Лекция. Определённый интеграл. Свойства.

Рассмотрим **вычисление определённого интеграла** на примере вычисления площади криволинейной трапеции.

Пусть дана фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$,

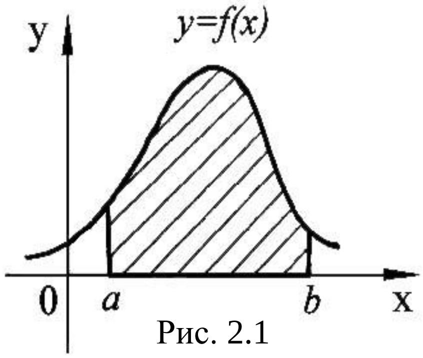

Рис. 2.1

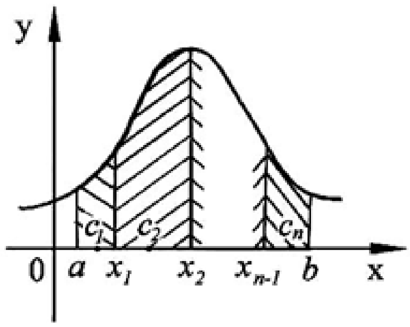

Рис. 2.3

отрезком $[a;b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 2.1). Такую фигуру называют криволинейной трапецией. Найдем ее площадь.

Найдем теперь площадь криволинейной трапеции S через определенный интеграл. Разобьем криволинейную трапецию на n полос так, как показано на рис. 2.3. При этом на отрезке $[a;b]$ появились точки $x_1,\ x_2, ...,\ x_{n-1}$.

Найдем для первой полосы точку c_1, $a \le c_1 \le x_1$ такую, что площадь первой полосы равна $f(c_1)(x_1 - a)$. Для второй полосы найдем точку c_2, $x_1 \le c_2 \le x_2$ такую, что площадь полосы равна $f(c_2)(x_2 - x_1)$. Поступаем так для всех n полос, т.к. площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей полос, на которую она разбита:

$$S = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}).$$

Такого типа равенство будет иметь место, как бы мы не разбивали криволинейную трапецию на полосы. Длину наибольшего из отрезков обозначим через λ. Перейдем в нем к пределу при $\lambda \to 0$, мы получим:

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1})\right].$$

Обозначим

$$\lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1})\right],$$

через выражение $\int_a^b f(x)\,dx$, получим

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.3}$$

Таким образом, ввели определенный интеграл через предел особого рода сумм (***интегральных сумм***).

Определение. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$, где $a < b$. Выполним следующие операции:

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками x_i $(i = 0,1,2,...,n)$, так что $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

2. Величину $\lambda = \max\limits_{i=0,...,n}(x_{i-1} - x_i)$ назовем шагом разбиения.

3. На каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ зафиксируем произвольную точку C_i, $C_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

4. Составим сумму всех произведений $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, $(i = 1,...,n)$; $\sigma_n = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + ... + f(c_n)(b - x_{n-1})$ или в сокращенном виде

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_1)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ , \tag{2.4}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Суммы вида (2.4) называются ***интегральными суммами функции*** $f(x)$.

Очевидно, что при различных разбиениях отрезка $[a;b]$ на части получим различные интегральные суммы вида (2.4). Таким образом, для данной функции $f(x)$ и данного отрезка $[a;b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм вида (2.4), которые зависят от числа n и от выбора точек деления x_i и точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. В примере вычисления площади криволинейной трапеции точки c_i подбирались специально, что не противоречит определению определенного интеграла через пределы интегральных сумм.

Очевидно, что при различных разбиениях отрезка $[a;b]$ на части получим различные интегральные суммы вида (2.4). Таким образом, для данной функции $f(x)$ и данного отрезка $[a;b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм вида (2.4), которые зависят от числа n и от выбора точек деления x_i и точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. В примере вычисления площади криволинейной трапеции точки c_i подбирались специально, что не противоречит определению определенного интеграла через пределы интегральных сумм.

Определение. Если при любой последовательности разбиений отрезка $[a;b]$ таких, что $\lambda = \max \Delta x_i \to 0 (n \to \infty)$ $(n \to \infty)$, при любом выборе точек $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ интегральная сумма

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

стремится к одному и тому же конечному числу A:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum f(c_i)\Delta x_i = A,$$

то число A называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Итак, по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i\,. \qquad (2.5)$$

Заметим без доказательств, что предел в правой части равенства (2.5) существует и конечен, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Если $f(x)$ непрерывна и неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$ (см. рис. 2.1), т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.6)$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла. Без доказательства заметим, что оба определения эквивалентны. Второе определение помогает получить приложение определенного интеграла (вычисление площади и т.д.), а формула Ньютона – Лейбница позволяет вычислить определенный интеграл без вычисления предела интегральной суммы.

Примем без доказательства свойства определенного интеграла [7]:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c\in(a,b)$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_b^b f(x)dx = 0$.

4. $\int_a^b f(x)dx > 0$, если $f(x) > 0$.

5. Если $f(x)\ge g(x)$ при всех $x\in[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

6.Если $m \le f(x) \le M$ при всех x из промежутка $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7. Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует по крайней мере одна точка c такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Доказательство: В соответствии со свойством 6:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M,$$

т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число $c \in [a, b]$, что если

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = C \quad \text{и } C = f(c),$$

а $a \le c \le b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Что и требовалось доказать.

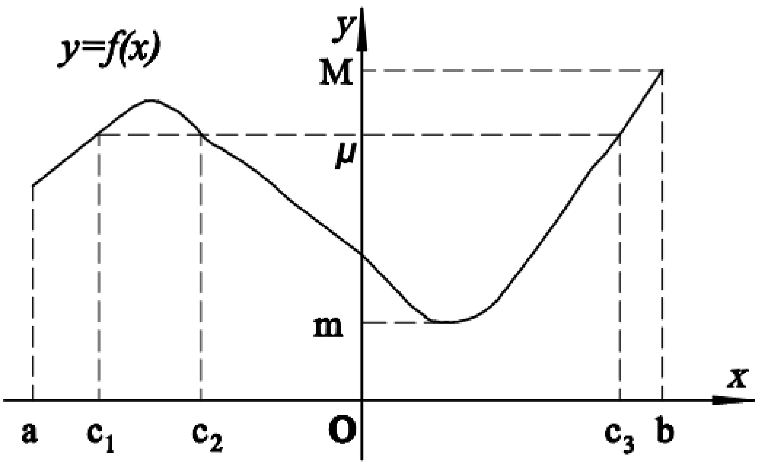

Рис. 2.4

Замечание. С геометрической точки зрения теорема утверждает, что существует прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции, имеющий равное с ней основание (если $f(x) > 0$ для любого x из отрезка $[a, b]$).

Докажем связь неопределенного интеграла с определенным. Другими словами, докажем эквивалентность двух определений определённого интеграла.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Величина определённого интеграла от этой функции $\int_a^b f(x)dx$ будет зависеть от a и b. Если зафиксировать значение a, то величина $\int_a^b f(x)dx$ будет зависеть только от b. Зафиксируем нижний предел интегрирования a, а верхний будем считать переменным. Чтобы подчеркнуть переменность верхнего предела интегрирования, обозначим его x. Величина определённого интеграла, как уже было отмечено, не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому, чтобы не путать её с верхним пределом, заменим переменную x внутри интеграла на t.

Таким образом, получим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.Она называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом). Пусть интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in [a, b]$. Тогда $\Phi'(x) = f(x)$, где

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Доказательство. По определению производной

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}.$$

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Здесь мы воспользовались свойством 1 аддитивности определенного интеграла. Отсюда по теореме о среднем значении

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

где c – между x и $x + \Delta x$. Следовательно,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(x),$$

так как $c \to x$, когда $\Delta x \to 0$. Что и требовалось доказать.

Теорема. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема (Теорема Ньютона – Лейбница).

Если функция $F(x)$ – какая - либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ – пер-вообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое - то постоянное число C, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

При соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x, т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C.$$

По свойству 3:

$$0 = F(a) + C.$$

Откуда

$$C = -F(a).$$

Тогда

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

А при $x = b$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Что и требовалось доказать.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Замечание. Следует обратить внимание на важность сформулированного в теореме требования непрерывности функции $y = f(x)$ на всем отрезке интегрирования. Небрежное применение формулы Ньютона-Лейбница может привести к заведомо неверному результату.