, \quad (3.20)$$

так и изгибающие моменты

$$M(0) = M(l) = 0 \quad (3.21)$$

(т. е. кривизна балки; см. рис. 3.4).

Граничные условия (3.21) можно заменить на равенство нулю вторых производных от вертикальных перемещений на концах балки

$$v''(0) = v''(l) = 0.$$

Действуя в соответствии с намеченным в § 1 плане решения задачи, выберем в качестве функции состояния балки функцию ее прогиба  $v(x)$  и займемся подбором ортогональной системы функций, по которой будем разлагать эту функцию прогиба.

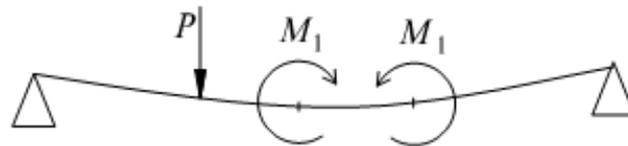


Рис. 3.4.

Рассмотрим для этого однородную по длине двухпролетную не-

разрезную балку с левым концом в  $x = -l$  и правым – в  $x = l$ , одинаково опертую обоими своими концами на опоры и имеющую промежуточную опору при  $x = 0$ , препятствующую вертикальному смещению балки в этой точке:  $v(0) = 0$ . Пусть эта балка загружена нечетным об-

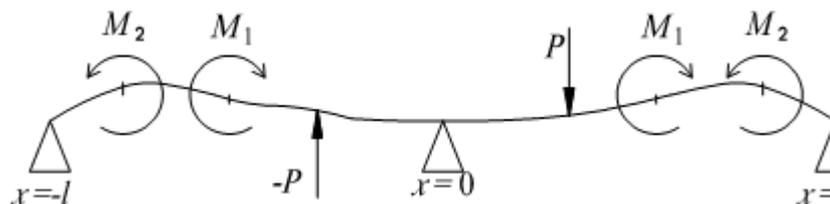


Рис. 3.5

разом, т. е. каждой силе, приложенной к ней в точке,  $x=c$ , соответствует равная ей по величине и противоположная по направлению сила, приложенная к балке в точке  $x = -c$ , а каждому моменту, приложенному к балке в точке  $x = c$ , – равный ему по величине и совпадающий по направлению момент, приложенный в точке  $x = -c$  (рис. 3.5).

Соотношение (3.3) и следствие 1 теоремы 4 § 10 гл. 2 показывают, что изгибающий момент  $M(x)$  в рассматриваемой балке является нечетной функцией  $x$  и, в частности,  $M(0) = 0$ . Физически естественно предполагать, что соответствующая функция прогиба  $v(x)$  также является нечетной. Формально это также вытекает из следствия 1 теоремы 4 § 10 гл. 2, ибо функция  $M(x)$  согласно (3.12) отличается лишь постоянным множителем от второй производной  $v''(x)$  функции  $v(x)$ , а  $v(0) = 0$ .

Левая половина рассматриваемой неразрезной балки воздействует на правую ее половину лишь некоторой вертикальной («перерезывающей») силой и не прилагает к ней никакого изгибающего момента. Поэтому, если удалить левую половину балки, заменив ее соответствующей реакцией опоры, расположенной в точке  $x = 0$ , то ни на изгибающих усилиях в правой половине балки, ни на значениях функции прогиба  $v(x)$  при  $x > 0$  это никак не скажется.

Наоборот, если рассматривать первоначально лишь правую часть балки, то присоединение к ней по нечетности левой части не изменит имеющейся картины изгиба.

Таким образом, естественно считать балку с левым концом в  $x = 0$  и правым в  $x = l$  и свободно опертую на опоры своими концами

половиной описанной выше «нечетной» неразрезной балки. Будем поэтому, в соответствии со сказанным в § 10 гл. 2, рассматривать разложение функции прогиба  $v(x)$  такой балки на сегменте  $[0, l]$  в ряд Фурье по синусам:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.22)$$

Заметим, что функция прогиба  $v(x)$  является непрерывной функцией и поэтому, согласно теореме Дирихле, действительно может быть разложена в ряд Фурье (и в том числе в ряд Фурье по синусам (3.22)), который везде сходится к этой функции.

Возникает соблазн определить коэффициенты этого разложения непосредственно на основании дифференциального уравнения изгиба балки (3.17).

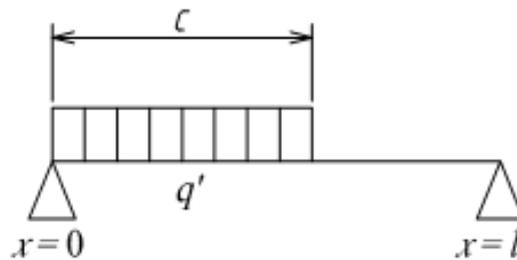


Рис. 3.6

В качестве примера, однако, возьмем случай, когда балка загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  на участке от  $0$  до  $c < l$  и никак не загружена в оставшейся части (рис. 3.6).

Чтобы воспользоваться при этом дифференциальным уравнением изгиба (3.17), нужно четыре раза продифференцировать почленно ряд, описывающий функцию прогиба. Однако, согласно теореме 3 § 4 гл. 2, мы можем быть уверены в правомерности этого дифференцирования и в том, что полученная производная равна правой части (3.17), лишь в случае равномерной сходимости ряда четвертых производных членов ряда (3.20) к функции  $q(x)$ .

Но в рассматриваемом случае все четвертые производные членов ряда для  $v(x)$ , являющихся синусами с некоторыми коэффициентами, суть те же синусы, снабженные другими коэффициентами, так что являются во всяком случае непрерывными функциями. Следова-

тельно, и их частичные суммы также непрерывны. В случае равномерной сходимости непрерывной должна быть на основании теоремы 1 из § 4 главы 2 и сумма всего ряда. Но в действительности эта сумма равна  $q(x)$ , а эта функция неразрывна.

Полученное противоречие показывает, что теорема о почленном дифференцировании рядов не дает нам оснований воспользоваться в этом случае дифференциальным уравнением изгиба (3.17) для нахождения коэффициентов ряда из (3.22).

Конечно, все сказанное не означает, что при использовании здесь для наших целей уравнения (3.17) коэффициенты  $b_n$  из разложения (3.22) будут определены неверно и что пользоваться уравнением (3.17) заведомо нельзя. Более того, описанный путь в данном случае приводит на самом деле к верному ответу. Однако правомерность такого пути и обоснованность ответа могут быть установлены лишь на основании более тонких и более частных соображений, чем общая теорема о почленном дифференцировании рядов.

#### **§ 4. Первая возможность ограничиться двукратным дифференцированием**

В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе естественно попытаться рассматривать такие соотношения, описывающие состояние деформированной балки, которые содержат производные от функции прогиба менее чем четвертого порядка. Такого типа соотношения существуют. Одно из них уже фактически имеется в нашем распоряжении – это равенство (3.12):

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (3.23)$$

Пусть теперь на балку действует некоторая нагрузка  $R$ , приводящая к изгибающему моменту  $M_R(x)$  в каждой ее точке  $x$ . Найдем из соображений статики (в той мере, какой это нам удастся) аналитическое выражение для момента  $M_R(x)$  и разложим его в ряд Фурье на  $[0, l]$ , по синусам:

$$M_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (3.24)$$

Если приложенная к балке нагрузка  $R$  не содержит сосредото-

ченных моментов, то  $M_R(x)$  является непрерывной функцией  $x$ , так что ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно (см. § 3 гл. 2). Впрочем, во многих конкретных случаях эта равномерная сходимостъ будет вытекать уже из признака Вейерштрасса (§ 3 гл. 2).

Разложением функции прогиба  $v_R(x)$  от нагрузки  $R$  пусть будет

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

Дифференцируя этот ряд почленно два раза (и запоминая, что это дифференцирование накладывает на нас обязательство проверить впоследствии его законность), мы получаем

$$\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} \left( \frac{\pi n x}{\ell} \right)^2 \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

Подставив теперь в (3.23) вместо функций  $M(x)$  и  $\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2}$  их разложения в ряды Фурье, мы будем иметь

$$- \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} n^2 \sin \frac{\pi n x}{\ell} = - \frac{1}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

Если оба эти ряда сходятся равномерно, то приравнивание, в соответствии со сказанным в [14], их коэффициентов дает нам

$$- \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 b_{R,n} n^2 = - \frac{1}{EI} m_{R,n}.$$

Откуда

$$b_{R,n} = \frac{l^2}{\pi^2 EI} \frac{m_{R,n}}{n^2} \quad (3.25)$$

и окончательно

$$v_R(x) = \frac{l^2}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{R,n}}{n^2} \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (3.26)$$

Вторые производные членов стоящего справа ряда пропорциональны соответствующим членам равномерно сходящегося ряда из (3.24). Следовательно, и этот ряд вторых производных сходится равномерно. Тем самым двукратное дифференцирование ряда из (3.25) законно.

Как будет видно из ближайших параграфов, описанная возможность находит довольно широкий круг приложений.

### § 5. Случай сосредоточенной нагрузки

Пусть балка свободно оперта своими концами при  $x = 0$  и  $x = l$  и нагружена вертикальной силой  $P$ , приложенной вниз к точке  $x = c$  (рис. 3.7).

Очевидно, в этом случае реакции опор направлены вверх и равны  $\frac{P(l-c)}{l}$  для левой опоры и  $\frac{Pc}{l}$  — для правой. Элементарный ста-

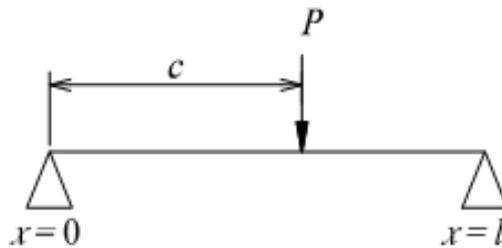


Рис. 3.7

тический расчет показывает, что для изгибающего момента  $M_P$  справедливо соотношение

$$M_P(x) = \begin{cases} \frac{P(l-c)}{l}x, & \text{если } 0 \leq x \leq c; \\ \frac{Pc}{l}(l-x), & \text{если } c \leq x \leq l. \end{cases} \quad (3.27)$$

Для коэффициентов  $m_n$  разложения  $M_P(x)$  в ряд Фурье на  $[0, l]$  по синусам (см. (2.67) § 10, гл. 2) мы имеем

$$m_n = \frac{2}{l} \int_0^l M_P(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx$$

или, подставляя выражения для значений функции  $M_P(x)$  согласно (3.27) отдельно для  $x \leq c$  и для  $x \geq c$ , имеем

$$m_n = \frac{2}{l} \frac{P(l-c)}{l} \int_0^c x \sin \frac{\pi nx}{l} dx + \frac{2}{l} P \frac{c}{l} \int_c^l \sin \frac{\pi nx}{l} dx - \frac{2}{l} P \frac{c}{l} \int_c^l x \sin \frac{\pi nx}{l} dx. \quad (3.28)$$

Интегрирование по частям дает нам при любых  $a$  и  $b$

$$\begin{aligned} \int_c^b x \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx &= -x \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{\ell} \Big|_a^b - \frac{l}{\pi n} \int_c^b \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \\ &= -b \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n b}{\ell} + a \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n a}{\ell} + \left( \frac{l}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{\ell} b - \left( \frac{l}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{\ell} a. \end{aligned}$$

Подставляя такие выражения вместо первого и третьего интеграла в (3.28) (и беря второй интеграл непосредственно), мы получаем

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{2(l-c)}{l^2} P \left( -\frac{cl}{\pi n} \cos \frac{\pi n c}{\ell} + \left( \frac{l}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n c}{\ell} \right) + \\ &+ \frac{2c}{l} P \left( \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n c}{\ell} + (-1)^{n+1} \frac{l}{\pi n} \right) - \\ &- \frac{2c}{l} P \left( \frac{cl}{\pi n} \cos \frac{\pi n c}{\ell} + (-1)^{n+1} \frac{l^2}{\pi n} - \left( \frac{l}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{\ell} \right) \end{aligned}$$

или, после отбрасывания взаимно уничтожающихся членов

$$m_n = \frac{2Pl}{(\pi n)^2} \sin \frac{\pi n c}{l}. \quad (3.29)$$

Подстановка в (3.25) дает нам

$$b_n = \frac{2Pl^3}{\pi^4 n^4 EI} \sin \frac{\pi n c}{l} \quad (3.30)$$

и окончательно

$$v_P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.31)$$

Производная функция прогиба по длине балки есть тангенс угла поворота  $\varphi$  ее поперечного сечения. Ввиду предположенной жесткости балки этот тангенс мы будем при любой нагрузке  $R$  балки отождествлять с самим углом поворота:

$$\frac{dv_R(x)}{dx} = \varphi_R(x).$$

Поэтому выражение для  $\varphi_P(x)$  может быть получено путем почленного дифференцирования ряда из (3.31):

$$\varphi_P(x) = \frac{2Pl^2}{\pi^3 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{\pi nc}{l} \cos \frac{\pi nx}{l}. \quad (3.32)$$

Заметим, что  $x$  и  $c$  входят в выражение для прогиба балки в (3.31) симметрично. Отсюда вытекает известное правило взаимности: прогиб в точке  $x$  от силы, приложенной в точке  $c$ , равен прогибу в точке  $c$  от силы той же величины, приложенной в точке  $x$ .

Стоящий в (3.31) ряд сходится весьма быстро, и для практических целей достаточно в нем удерживать малое число членов.

**Пример 1.** Найдём прогиб балки длиной  $l$  в её середине, свободно опертой на концах под действием на неё сосредоточенной нагрузки в точке  $\frac{l}{3}$ .

**Решение.** Необходимо найти  $v_P\left(\frac{l}{2}\right)$  при  $c = \frac{l}{3}$ .

Положив для этого в (3.31)  $x = \frac{l}{2}$ , мы получим

$$v_P\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{\pi n}{3} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Здесь члены, соответствующие  $n = 2, 3, 4$ , обращаются в нуль, а член с  $n = 5$  имеет коэффициент  $1/625$ . Поэтому, ограничиваясь лишь первым членом ряда и полагая

$$v_P\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}Pl^3}{\pi^4 EI} = 0,017781 \frac{Pl^3}{EI}.$$

мы допускаем относительную ошибку, не превосходящую 0,002.

Действительно, точное значение величины прогиба равно

$$\frac{23Pl^3}{1296EI} = 0,017747 \frac{Pl^3}{EI}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка  $R$  на балку состоит из вертикальных сил  $P_1, \dots, P_k$ , приложенных соответственно к точкам с абсциссами  $x = c_1, \dots, c_k$ .

В этом случае мы можем искать коэффициент разложения

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

при помощи метода наложения, т. е. на основе соотношения

$$M_R(x) = \sum_{i=1}^k M_{P_i}(x), \quad (3.33)$$

которое вытекает из (3.1).

Если теперь положить

$$M_{P_i}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{i,n} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

и, как и раньше,

$$M_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

то из (3.33) будет следовать

$$m_{R,n} = \sum_{i=1}^k m_{i,n}.$$

Но разложение каждой из функций  $M_{P_i}$  нам уже известно. Согласно (3.29)

$$m_{i,n} = \frac{2lP_i}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{l} c_i,$$

так что

$$m_{R,n} = \frac{2l}{(n\pi)^2} \sum_{i=1}^k P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i.$$

Поэтому (3.25) дает нам

$$b_{R,n} = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^k P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i$$

и мы получаем

$$v_R(x) = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^k P_i \sin \frac{n\pi}{l} c_i \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.34)$$

При применении метода наложения мы пользовались только линейностью соотношения (3.33) и не пользовались линейностью диф-

ференциального уравнения (3.12) и вытекающего из него равенства (3.15). В действительности, однако, мы могли бы это сделать, тогда формула (3.34) получилась бы в результате непосредственного суммирования коэффициентов в ряде Фурье в формулах вида (3.31). Поступая так, мы лишь придерживались обычной в математике «экономии предположений», состоящей в том, чтобы не пользоваться тем, без чего можно обойтись.

**Пример 2.** Найдём прогиб балки длиной  $l$  в её середине, свободно опертой на концах под действием на неё жесткой однородной фермы весом  $P$ , имеющей форму прямоугольного треугольника и положенной на балку так, что концы стороны фермы, лежащей на балке, имеют координаты  $A = \left(\frac{l}{4}; 0\right)$  и  $B = \left(\frac{3l}{4}; 0\right)$ .

**Решение.**

Так как балка под фермой имеет прогиб, то на балку фактически действуют две сосредоточенные нагрузки  $P_A$  и  $P_B$ , приложенные в точках  $A\left(\frac{l}{4}; 0\right)$  и  $B\left(\frac{3l}{4}; 0\right)$ .

Пусть  $C(x_c; y_c)$  – центр тяжести фермы у которой сторона  $AB$  параллельна оси  $Ox$ , а сторона  $BD$  перпендикулярна оси  $Ox$ . Так как центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан, то абсцисса центра тяжести  $x_c$  делит сторону  $AB$  в соотношении 2 к 1, считая от точка  $A$ , т.е.

$$|Ax_c| = 2|x_cB|.$$

В силу того, что

$$P_A + P_B = P.$$

А система находится в состоянии равновесия т.е.

$$P_A \cdot |Ax_c| = P_B \cdot |Ax_c|,$$

найдем

$$P_A = \frac{1}{3}P, \quad P_B = \frac{2}{3}P.$$

По формулам (3.31) и (3.34) находим прогиб балки от двух сосредоточенных нагрузок в произвольной точке.

$$V(x) = V_{P_A} + V_{P_B} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( \sin \frac{\pi n}{4} + 2 \sin \frac{3\pi n}{4} \right) \sin \frac{\pi nx}{\ell}.$$

Находим прогиб в её середине  $v\left(\frac{l}{2}\right)$

$$V\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \left( \sin \frac{\pi(2k+1)}{4} + 2 \sin \frac{3\pi(2k+1)}{4} \right) \cdot (-1)^k$$

или после преобразований

$$V\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{81} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{625} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \dots \right].$$

Окончательно получаем

$$V\left(\frac{l}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{2}Pl^3 \cdot 82}{\pi^4 EI \cdot 81}.$$

## § 6. Прогиб балки от распределенной нагрузки и

Пусть балка находится под действием вертикальной нагрузки,

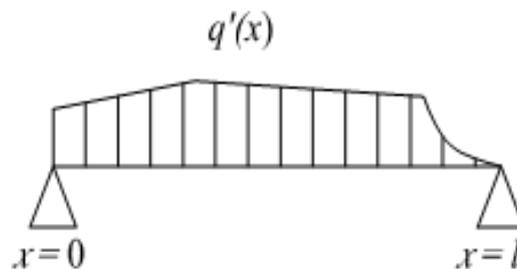


Рис. 3.8

распределенной по ее длине с плотностью  $q(x)$  (рис. 3.8).

Мы будем решать эту задачу способом наложения. Обозначим через  $M_c(x)$  изгибающий момент, порожденный в балке элементарной сосредоточенной силой  $q(c)dc$ , приложенной в точке  $x = c$ , и напишем интегральный аналог формулы (3.33):

$$M_q(x) = \int_0^l M_c(x) dc.$$

Формула (3.24) дает нам

$$M_q(x) = \int_0^l \left( \sum_{n=1}^{\infty} m_{c,n} \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dc,$$

где, в соответствии с формулой (3.29),

$$m_n = \frac{2l}{(\pi n)^2} q(c) \sin \frac{\pi n}{l} c.$$

Значит,

$$M_q(x) = \frac{2l}{\pi^2} \int_0^l q(c) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x dc$$

Стоящий здесь справа ряд можно понимать, как функциональный ряд относительной переменной  $c$ . Согласно признаку Вейерштрасса он сходится равномерно, и потому его можно почленно интегрировать:

$$M_q(x) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \int_0^l q(c) \sin \frac{n\pi}{l} c dc \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.35)$$

Для перехода от разложения в ряд Фурье момента  $M_q(x)$  к разложению в ряд Фурье функции прогиба  $v_q(x)$  нам остается, в соответствии с формулой (3.25), умножить  $n$ -й коэффициент ряда (3.35) на  $\frac{l^2}{\pi^2 EI n^2}$ , т.к.

$$v_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В итоге мы получим

$$v_q(x) = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( \int_0^l q(c) \sin \frac{n\pi}{l} c dc \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.36)$$

Разумеется, как и в предыдущем параграфе, мы могли бы применять метод наложения не к моменту, а непосредственно к прогибам, беря в (3.31) вместо  $P$  элементарную силу  $q(c)dc$  и интегрируя ряд почленно по  $c$ .

**Пример.** Рассмотрим распределенную нагрузку, описанную в примере из § 3. Для нее

$$q(x) = \begin{cases} q, & \text{если } 0 \leq x \leq c; \\ 0, & \text{если } c \leq x \leq l. \end{cases} \quad (3.37)$$

На основании сказанного в § 10 гл. 2 (переходя от сегмента  $[0, \pi]$  к сегменту  $[0, l]$ ) имеем

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.38)$$

где

$$q_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Учитывая вид описываемой в (3.37) функции  $q(x)$ , мы получим

$$q_n = \frac{2}{l} \int_0^c q(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{l} q \frac{l}{n\pi} \left( -\cos \frac{\pi n}{l} x \right) \Big|_0^c = \frac{2q}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{\pi n}{l} c \right). \quad (3.39)$$

Подстановка в (3.36) дает нам

$$v_q(x) = \frac{2l^4}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{1}{\pi} q \frac{1}{n} \left( 1 - \cos \frac{\pi n}{l} c \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

или

$$v_q(x) = \frac{2ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left( 1 - \cos \frac{\pi n}{l} c \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.40)$$

Дифференцируя  $v_q(x)$  по  $x$ , мы получаем выражение для тангенса угла поворота сечения балки (который ввиду ее жесткости можно отождествлять с самим углом):

$$\varphi_q(x) = \frac{dv_q}{dx} = \frac{2ql^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( 1 - \cos \frac{\pi n}{l} c \right) \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.41)$$

В частности, если  $c=l$ , т. е. если равномерная нагрузка  $q$  распределена по всей длине балки, то мы получим

$$v_q(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^5} \sin \frac{(2r+1)\pi}{l} x; \quad (3.42)$$

$$\varphi_q(x) = \frac{4ql^3}{\pi^4 EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4} \cos \frac{(2r+1)\pi}{l} x. \quad (3.43)$$

## § 7. Прогиб от сосредоточенного момента

Пусть та же свободно опертая балка загружена в точке  $x = c$  сосредоточенным моментом величины  $M$  (рис. 3.9).

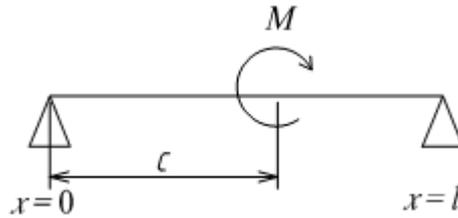


Рис. 3.9

Представим функцию прогиба, как и выше, в виде

$$v_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Для решения этой задачи методом наложения можно взять  $\varepsilon > 0$  и заменить момент  $M$  парой  $M_\varepsilon$  вертикальных сил величины  $M/\varepsilon$  каждая: силы  $P_1$ , приложенной в точке  $c$  и направленной вверх, и силы  $P_2$ , приложенной в точке  $c + \varepsilon$  и направленной вниз (рис. 3.10), после чего, устремив  $\varepsilon$  к нулю, перейти к пределу.

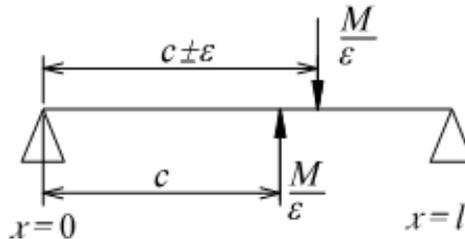


Рис. 3.10

Для разнообразия мы применим теперь метод наложения непосредственно к функции прогиба, т. е. воспользуемся равенством (3.15), которое в данном случае записывается как

$$v_{M_\varepsilon}(x) = -v_{P_1}(x) + v_{P_2}(x),$$

или, после перехода к пределу по  $\varepsilon$ ,

$$v_M(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{M_\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-v_{P_1}(x) + v_{P_2}(x)).$$

Формула (3.34) дает нам теперь

$$v_M(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2 \frac{M}{\varepsilon} l^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( \sin \frac{n\pi}{l} (c + \varepsilon) - \sin \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

откуда (проверка законности почленного дифференцирования ряда по  $c$  не составляет труда)

$$\begin{aligned} v_M(x) &= \frac{2Ml^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \sin \frac{n\pi}{l} (c + \varepsilon) - \sin \frac{n\pi}{l} c \right) \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ &= \frac{2Ml^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} c \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ &= \frac{2Ml^2}{\pi^3 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi}{l} c \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Почленное дифференцирование (3.44) по  $x$  дает нам

$$\varphi_M(x) = \frac{dv_M}{dx} = \frac{2Ml}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{l} c \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.45)$$

Правую часть этой формулы мы примем, как и раньше, за описание угла поворота сечения балки в точке с абсциссой  $x$ .

Найдём значения углов поворота на концах балки, когда на неё действует момент  $M$  в одном из концов

$$\varphi_{M(0)}(0) = \frac{2Ml}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Воспользовшись формулой

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

получим

$$\varphi_{M(0)}(0) = \frac{Ml}{3EI}.$$

Аналогично

$$\varphi_{M(l)}(l) = \frac{2Ml}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n = -\frac{Ml}{6EI},$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

## § 8. Статически неопределимая балка

Разложение в ряд Фурье функций прогиба и углов поворота изогнутой балки позволяет рассматривать и статически неопределимые задачи. Общий подход отличается в принципе от обычного. Именно лишние реакции опор рассматриваются как неизвестные внешние силы, которые вместе с известной нагрузкой осуществляют прогиб, удовлетворяющий кинематическим условиям, вытекающим из особенностей опор. Эти условия записываются в виде уравнений относительно неизвестных реакций. Особенностью рассматриваемого здесь приема являются специфические (в виде рядов Фурье) представления функций прогиба и угла поворота.

Для иллюстрации сказанного ограничимся примером балки длины  $l$ , жестко заделанной левым концом, свободно опертой правым и находящейся под воздействием равномерно распределенной по всей длине балки нагрузки  $q$  (рис. 3.11).

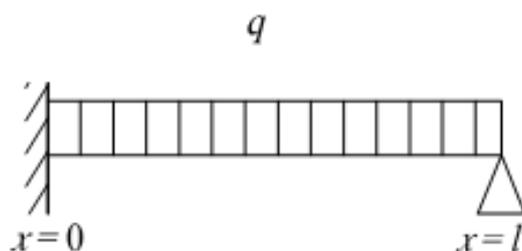


Рис. 3.11

Если бы эта балка была свободно оперта на обе опоры, то согласно (3.43) (где следует положить  $c=l$ ) угол ее поворота в точке  $x=0$  под воздействием нагрузки  $q$  был бы равен

$$\varphi_q(0) = \frac{4ql^3}{\pi^3 EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}. \quad (3.46)$$

Если, далее, в точке  $c=0$  к этой балке приложить сосредоточенный изгибающий момент  $M$ , то угол поворота от такого момента в точке  $x=0$  ввиду (3.45) должен быть равен

$$\varphi_M(0) = \frac{2Ml}{\pi^2 EI} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (3.47)$$

Условие жесткой заделки левого конца балки означает, что

$$\varphi_q(0) + \varphi_M(0) = 0.$$

Вместе с (3.46) и (3.47) это дает нам

$$M = -\frac{4ql^3}{\pi^4 EI} \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = -\frac{2ql^3}{\pi^2} \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \quad (3.48)$$

Воспользуемся формулами, приведенными в § 2

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Поэтому выражение (3.48) можно переписать как

$$M = -\frac{2ql^3}{\pi^2} \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = -\frac{2ql^3}{\pi^2} \frac{\frac{\pi^4}{96}}{\frac{\pi^2}{6}}.$$

Окончательно получим

$$M = -\frac{1}{8} ql^3 \quad (3.49)$$

что, как известно, является точным решением задачи.

Искомая функция прогиба получается теперь путем сложения функций прогиба свободно опертой балки, загруженной в одном случае равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , а в другом – моментом  $M$ , приложенным к ее левому концу. Для этого надо сложить  $v_q(x)$  из формулы (3.36), положив в ней  $c = l$ , и  $v_M(x)$  из формулы (3.43), положив в ней  $c = 0$ . В итоге мы получим

$$v(x) = \frac{2ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} (1 + (-1)^n) \cos \frac{n\pi}{l} x - \frac{2}{\pi^3} \frac{12}{\pi^4} ql^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4} \frac{l^2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Или

$$v(x) = \frac{2ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)^5} \cos \frac{2r\pi}{l} x - \frac{2}{\pi^3} \frac{ql^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ = \frac{ql^4}{EI} \left( \frac{4}{\pi^5} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)^5} \cos \frac{2r\pi}{l} x - \frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

### Задачи для решения в аудитории

1. Для дифференциального уравнения изгиба балки  $\frac{d^4 v_q}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$ , свободно опертой на концах (краевые условия для функции прогиба балки имеют вид:  $v_q(0) = v_q(l) = v_q''(0) = v_q''(l)$ ). Под действием на неё рыхлого груза веса  $P$ , равномерно распределенного на отрезке  $\left[\frac{l}{4}; \frac{3l}{4}\right]$ , найти функцию прогиба  $y_q(x)$ . Найти прогиб балки в её середине.

2. Для дифференциального уравнения изгиба балки  $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$ , свободно опертой на концах (краевые условия для функции прогиба балки имеют вид:  $y_q(0) = y_q(l) = y_q''(0) = y_q''(l)$ ). Под действием на неё вертикальной силы  $P$ , приложенной в её середине и направленной вниз, найти функцию прогиба  $y(x)$ . Найти прогиб балки в этой точке.

## Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

В гл. 3 описывалось применение рядов Фурье к некоторым исследованиям упругого изгиба балок [13]. В данной главе мы рассмотрим метод решения уравнения колебаний струны методом разделения переменных, который также называется методом Фурье (хотя для случая колебаний струны был предложен еще Даниилом Бернулли). Существенным для этого метода является также использование рядов Фурье.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны.

### § 1. Уравнения гиперболического типа

Вывод волнового уравнения.

*Струной* называется гибкая упругая натянутая нить, не оказывающая сопротивления изгибу.

Рассмотрим натянутую струну, которая в начальный момент времени совмещена с отрезком  $[0, l]$  оси  $Ox$ . Пусть концы струны закреплены неподвижно. Если струну тем или иным способом отклонить от первоначального положения, и затем предоставить самой себе, то она начнет совершать колебания относительно положения равновесия, называемые *свободными колебаниями* (см. рис. 4.1). Требуется найти закон этих колебаний, то есть зависимость перемещения точек струны от времени.  $\dots$

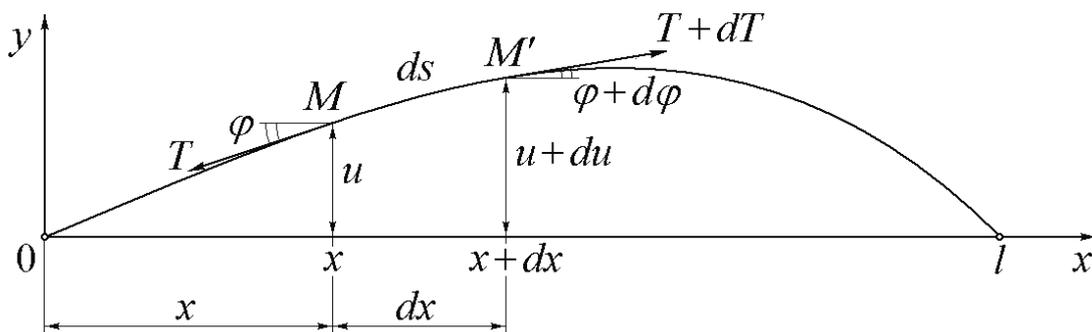


Рис. 4.1

Будем предполагать, что струна однородна, то есть имеет постоянную линейную плотность  $\rho$  [ $\text{кг}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^4$ ] ( $\rho = \gamma/g$  – удельная плот-

ность материала  $[\text{кг}/\text{м}^3]$ ,  $g = 9,81 \text{ м}/\text{сек}^2$  – ускорение силы тяжести).

Пусть длина струны равна  $l$ , а в состоянии равновесия струна прямолинейна и расположена вдоль оси  $OX$  между точками  $x = 0$  и  $x = l$ . Если вывести струну из состояния равновесия, подвергнув ее действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться. Будем считать, что движение всей струны происходит в одной плоскости и что каждая ее точка движется перпендикулярно оси  $OX$ . Смещение точки струны с координатой  $x$  в момент времени  $t$  будем обозначать через  $u(x,t)$  или просто через  $u$ . Предположим далее, что все деформации струны малы. Под этим мы будем понимать, что малы как смещения  $u$  каждого из элементов струны, так и их повороты  $u'_x$ .

Рассмотрим элемент струны (см. рис. 4.1), который в положении равновесия имеет концами точки  $x$  и  $x+\Delta x$ . Пусть в результате отклонения струны в некоторый момент времени этот элемент переходит в положение  $MM'$

Очевидно, длина элемента  $MM'$  равна

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u'_x{}^2} dx.$$

что в предположении малости угла поворота элемента (и тем самым тангенса этого угла) приближенно равно  $\Delta x$ .

Рассмотрим воздействие на элемент  $MM'$  равнодействующей вертикальных составляющих сил натяжения  $T$ , действующих на его концы. Эти силы действуют в направлении касательных к струне. Обозначим углы, образуемые этими касательными с осью  $OX$ , через  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$ . Тогда вертикальная составляющая равнодействующей этих двух сил натяжения будет равна

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi.$$

Ввиду малости углов  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$  мы можем синусы заменить тангенсами:

$$T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg} \varphi.$$

Но тангенсы углов наклона касательных равны производным:

$$T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M'} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \right).$$

Сила инерции, действующая на элемент  $MM'$  очевидно равна

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x,$$

где  $\rho$  – масса единицы длины струны. Составляя на основании принципа Даламбера (Даламбер Жан Лоран (16 ноября 1717 – 29 октября 1783) – французский механик, физик и математик) уравнение равновесия сил, действующих на элемент струны, в проекции на ось  $Ox$ , приходим к равенству

$$T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M'} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x,$$

или, деля обе части этого равенства на  $\Delta x$  и переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow \infty$

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лагранжа о конечных приращениях (Лагранж Жозеф Луи (25 января 1736 – 10 апреля 1813) – французский механик и математик) частное приращение производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  при переходе от аргументов  $(x, t)$  к аргументам  $(x+\Delta x, t)$  заменой её

частным дифференциалом, то есть величиной  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Обозначив, наконец, отношение  $T/\rho$  через  $a^2$ , мы получим уравнение

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

которое и называется *уравнением свободных колебаний струны*.

Это уравнение и описывает процесс малых свободных поперечных колебаний струны и называется *одномерным волновым уравнением*. Это уравнение и его решение впервые были получены Ж.Даламбером в 1743 году.

## § 2. Начальные и граничные условия

Уравнению (4.1) удовлетворяет всякое свободное колебание струны, независимо от его физического происхождения, а также от

способов закрепления концов струны в точках  $x = 0$  и  $x = l$ .

Вместе с тем совершенно ясно, что если мы выведем струну из положения равновесия и представим самой себе, то характер ее колебаний будет один, а если, выведя из состояния равновесия, придадим ее точкам те или иные скорости, – то другой. Кроме того, неподвижное и подвижное закрепления концов струны приводят, как можно достаточно наглядно себе представить, к весьма различным ее движениям.

Из сказанного следует, что для определения движения струны, кроме уравнения (4.1), необходимо еще задать *начальные* условия, описывающие поведение струны в начальный момент времени  $t = 0$ , т. е. ту форму, которую струна приобретает при выводе ее из положения равновесия,

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4.2)$$

и те скорости, которые сообщаются точкам струны при «отпускании» ее:

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x). \quad (4.3)$$

Кроме того, необходимо задать *граничные* условия задачи, т. е. описать характер поведения концов струны в процессе ее колебаний. Мы ограничимся простейшим случаем граничных условий, когда концы струны закреплены неподвижно:

$$u(0, t) = 0, \quad (4.4)$$

$$u(l, t) = 0. \quad (4.5)$$

Разумеется, в частности, может оказаться, что в начальный момент времени струна не имеет отклонения от равновесного состояния ( $f(x) = 0$ ) или же неподвижна ( $\varphi(x) = 0$ ).

Граничные условия задачи вместе с начальными ее условиями иногда называются *краевыми* условиями.

Рассмотрим постановку начально-краевой задачи для волнового уравнения на примере задачи о малых свободных поперечных колебаниях струны конечной длины с закреплёнными концами.

Требуется решить однородное волновое уравнение

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при однородных граничных условиях

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(l, t) = 0.$$

С начальными условиями

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x).$$

### § 3. Решение однородного волнового уравнения методом разделения переменных (методом Фурье)

В соответствии с методом разделения переменных сначала ищется частное ненулевое решение однородного уравнения (4.1), удовлетворяющее лишь однородным граничным условиям (4.4)-(4.5), в виде произведения двух функций каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.1), получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив обе части уравнения на  $a^2 X(x)T(t) \neq 0$  приходим к равенству

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}. \quad (4.7)$$

В этом равенстве при изменении  $t$  левая часть, не зависящая от  $t$ , остаётся постоянной, поэтому будет постоянной и равная ей правая часть, то есть обе части равенства (4.7) не зависят от  $t$ . С другой стороны, при изменении  $x$  правая часть равенства, не зависящая от  $x$ , будет оставаться постоянной, значит, будет постоянной и не зависеть от  $x$  и равная ей левая часть. Таким образом, обе части равенства (4.7) не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ . Следовательно, они являются постоянными.

Обозначая эту постоянную через  $\mu$ , (её называют постоянной разделения), то есть принимая

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \mu,$$

получим два независимых обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнения 2-го порядка

$$T''(t) - \mu a^2 T(t) = 0 \quad (4.8)$$

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \quad (4.9)$$

Подставляя далее (4.6) в граничные условия (4.4) - (4.5), получим

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (4.10)$$

В результате для определения функции  $X(x)$  приходим к задаче на собственные значения (4.9), (4.10) (задаче Штурма – Лиувилля). Эта задача имеет нулевое (тривиальное) решение  $0 \equiv X$ , не представляющее физического интереса, так как тогда

$$u(x, t) = 0.$$

(Штурм Жак Шарль Франсуа (29 сентября 1803 – 18 декабря 1855) – французский математик, Лиувилль Жозеф (24 марта 1809 – 08 сентября 1882) – французский математик). Однако при некоторых значениях параметра  $\mu$ , называемых *собственными значениями*, задача (4.9), (4.10) имеет решения, не равные тождественно нулю. Эти решения называются *собственными функциями*.

Покажем сначала, что ненулевые решения (4.9), (4.10) существуют при  $\mu < 0$ . Доказательство от противного. Пусть  $\mu = 0$ . Тогда уравнение (4.9) примет вид

$$X''(x) = 0.$$

Его общее решение будет иметь вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Определяя произвольные постоянные из граничного условия (2.10), получаем

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Тогда

$$X(x) = 0.$$

Пусть  $\mu > 0$  ( $\mu = \lambda^2$ ,  $\lambda > 0$ ). Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (4.9) имеет вид

$$k^2 - \lambda^2 = 0.$$

Его корни действительны и различны:  $k_{1,2} = \mp \lambda$ . Поэтому общее решение уравнения (4.9) запишется в виде

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Подставляя его в граничные условия (4.10), получим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное нулевое решение  $C_1 = C_2 = 0$ . Соответственно задача (4.9), (4.10) будет иметь только нулевое решение

$$X(x) = 0.$$

Пусть  $\mu < 0$  ( $\mu = -\lambda^2$ ,  $\lambda > 0$ ). Тогда корни характеристического уравнения

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{4.11}$$

будут мнимыми:

$$k_{1,2} = \mp \sqrt{-\lambda^2} = \pm \sqrt{i^2 \lambda^2} = \pm \lambda i.$$

Поэтому частные линейно независимые решения будут

$$X_1(x) = \cos \lambda x, X_2(x) = \sin \lambda x.$$

и общее решение уравнения (4.11) запишется в виде

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \tag{4.12}$$

Из первого граничного условия (4.10) получаем  $C_1 = 0$ , а из второго граничного условия следует

$$C_2 \sin lx = 0. \tag{4.13}$$

Если  $C_2 = 0$ , то опять получим нулевое решения

$$X(x) = 0.$$

Поэтому, чтобы существовало нетривиальное решение задачи,

необходимо принять

$$\sin lx = 0. \quad (4.14)$$

Из уравнения (4.14) следует

$$\lambda l = n\pi; \quad n = 1, 2, \dots \quad (n \neq 0, \text{ так как } \lambda \neq 0).$$

Поэтому собственные значения параметра для задачи (4.9), (4.10) будут

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (4.15)$$

Так как собственные значения будут различными для разных  $n$ , то им приписывается соответствующий индекс.

Соответствующие им собственные функции с точностью до постоянного множителя  $C_2$  определяются по формуле

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.16)$$

Здесь уместно объяснить причину, по которой выше было принято рассматривать только положительные значения параметра  $\lambda$ . Это было сделано потому, что при отрицательных значениях  $\lambda$  или номера  $n$  будут получаться собственные функции, отличающиеся лишь постоянным множителем.

Заметим, что собственные функции (4.16) ортогональны на отрезке  $[0, l]$ .

С учетом (4.15) уравнение (4.8) запишется в виде

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0. \quad (4.17)$$

Его общее решение:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{ant\pi}{l} + B_n \sin \frac{ant\pi}{l}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Подставляя (4.16) и (4.18) в (4.6) и суммируя частные решения линейного однородного уравнения (4.3), получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{ant\pi}{l} + B_n \sin \frac{ant\pi}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.19)$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  находим далее из начальных условий. Подстановка (4.19) в (4.5) приводит к равенствам

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{nx\pi}{l}. \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{nx\pi}{l}. \quad (4.21)$$

Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют условиям Дирихле, то произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  могут быть определены как коэффициенты Фурье для соответствующих функций при разложении их в ряды Фурье по синусам на промежутке  $[0, l]$ , равном длине струны. Тогда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx; \quad (4.22)$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (4.23)$$

Выражение (4.19) с учетом (4.22) и (4.23) и даёт окончательное решение задачи о малых собственных поперечных колебаниях струны.

В полученном решении разные значения  $n$  соответствуют различным собственным формам колебаний струны. Функцию

$$u_n(x,t) = \left( A_n \cos \frac{ant\pi}{l} + B_n \sin \frac{ant\pi}{l} \right) \sin \frac{nx\pi}{l}.$$

введением вспомогательного угла  $\varphi_n = \arctg \left( \frac{A_n}{B_n} \right)$  легко преобразовать к виду

$$u_n(x,t) = F_n \sin \left( \frac{ant\pi}{l} + \varphi_n \right) \sin \frac{nx\pi}{l}, \quad (4.24)$$

где  $F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ .

Из (4.24) следует, что все точки струны совершают гармонические колебания относительно положения равновесия с одинаковыми частотами  $\omega_n = \frac{an\pi}{l}$  и амплитудой  $F_n = \sin \frac{\pi nx}{l}$  зависящей от продольной координаты  $x$  точки струны. Такие колебания называются стоячими волнами. При этом максимальное отклонение от положения

равновесия будет достигаться при  $\sin \frac{\pi n x}{l} = \pm 1$ , то есть в точках с абсциссами  $x = (2k + 1)l/(2n)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) на отрезке  $[0, l]$ . Точки, в которых отклонения достигают максимума, называются пучностями. Но при колебаниях струны имеются и неподвижные точки, которые называются узлами стоячей волны. Они определяются из условия  $\sin \frac{\pi n x}{l} = 0$ . Таких точек на отрезке  $[0, l]$  будет  $(n + 1)$  с абсциссами  $x = kl/n$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

Первые три формы колеблющейся струны в разные моменты времени показаны на рис. 4.2.

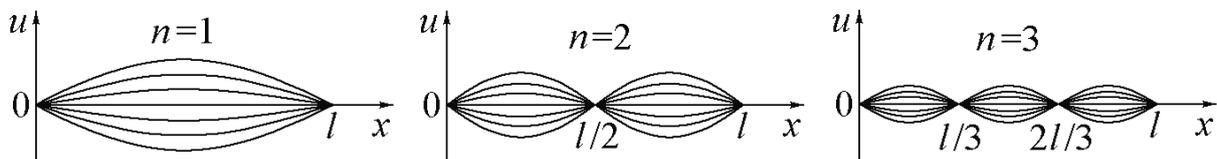


Рис. 4.2

Результирующее отклонение  $u(x, t)$  произвольной точки струны, как следует из (4.19), равно сумме отклонений, соответствующих разным формам колебаний.

Частоты колебаний  $\omega_n = \frac{an t \pi}{l}$  называются *собственными частотами*. Наименьшая собственная частота колебаний соответствует  $n = 1$  и равна

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Она соответствует основному тону колебаний струны. Как видно, частота основного тона колебаний тем выше, чем сильнее натянута струна и чем она короче и легче. Высшие тона колебаний называются обертонами.

**Пример.** Найти закон колебания струны длиной  $l$ , если в начальный момент струне придана форма кривой

$$u = \frac{x(l-x)}{8l},$$

а затем струна отпущена без начальной скорости. Струна закреплена на концах. Внешние силы отсутствуют.

**Решение.** Задача сводится к решению однородного волнового уравнения (4.1) при однородных граничных условиях (4.4) - (4.5) и начальных условиях

$$u(x,0) = \frac{x(l-x)}{8l},$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (4.25)$$

Для рассматриваемого случая, очевидно,  $B_n = 0$ , так как согласно (4.3)  $\varphi(x) = 0$ . Подставляя в (4.22)

$$f(x) = \frac{x(l-x)}{8l}$$

после двукратного интегрирования по частям находим

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{(\pi n)^3}. \quad (4.26)$$

Подстановка (4.26) в (4.19) с учетом  $B_n = 0$  приводит к решению задачи в виде

$$u(x,t) = \frac{l}{2\pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.27)$$

#### § 4. Продольные колебания стержня

Стержнем называют тело, размеры поперечного сечения которого малы по сравнению с его длиной. Как известно, стержень является основным расчётным объектом в сопротивлении материалов.

Будем рассматривать призматический стержень постоянного поперечного сечения с прямолинейной осью. Если стержень предварительно растянут или сжат осевыми силами, и в момент времени  $t = 0$  действие сил мгновенно прекращается, то он будет совершать свободные (собственные) продольные колебания

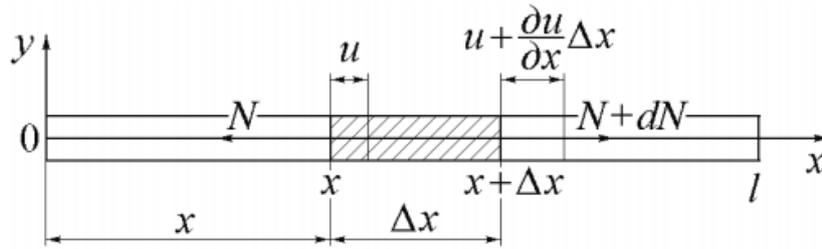


Рис. 4.3

Будем предполагать, что при этом сечения, перпендикулярные к продольной оси стержня, оставаясь плоскими, будут смещаться только вдоль оси абсцисс  $0x$ , совпадающей с продольной осью стержня (рис. 4.3). Предполагаем также, что стержень однородный, то есть выполнен из материала с постоянной линейной плотностью  $\rho$ .

Пусть

$u(x, t)$  [м] – продольное перемещение поперечного сечения стержня с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$ ,

$E$  – модуль упругости материала стержня [Па],

$F$  – площадь поперечного сечения стержня [м<sup>2</sup>],

$l$  – его длина [м].

Относительное удлинение (деформация) стержня в сечении с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$  равно

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Внутренние нормальные силы определяются по закону Гука и равны: в сечении  $x$ :

$$N = \sigma F = E \varepsilon F = EF \frac{\partial u(x, t)}{\partial x};$$

в сечении  $(x + dx)$ :

$$N + dN = EF \frac{\partial}{\partial x} \left( u + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \right) = EF \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx \right).$$

Следовательно, равнодействующая внутренних нормальных сил упругости, приложенных к элементу стержня, равна

$$(N + dN) - N = EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) - EF \frac{\partial u}{\partial x} = EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Эта сила уравнивается возникающими при продольных колебаниях силами инерции  $\rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

Приравняв в соответствии с принципом Даламбера сумму сил, действующих на выделенный элемент стержня, нулю:

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - \rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.28)$$

получим уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.29)$$

где теперь  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость распространения упругих волн в материале стержня, *скорость звука в материале* [м/сек].

Как видно, уравнение малых свободных продольных колебаний стержня совпадает по форме записи с уравнением малых поперечных колебаний струны (4.1).

Различие между этими задачами будет проявляться в постановке граничных условий. Ограничимся случаем консольного закреплённого стержня (рис.4.4).

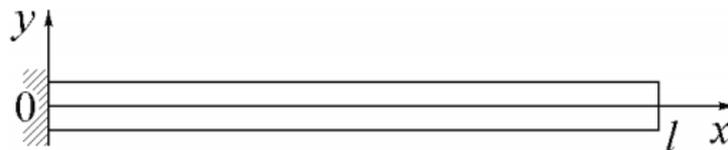


Рис. 4.4.

Очевидно, на левом конце стержня

$$u(0) = 0. \quad (4.30)$$

Так как на свободном конце стержня внешних сил нет, то равнодействующая внутренних нормальных сил упругости должна быть равна нулю, откуда следует

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0. \quad (4.31)$$

Как видно, в отличие от задачи о свободных поперечных коле-

баниях закреплённой по концам струны (4.1–4.5), граничные условия теперь являются смешанными, то есть ставятся на функцию и её производную.

Начальными условиями определяются продольные перемещения и скорости поперечных сечений стержня в момент времени  $t=0$ :

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), \quad (4.32)$$

где  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  – заданные функции.

Найдём решение начально-краевой задачи (4.29–4.32) методом разделения переменных.

Как и выше, представляя ненулевое частное решение уравнения (4.29) в виде (4.6), после обычных преобразований, характерных для метода разделения переменных, получим уравнения (4.8) и (4.9).

Подставляя (4.6) в граничные условия (4.30), (4.31), находим

$$X(0) = X'(l) = 0. \quad (4.33)$$

Таким образом, для определения функции  $X(x)$  теперь приходим к задаче на собственные значения (4.11), (4.33). Общее решение уравнения (4.11) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из первого граничного условия (4.33) получаем

$$X(0) = C_2 = 0,$$

а из второго граничного условия следует

$$X'(l) = C_1 \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Поэтому, чтобы существовало нетривиальное решение задачи, необходимо принять

$$\cos \lambda l = 0,$$

то есть при  $\lambda l = \frac{\pi}{2} + n\pi, (n = 1, 2, \dots)$  Поэтому собственные значения равны

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.34)$$

Соответствующие им собственные функции с точностью до постоянного множителя  $C_1$  определяются по формуле

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l}. \quad (4.35)$$

Заметим, что собственные функции (4.35) ортогональны на отрезке  $[0, l]$ .

При  $m \neq n$  имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \left( \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos \frac{(m+n+1)\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \left( \frac{l}{\pi(n-m)} \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \frac{l}{\pi(n+m+1)} \cos \frac{(m+n+1)\pi x}{l} \right) \Big|_0^l = 0. \end{aligned}$$

При  $m = n$  имеем

$$\int_0^l \sin^2 \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l} \right) dx = \frac{l}{2}.$$

С учетом (4.34) уравнение (4.8) запишется в виде

$$T_n''(t) + \left( \frac{a(2n+1)\pi}{2l} \right)^2 T_n(t) = 0. \quad (4.36)$$

Его общее решение

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a(2n+1)t\pi}{2l} + B_n \sin \frac{a(2n+1)t\pi}{l}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

Подставляя (4.35), (4.37) в (4.6) и суммируя частные решения линейного однородного уравнения (4.29), находим решение задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{a(2n+1)t\pi}{2l} + B_n \sin \frac{a(2n+1)t\pi}{l} \right) \sin \frac{(2n+1)x\pi}{2l}. \quad (4.38)$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  определяем из начальных условий (4.32):

$$\begin{aligned} u(x, t) = f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)x\pi}{2l}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sin \frac{(2n+1)x\pi}{2l}, \end{aligned}$$

где  $A_n$  и  $B_n$  можно рассматривать как коэффициенты разложения

функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в ряды Фурье по системе ортогональных функций  $\sin[(2n+1)\pi x/(2l)]$ . Поэтому согласно (4.22) находим

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx,$$

$$B_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l} = \frac{\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx.$$

Окончательно получим

$$B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx$$

Подставляя  $A_n$  и  $B_n$  в ряд (4.38), получим окончательное решение задачи о свободных продольных колебаниях консольного защемленного стержня.

## § 5. Решение неоднородного волнового уравнения методом разложения по собственным функциям

Неоднородным волновым уравнением называется уравнение вида

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, t). \quad (4.39)$$

В котором  $f(x, t)$  – плотность внешней силы, вызывающей вынужденные колебания струны, т. е. предел отношения

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x, x + \Delta x, t)}{\rho \Delta x},$$

где  $F$  – внешняя сила, действующая на участок струны  $[x, x + \Delta x]$  в момент времени  $t$ .

Рассмотрим различные решения этого уравнения на примерах

задач о вынужденных колебаниях струны с различными граничными и начальными условиями.

### 5.1. Задача о вынужденных колебаниях струны при отсутствии начальных возмущений

К этой задаче сводится решение неоднородного волнового уравнения (4.39) с однородными граничными и начальными условиями

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \quad (4.40)$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (4.41)$$

Её решение строится *методом разложения по собственным функциям*.

В соответствии с этим методом на первом этапе решается методом разделения переменных краевая задача для однородного волнового уравнения (4.1) при однородных граничных условиях (4.4) - (4.5).

Как было показано выше (см. §3), собственные функции этой задачи определяются согласно (4.16):  $X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$ .

На втором этапе возвращаемся к неоднородному уравнению (4.39), и его решение ищем в виде разложения в ряд по собственным функциям однородной задачи

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

При этом удовлетворяются граничные условия (4.40), а задача сводится к отысканию неизвестной функции  $U_n(t)$ . Подставляя (4.42) в уравнение (4.39), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 U_n}{dt^2} + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 U_n \right) \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x, t). \quad (4.43)$$

Далее раскладываем в ряд Фурье на отрезке  $[0, l]$  по собственным функциям однородной задачи правую часть уравнения (4.43)

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x, t). \quad (4.44)$$

При этом

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (4.45)$$

Подставляя (4.44) в уравнение (4.43), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 U_n}{dt^2} + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 U_n \right) \sin \frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Приравнявая в этом равенстве выражения при одинаковых собственных функциях, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 U_n}{dt^2} + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 U_n = F_n(t). \quad (4.46)$$

Подставляя далее (4.42) в начальные условия (4.41), находим

$$U_n(0) = \frac{dU_n(0)}{dt} = 0. \quad (2.47)$$

Таким образом, отыскание функции  $U_n(t)$  сводится к решению задачи Коши для обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (4.46) с начальными условиями (4.47). Общее решение уравнения (4.46) складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения  $U_n^*(t)$ :

$$U_n(t) = C_n(t) \cos \frac{ant\pi}{l} + D_n(t) \sin \frac{ant\pi}{l} + U_n^*(t). \quad (2.48)$$

В общем случае, при произвольной непрерывной правой части в уравнении (4.46) частное решение ищется в соответствии с методом вариации произвольных постоянных в виде

$$U_n^*(t) = C_n(t) \cos \frac{ant\pi}{l} + D_n(t) \sin \frac{ant\pi}{l}. \quad (2.49)$$

Определитель Вронского, составленный из частных линейно независимых решений однородного уравнения (4.46), равен:

$$W = \begin{vmatrix} \cos \frac{ant\pi}{l} & \sin \frac{ant\pi}{l} \\ -\frac{an\pi}{l} \sin \frac{ant\pi}{l} & \frac{an\pi}{l} \cos \frac{ant\pi}{l} \end{vmatrix} = \frac{an\pi}{l}.$$

Поэтому производные от варьируемых функций  $C_n(t)$  и  $D_n(t)$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} C_n'(t) &= \frac{\sin \frac{ant\pi}{l} \cdot F_n(t)}{W} = -\frac{l}{an\pi} \cdot \sin \frac{ant\pi}{l} \cdot F_n(t), \\ D_n'(t) &= \frac{\cos \frac{ant\pi}{l} \cdot F_n(t)}{W} = \frac{l}{an\pi} \cdot \cos \frac{ant\pi}{l} \cdot F_n(t). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения первого порядка (2.50), находим

$$\begin{aligned} C_n(t) &= -\frac{l}{an\pi} \cdot \int_0^l \sin \frac{an\tau\pi}{l} \cdot F_n(t) d\tau, \\ D_n(t) &= \frac{l}{an\pi} \cdot \int_0^l \cos \frac{an\tau\pi}{l} \cdot F_n(t) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения (4.46) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} U_n^*(t) &= \frac{l}{an\pi} \left( \sin \frac{ant\pi}{l} \int_0^l F_n(\tau) \cos \frac{an\tau\pi}{l} d\tau - \cos \frac{ant\pi}{l} \int_0^l F_n(\tau) \sin \frac{an\tau\pi}{l} d\tau \right) = \\ &= \frac{l}{an\pi} \int_0^l F_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

а общее решение согласно (4.48) будет

$$U_n(t) = C_n \cos \frac{an\pi t}{l} + D_n \sin \frac{an\pi t}{l} + \frac{l}{an\pi} \int_0^l F_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t - \tau) d\tau. \quad (4.51)$$

Из начальных условий (4.47) следует

$$C_n = D_n = 0. \quad (4.52)$$

Подставляя (4.51) с учетом (4.52) в (4.42), найдем закон вынужденных

колебаний струны конечной длины при отсутствии начальных возмущений в виде

$$u(x, t) = \frac{l}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \int_0^t F_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t - \tau) d\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.53)$$

Учитывая выражение (4.45) и меняя в (4.53) порядок суммирования и интегрирования, можно представить решение задачи (4.39) - (4.41) в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{l}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} \int_0^t \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{an\pi\xi}{l} d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{l} (t - \tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \frac{2}{a\pi} \left[ \int_0^t \left( \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{an\pi\xi}{l} d\xi \right) \sin \frac{n\pi}{l} (t - \tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

или окончательно

$$u(x, t) = \left[ \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \quad (4.54)$$

где введено обозначение

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{an\pi\xi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} (t - \tau). \quad (4.55)$$

Функция  $G(x, \xi, t - \tau)$  называется функцией источника или функцией влияния мгновенного сосредоточенного импульса, приложенного на ограниченном отрезке  $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$ . Можно показать, что в пределе при  $\Delta\xi \rightarrow 0$ ,  $\Delta\tau \rightarrow 0$  получим функцию

$$u(x, t) = G(x, \xi, t - \tau) \frac{I}{\rho},$$

характеризующую влияние мгновенного сосредоточенного импульса мощности

$$I = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Зная воздействие мгновенной сосредоточенной силы, можно по формуле (4.54) найти закон колебаний струны под действием произвольной непрерывно распределенной силы  $f(x, t)$ .

Если функция  $F_n(t)$  в уравнении (4.46) имеет достаточно простой

вид, то для определения частного решения можно воспользоваться методом подбора частного решения.

## 5.2. Решение задачи о вынужденных колебаниях струны с учетом начальных возмущений

Пусть требуется найти решение уравнения (4.39) при однородных граничных условиях (4.40) и неоднородных начальных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \varphi(x), \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

В силу линейности уравнения (4.39) для решения поставленной задачи применим приём редукции, а именно решение исходной начально-краевой задачи может быть представлено в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad (4.57)$$

где функция  $v(x,t)$  является решением начально-краевой задачи для однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.58)$$

с однородными граничными условиями

$$v(0,t) = v(l,t) = 0 \quad (4.59)$$

и с начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} &= \varphi(x), \\ v(x,0) &= f(x). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Функция  $w(x,t)$  является решением начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (4.61)$$

при однородных граничных условиях

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad (4.62)$$

и с нулевыми начальными условиями

$$\begin{aligned} w(x,0) &= 0, \\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Задача (4.58) - (4.60) описывает свободные колебания струны, её решение известно (см. § 3, выражения (4.19), (4.22), (4.23)):

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.64)$$

Задача (4.61)-(4.63) описывает вынужденные колебания струны при отсутствии начальных возмущений. Её решение представляется в виде разложения в ряды по собственным функциям однородной задачи:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Как было показано, отыскание функции  $W_n(t)$  сводится к решению задачи Коши для обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 W_n}{dt^2} + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 W_n = F_n(t) \quad (2.66)$$

с однородными начальными условиями

$$W_n(0) = \frac{dW_n(0)}{dt} = 0. \quad (2.67)$$

Суммируя решения задач (4.58) - (4.60) и (4.61) - (4.63), получаем общее решение исходной задачи.

**Пример.** Найти закон колебаний однородной струны длиной  $l$  под действием внешней гармонической силы

$$F(x,t) = \frac{2\rho\lambda x}{l} \sin \omega t,$$

рассчитанной на единицу длины струны. Концы струны закреплены. Начальные условия

$$u(x,0) = U_0(x) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = V_0(x) = \frac{gx}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (4.68)$$

**Решение.** Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (4.69)$$

при однородных граничных условиях (4.40) и начальных условиях (4.68). Величины  $\rho, \gamma$  и  $\omega$  – константы.

Так как начальные условия неоднородны, применяем прием редукции, полагая

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

Функция  $v(x,t)$  определяется выражением (4.64). Из формул (4.22), (4.23) находим

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{2g}{a\pi l} \int_0^l x \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{4gl}{\pi^4 a}. \quad (4.70)$$

Поэтому

$$v(x,t) = \frac{4gl}{\pi^4 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} \sin \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.71)$$

Функция  $F_n(t)$  определяется из выражения (4.45):

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{2\gamma x}{l} \sin \omega t \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{2\gamma}{l^2} \sin \omega t \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{4\gamma(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \omega t. \quad (4.72)$$

Для определения функции  $w(x,t)$ , используя (4.65) и (4.72), приходим к уравнению

$$\frac{d^2 W_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 W_n = \frac{4\gamma(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \omega t.$$

Общее решение уравнения (4.73) имеет вид

$$W_n(x, t) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l} + D_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{4\gamma(-1)^{n+1}}{n\pi \left[ \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right]} \sin \omega t. \quad (4.74)$$

Находим далее произвольные постоянные из начальных условий (4.68):

$$C_n = 0, D_n = \frac{4\gamma\omega l(-1)^n}{a(n\pi)^2 \left[ \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right]}. \quad (4.75)$$

Следовательно,

$$W_n(t) = \frac{4\gamma(-1)^n}{n\pi \left[ \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right]} \left( \frac{\omega l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a t}{l} - \sin \omega t \right). \quad (4.76)$$

Подставляя (4.76) в (4.65), находим решение задачи (4.66), (4.67) в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\gamma(-1)^n}{n\pi \left[ \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right]} \left( \frac{\omega l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a t}{l} - \sin \omega t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.77)$$

Суммируя решения (4.71) и (4.77), окончательно имеем

$$w(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{gl}{a\pi^3} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^4} \sin \frac{n\pi a t}{l} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma(-1)^n}{n \left[ \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right]} \left( \frac{\omega l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a t}{l} - \sin \omega t \right) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.78)$$

Из полученного решения следует, что в случае, когда частота внешней возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот колебаний струны  $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$  (явление резонанса), отклонения струны от положения равновесия неограниченно возрастают. Это, ко-

нечно, является следствием принятой идеализированной математической модели колебаний, не учитывающей демпфирования.

### 5.3. Редукция общей неоднородной начально-краевой задачи для волнового уравнения

Пусть уравнение и все краевые условия (граничные и начальные) неоднородны и имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (4.78)$$

Граничные условия

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), \quad (4.79)$$

а начальные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= V_0(x), \\ u(x, 0) &= U_0(x). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Принимаем

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (4.81)$$

где функция  $w(x, t)$  ищется в виде линейной функции:  $w(x, t) = kx + b$ , а коэффициенты  $k$  и  $b$  определяются из граничных условий (4.79):

$$\begin{aligned} w(0, t) &= b = \alpha(t), \\ w(l, t) &= kl + b = kl + \alpha(t) = \beta(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$k = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l}.$$

Поэтому

$$w(x, t) = \alpha(t) + [\beta(t) - \alpha(t)] \frac{x}{l}. \quad (4.82)$$

При этом, как легко убедиться, для функции  $v(x, t)$  получаются однородные граничные условия:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0. \quad (4.83)$$

Подставляя (4.81) с учетом (4.82) в уравнение (4.78), приходим к неоднородному уравнению относительно функции  $v(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \alpha(t) + [\beta(t - \alpha(t))] \frac{x}{l} \right). \quad (4.84)$$

Начальные условия для функции  $v(x, t)$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= U_0(x) - w(x, 0), \\ \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} &= V_0(x) - \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Таким образом, отыскание функции  $v(x, t)$  сведено к задаче (4.84), (4.83), (4.85) с однородными граничными условиями, которая далее решается с использованием приема редукции (см. п. 5.2). Найдя функцию  $v(x, t)$  и подставляя её в (4.81), получим окончательное решение исходной задачи (4.78-4.80).

### Задачи для решения в аудитории

**Задача 1.** Струна с закреплена на концах в точках  $x=0$  и  $x=l$ , имеет в начальный момент времени форму параболы  $u(x, 0) = \frac{4}{l^2} x(l-x)$ . определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости всех точек струны равны нулю.

**Задача 2.** Найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при следующих граничных условиях

$$\frac{du}{dx}(0, t) = 0,$$

$$\frac{du}{dx}(l, t) = 0.$$

С начальными условиями

$$u(x, 0) = x,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 2.$$

## Ответы

$$1. u(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l};$$

$$2. u(x, t) = \frac{l}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4l}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

### Индивидуальные задания

1. Найти отклонение  $u(x, t)$  закрепленной на концах  $x=0$  и  $x=l$  однородной горизонтальной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке  $x = \frac{l}{2}$  и отклонением вершины от положения равновесия  $h$ , а начальные скорости отсутствовали. Взяв три первых члена ряда Фурье, найти приближенно отклонение струны в точке  $x = \frac{l}{3}$ , если  $t=0,05$ с,  $a=5000$ м/с,  $l=30$ м.

2. Найти закон колебания струны длиной  $l$ , если концы струны закреплены, начальное положение задается функцией  $f(x)=2$ , начальные скорости отсутствуют, взяв три члена ряда Фурье, найти приближенное отклонение середины струны, если  $l=10$ м;  $t=0,01$ с,  $a=5000$ м/с.

3. Найти закон колебания струны длиной  $l$ , если в начальный момент времени всем точкам струны сообщена скорость, равная  $x(l-x)$ . Начальное отклонение отсутствует. Концы струны закреплены. Взяв 3 члена из ряда Фурье, найти приближенно отклонение середины струны, если  $l=20$ м,  $t=0,1$ с, материал – сталь.  $T_{\text{стали}}=21,6 \cdot 10^{10}$ Па,  $\rho_{\text{стали}}=7,8 \cdot 10^3$ кг/м<sup>3</sup>.

4. Найти закон свободных колебаний струны длиной  $l$ , закрепленной на концах, если известно положение струны в начальный момент  $\sin \frac{\pi x}{l}$  и начальные скорости точки описываются функцией  $\sin \frac{2\pi x}{l}$ . Взяв три члена ряда Фурье, найти приближенное отклонение середины струны, если  $l=10$ м,  $t=0,01$ с,  $a=5000$ м/с.

5. Однородный стержень длиной  $2l$  сжат силами, приложенными к его концам так, что он укоротился до длины  $2l(1-\varepsilon)$ . При  $t=0$  нагрузка снимается. Найти продольные колебания стержня  $u(x;t)$ . Взяв три члена получившегося ряда Фурье, найти приближенно кривую распределения смещения сечения с абсциссой  $x$  стержня, если  $l=10\text{м}$ ;  $t=0,01\text{с}$ ,  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$  см, материал-сталь (считать, что точка  $x=0$  находится посередине стержня, обратить внимание, что оба конца стержня свободны и начальная скорость равна нулю, а смещение сечения с абсциссой  $x$  – пропорционально)

*Замечание.* По закону Гука смещение любого сечения в начальный момент пропорционально его абсциссе, т. е.  $u(x,0) = -\varepsilon x$ .  $T_{\text{стали}}=21,6 \cdot 10^{10}\text{Па}$ ,  $\rho_{\text{стали}}=7,8 \cdot 10^3\text{кг/м}^3$ .

6. Круглый цилиндрический стержень, имеющий в нерастянутом состоянии длину  $l$ , закреплен на конце  $x=0$ , к другому концу приложена растягивающая сила  $Q=\text{const}$ . В момент  $t=0$  эта сила снимается. Найти продольные колебания стержня, взяв три члена получившегося ряда Фурье, определить приближенно отклонение свободного конца стержня, приняв  $l=10\text{м}$ ;  $Q=100\text{кг}$ , площадь сечения  $S=10\text{см}^2$ ;  $t=0,01\text{с}$ ; материал-сталь.  $T_{\text{стали}}=21,6 \cdot 10^{10}\text{Па}$

*Замечание.* Точки струны получают начальное смещение  $u(x,0)=Qx/TS$ , где  $T$ -модуль упругости,  $S$ -площадь поперечного сечения стержня.

7. Найти закон свободных колебаний струна длиной  $l$ , закрепленной на концах, если начальное положение струны задается функцией  $x(l-x)$ , а начальные скорости отсутствуют. Взяв три первых члена ряда Фурье, определить приближенно отклонение струны, если  $l=10\text{м}$ ,  $t=0,02\text{с}$ ,  $a=5000\text{м/с}$ .

8. Найти закон свободного колебания струны длиной  $1\text{м}$ , закрепленной на концах, если известно, что ее натяжение  $T$  и линейная плотность  $\rho$  таковы, что  $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 100\text{м/с}$ . Начальное положение струны задается функцией  $f(x)=(1-2x^2+x^3)$ , начальные скорости точек струны равны нулю.

9. Струна закреплена на концах  $x=0$  и  $x=3$ . В начальный момент форма струны имеет вид ломаной  $OAB$ , где  $O(0;0)$ ;  $A(2;-0,1)$ ;  $B(3;0)$ . Найти форму струны для любого момента времени  $t$ , если начальные скорости точек струны отсутствуют. Взяв три первых члена ряда

Фурье, найти приближенно отклонение струны в точке  $A$ , если  $t=0,05\text{с}$ ,  $a=5000\text{м/с}$ ;  $l=30\text{м}$ .

10. Найти закон колебания струны, расположенной на отрезке  $[0, l]$ . Концы струны закреплены. Струна отпущена без начальной скорости, ее начальная форма задана функцией  $u(x, 0) = A \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$ ,  $A=\text{const}$ ,  $n$  – целое число. Найти точки наибольшего отклонения струны.

11. Найти закон колебания струны с закрепленными концами  $x=0$ ,  $x=l$ , или начальные скорости всех точек струны равны нулю, а в начальный момент времени струне придана форма параболы  $u(x, 0) = \frac{4h}{l^2} x(l-x)$ .

12. Найти закон колебания струны с закрепленными концами  $x=0$ ,  $x=l$ , если в начальном положении струна находится в покое, а все точки струны получают начальную скорость  $\beta/4$ ,  $\beta=\text{const}$ .

13. Найти закон колебания струны длины  $l$  если ее концы жестко закреплены. Струна отпущена без начальной скорости; а ее начальное отклонение имеет вид (рис. 4.5

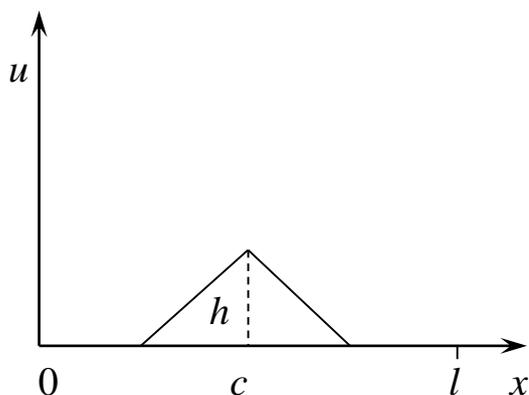


рис. 4.5

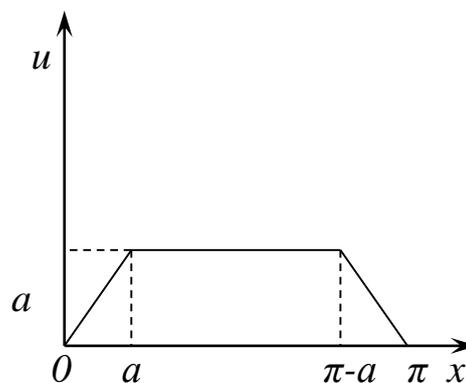


рис. 4.6

14. Найти закон колебания струны. Начальная форма смещения, которой изображена на (рис. 4.6). Струна отпущена без начальной скорости, ее концы закреплены.

15. Найти закон колебания струны, которой придана начальная форма, описываемая функцией

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{l-\alpha}(x-l) & -l \leq x < -\alpha; \\ h & -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ \frac{h}{\alpha-l}(x-l) & \alpha < x \leq l. \end{cases} .$$

Струна отпущена без начальной скорости. Ее концы закреплены в точке  $x=-l$  и  $x=l$

16. Найти закон колебания струны, закрепленной в точках  $x=0$  и  $x=l$ . В начальный момент времени струне придана форма кривой  $u(x,0) = \sin^3 x$ , струна отпущена без начальной скорости.

17. Пусть струна, расположенная на отрезке  $[0, l]$  закреплена на концах. В начальный момент времени струна находится в покое, все точки струны получают начальную скорость, которая описывается функцией  $u_t'(x,0) = \sin \frac{\pi}{l} x$ .

18. Струна закреплена на концах  $x=0$ ;  $x=3$ . В начальный момент форма струны имеет вид ломанной  $OAB$ :  $O(0;0)$ ,  $A(2;-0,1)$ ;  $B(3;0)$ . Найти форму струны, для любого момента времени  $t$ , если начальные скорости точек струны отсутствуют.

### Библиографический список

1. Руппель, Е.Ю. Приложение рядов для расчета рекуперации кинетической энергии при использовании пневмогидроаккумулятора /Е.Ю. Руппель //Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – 2015. -№ 5. –С. 129–135.
2. Руппель, Е.Ю. Математическое моделирование линии управления пневмоприводом /Е.Ю.Руппель // Наука XXI века: опыт прошлого - взгляд в будущее : материалы Международной научно-практической конференции. –СибАДИ, 2015. –С. 36 – 39.
3. Журбенко, Л. Н. Математика : учебное пособие/ Л. Н. Журбенко, Ю. М. Данилов [и др.]– М. : ИНФРА-М, 2016. – 496 с.
4. Карасёва, Р.Б. Математика [Электронный ресурс] : практикум для студентов технических направлений заочной формы обучения / Р. Б. Карасева, С. В. Матвеева, Е. Ю. Руппель – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2016. – Режим доступа: <http://bek.sibadi.org/fulltext/esd94.pdf>. – Загл. с экрана (дата обращения к ресурсу: 12.04.18). – ISBN 978-5-93204-862-7.
5. Руппель, Е.Ю. Задачник - практикум по математике : учебное пособие / Е.Ю. Руппель, Т.Е.Болдовская, С.В.Матвеева. – Омск : СибАДИ, 2013. – Ч. 2. – 116 с.
6. Бугров, Я. С. Высшая математика : в 3 т. Т 3. дифференциальные уравнения. Кратные интегралы : учебник / Я. С. Бугров. – 7-е изд.– М : Юрайт, 2018. – 288 с. – ISBN 978-5-9916-8643-3.
7. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев.– М. : Астрель, 2008. – 654 с.
8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов.– М. : Интеграл–пресс, 2006.– Т.2.
9. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис.– М. : Лань, 2007.– 688 с.
10. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс : учебник/ Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : изд. Лань, 2008. – 960 с.
- 11.Шипачев, В.С. Высшая математика. – М. : Высшая школа, 1985.
12. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С.Бугров, С.Н.Никольский. – М. :Наука, 1989.
13. Руппель, Е.Ю. Использование в теоретическом курсе мате-

матики задач, учитывающих будущую профессиональную деятельность обучающихся /Е.Ю. Руппель // Методика преподавания математических и естественнонаучных дисциплин: современные проблемы и тенденции развития : материалы IV Всероссийской научно-практической конференции (Омск, 4 июля 2017 г.) /отв. ред. А.А. Романова. –Омск : Изд-во Ом. гос. унта, 2017. –С. 69–71.

14. Руппель, Е.Ю. Математика: Числовые и функциональные ряды. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие / Е.Ю. Руппель; СибАДИ. –Омск : СибАДИ, 2016. – 158 с.