§ 3. Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке x. Найдем дифференциал производных этих функций: $d(uv) = u'v\,du + uv'dv$.

Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства: $\int d(uv) = \int u'v\,dx + \int uv'\,dv$, или $\int d(uv) = \int v\,du + \int udv$, но $\int d(uv) = uv + C$, следовательно,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения множителей $u(x)$ и $dv(x)$; при этом dx обязательно входит в $dv(x)$. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int v\,dv$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

Пример 1. Найти $\int x\sin x\,dx$.

Решение. Положим $u = x$; $dv = \sin x\,dx$, тогда $du = dx$; $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$.

По формуле (1.3) находим

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Рассмотрим некоторые конкретные способы разбиения подынтегрального выражения на множители u и dv.

В интегралах вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$,

где $P(x)-$многочлен относительно x; $a-$некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители – за dv.

Пример 2. Найти $\int (x+5)e^{2x}\,dx$.

Решение. Положим $u = x+5$; $dv = e^{2x}dx$, тогда $du = (x+5)'\,dx$ или $du = dx$, т.к. $(x+5)' = x' + 5' = 1 + 0 = 1$. Следовательно, оставшиеся сомножители равны dv. Таким образом, $dv = e^{2x}\dfrac{1}{2}d\,2x$, интегрируя последнее равенство, получим $v = \dfrac{1}{2}\int e^{2x}\,d\,2x = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

По формуле (1.3) находим

$$\int(x+5)e^{2x}\,dx=(x+5)\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{(x+5)}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d2x=$$
$$=\frac{(x+5)}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

В интегралах вида $\int P(x)\ln|ax|\,dx$, $\int P(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P(x)\arccos ax\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}xax\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}\,ax\,dx$ полагают $P(x)dx=dv$, а остальные сомножители – за u.

Пример 3. Найти $\int\left(5x^3+2x^2+3\right)\ln|x|\,dx$.

Решение. Положим $u=\ln|x|$; $dv=\left(5x^3+2x^2+3\right)dx$, тогда $du=(\ln|x|)'\,dx=\frac{1}{x}dx$; $\int dv=\int\left(5x^3+2x^2+3\right)dx$, откуда

$$v=\int\left(5x^3+2x^2+3\right)dx=5\int x^3\,dx+2\int x^2\,dx+3\int dx=5\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{2+1}}{2+1}+3x=$$
$$=\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x.$$

Следовательно,

$$\int\left(5x^3+2x^2+3\right)\ln|x|\,dx=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\int\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\frac{1}{x}dx=$$
$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\left[\frac{5}{4}\int\frac{x^4}{x}dx+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{x}dx+3\int\frac{x}{x}dx\right]==\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|$$
$$-\left[\frac{5}{4}\int x^3\,dx+\frac{2}{3}\int x^2\,dx+3\int dx\right]=$$
$$=-\frac{5}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-3x+C=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\frac{5}{16}x^4-\frac{2}{9}x^3-3x+C.$$

Задания для решения в аудитории

1. $\int(3x-1)\cos 5x\cdot dx$.

1. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

3. $\int\arcsin x\cdot dx$.

4. $\int(2x^2-3)\cos x dx$.

5. $\int\frac{\ln x}{x^2}\cdot dx$.

6. $\int\ln(x^2+1)dx$.

Ответы

1. $\frac{1}{5}(3x-1)\cdot\sin 5x+\frac{3}{25}\cdot\cos 5x+C$. 2. $-x\cdot\mathrm{ctg}x+\ln|\sin x|+C$.

3. $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. 4. $(2x^2-3)\sin x+4x\cos x-4\sin x+C$. 5. $\frac{-1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$. 6. $x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}x+C$.