§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Теоретический материал

Решение различных задач методом систематического моделирования сводится к отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. Такое уравнение называется дифференциальным.

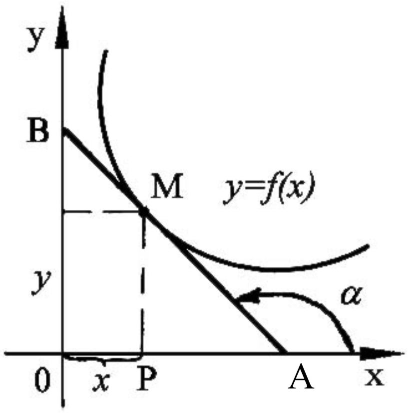

Рис.2.1

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в тождество. Приведем пример, приводящий к дифференциальному уравнению.

Рассмотрим задачу нахождения функции, график которой обладает тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Пусть $y = f(x)$ – искомая функция, а $M(x, y)$– произвольная точка кривой, определяемой этим уравнением; предположим для определенности, что кривая расположена в первой четверти (рис. 2.1). По условию задачи имеем $BM = MA$, а следовательно, $OP = PA = x$. Из рис. 2.1 видно, что $\mathrm{tg}\,(\angle PAM) = \frac{MP}{PA}$, т.е. $\mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$, или

$-\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$.

Учитывая, что $\mathrm{tg}\,\alpha$ есть угловой коэффициент касательной, который в точке $M(x, y)$ равен y', получаем дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}. \qquad (2.1)$$

Решением уравнения (2.1) является всякая функция вида

$$y = \frac{C}{x}, \qquad (2.2)$$

где C– постоянная. В самом деле, заменив в уравнении (2.1) y его значением из равенства (2.2), получим

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{\frac{C}{x}}{x}, \text{ т.е. } -\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.$$

Следовательно, равенство (2.2) определяет множество функций, обладающих указанным в задаче свойством. Графики этих функций представляют собой семейство гипербол (рис. 2.2).

В дальнейшем рассмотрим еще ряд примеров, которые показывают, каким мощным математическим аппаратом являются дифференциальные уравнения при решении различных и весьма непростых практических задач.

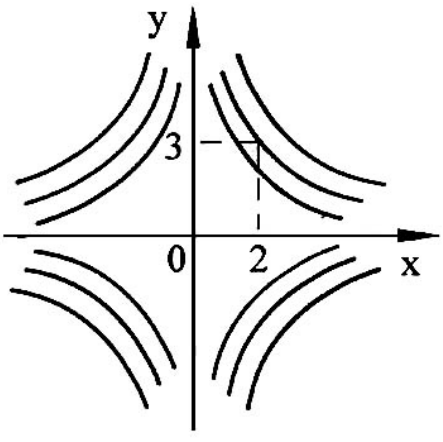

Рис.2.2

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные $y', y'', \cdots, y^{(n)}$. Символически дифференциальное уравнение записывается так :

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

Разрешая последнее уравнение относительно производной y', если это возможно, получим

$$y' = f(x, y). \tag{2.3}$$

Рассмотренный выше пример показывает, что дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

При различных значениях постоянной C равенство $y = C/x$ определяет различные решения уравнения $y' = -y/x$.

Например, непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции $y = 1/x \quad (C = 1)$, $y = 3/x \quad (C = 3)$ являются решениями уравнения (2.1).

Таким образом, каждому дифференциальному уравнению соответствует, как правило, бесконечная совокупность его решений.

Определение. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его *частным решением*. С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых *интегральными кривыми*, а каждое частное решение представляет отдельную интегральную кривую.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$ представляет *общее решение* дифференциального уравнения первого порядка, если при любом значении C эта функция является решением уравнения и любое его частное решение может быть получено из $y = \varphi(x, C)$ при некотором значении постоянной C.

Иногда не удается получить решение дифференциального уравнения в явной форме $y=\varphi(x)$ или $y=\varphi(x,C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида

$$\Phi(x,y)=0, \text{ или } \Phi(x,y,C)=0.$$

Определение. Выражение $\Phi(x,y)=0$, или $\Phi(x,y,C)=0,$ в этом случае называют *интегралом (частным, общим)* дифференциального уравнения.

При решении конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений дифференциального уравнения то частное решение, которое является ответом на поставленный вопрос. Для того, чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, задают так называемое *начальное условие*.

В случае дифференциальных уравнений первого порядка под *начальными условиями* для его решения $y=y(x)$ понимают условия, состоящие в том, что $y=y_0$ при $x=x_0$, т.е.

$$y(x_0)=y_0,$$

где x_0 и y_0– заданные числа (начальные данные) такие, что при $x=x_0$ и $y=y_0$ функция имеет смысл, т.е. существует $f(x_0,y_0)$.

Определение. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y=y(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее при заданных начальных данных (x_0,y_0) начальному условию $y(x_0)=y_0$, или, в другой записи, $y_{x=x_0}=y_0$, где x_0,y_0– заданные числа.

Пусть даны начальные данные $x_0=2, y_0=3$ и требуется найти частное решение $y=y(x)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию $y(2)=3$. Выше показано, что функция (2.2) при любом C является решением уравнения (2.1).

Подставим в формулу (2.2) начальные данные $x=2$, $y=3$, найдем $3=C/2$, т.е. $C=6$. Таким образом, искомым частным решением уравнения (2.1) является функция $y=6/x$.

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку (x_0,y_0).

Так, общее решение $y=C/x$ уравнения $y'=-y/x$ определяет семейство равносторонних гипербол (см. рис.2.2). Частное решение $y=6/x$ определяет гиперболу, проходящую через точку (2;3).

Рассмотрим различные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1. *Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными*

Определение. Дифференциальное уравнение называется *уравнением первого порядка с разделяющимися* переменными, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \tag{2.4}$$

Для уравнения (2.4) теорема Коши о существовании и единственности решения может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. Если функция $f_1(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, функция $f_2(y)$ и ее производная по y непрерывна в интервале $(c;d)$, то для любых начальных данных $x_0 \in (a;b)$, $y_0 \in (c;d)$ существует, причем единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.4), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Другими словами, при указанных условиях через любую точку прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$ проходит, и при том единственная, интегральная кривая уравнения.

Если $f_2(y) \neq 0$, то уравнение с разделяющимися переменными (2.10) можно переписать в виде *(разделить переменные)*

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{2.5}$$

Определение. Уравнение вида (2.5) называется уравнением с разделёнными переменными.

Теорема. Если существуют интегралы $\int \frac{dy}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)dx$, то общий интеграл уравнения с разделенными переменными задается уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C,$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ – некоторые первообразные соответственно функций - $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные;
2) интегрируя почленно полученное уравнение с разделёнными переменными (2.5), найти его общий интеграл;
3) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (если это требуется).

Пример 1. Найти частное решение уравнения $2yy' = 1 - 3x^2$, если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$, отсюда $2y\,dy = \left(1-3x^2\right)dx$.

Интегрируя обе части последнего неравенства, найдем $\int 2y\,dy = \int\left(1-3x^2\right)dx$, или $2\int y\,dy = \int dx - 3\int x^2\,dx$,

или $2\cdot\dfrac{y^2}{2} = x - \dfrac{3x^2}{3} + C$, т.е. $y^2 = x - x^2 + C$.

Подставив начальное значение $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, найдем C: $9 = 1-1+C$, т.е. C = 9.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$, или $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$.

§2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретический материал

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.12}$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами формулируется следующим образом.

Теорема Коши. При любых начальных данных $\left(x_0; y_0; y_0'\right)$ задача Коши имеет, причем единственное, решение, т.е. при любых начальных данных x_0, y_0, y_0' существует единственное решение уравнения (2.12), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = x_0, y'(x_0) = y_0'$.

Определение. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2.12) образуют *фундаментальную систему решений*, если для любого x

$$W(x) = y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_1'(x)\cdot y_2(x) \neq 0.$$

Определение. Выражение $W(x)$ называется определителем Вронского, или вронскианом, решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Известно, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$, и $y_3 = 5e^{2x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Доказать, что решение y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, а y_1 и y_3 не образуют.

Действительно $y_1' = 2e^{2x}$, $y_2' = e^x$, $y_3' = 5\cdot 2e^{2x}$.

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_2:
$W_1(x)=y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_1'(x)\cdot y_2(x)=e^{2x}\cdot e^{x}-2e^{2x}\cdot e^{x}=-e^{3x}\neq 0.$

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_3:
$W_2(x)=y_1(x)\cdot y_3'(x)-y_1'(x)\cdot y_3(x)=e^{2x}\cdot 10e^{2x}-2e^{2x}\cdot 5e^{2x}=$
$=10e^{4x}-10e^{4x}=0.$

Вронскиан $W_1(x)\neq 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *образуют фундаментальную пару решений.*

Вронскиан $W_2(x)=0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_3(x)$ не образуют *фундаментальную пару решений.*

Теорема (о структуре общего решения). *Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

где C_1 и C_2 –произвольные постоянные.

Выражение $C_1y_1+C_2y_2$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Найдем решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (2.12) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать эти частные решения уравнения (2.12) в виде $y=e^{kx}$, где k=const; тогда $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2\cdot e^{kx}$.

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (2.12), получим $k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$, т.е. $e^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0$.

Так как $e^{kx}\neq 0$, то

$$k^2+pk+q=0. \qquad (2.13)$$

Определение. Уравнение (2.13) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для составления характеристического уравнения (2.13) достаточно в уравнении (2.12) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1.

Решив характеристическое уравнение по формуле $k_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$, найдем его корни k_1 и k_2, а следовательно, и частные решения уравнения (2.12):

$$y_1=e^{k_1x},\ y_2=e^{k_2x}.$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны* .

В этом случае имеем два частных решения уравнения (2.12):

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{k_1 x}k_2 e^{k_2 x} -$$
$$- k_1 e^{k_1 x}e^{k_2 x} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0,$$

т.е. $e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$ и $k_2 \neq k_1$.

Следовательно, в этом случае решение общего уравнения (2.12) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (2.14)$$

Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*: $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае непосредственно находим лишь одно частное решение: $y_1 = e^{kx}$.

Вторым частным решением является решение $y_2 = xe^{kx}$. Действительно,

$$y_2' = \left(xe^{kx}\right)' = x'e^{kx} + x\left(e^{kx}\right)' = e^{kx} + xke^{kx} = e^{kx}(1+kx),$$
$$y_2'' = \left(e^{kx}\right)'(1+kx) + e^{kx}(1+kx)' = ke^{kx}(1+kx) + e^{kx}k = e^{kx}\left(2k + k^2 x\right).$$

Подставив выражение для y, y' и y'' в уравнение (2.12), получим

$$e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) + pe^{kx}(1+kx) + qxe^{kx} = e^{kx}\left(x\left(k^2 + pk + q\right) + 2k + p\right) = 0.$$

Так как k является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, корни квадратного трехчлена находятся по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\dfrac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Покажем, что $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{kx}e^{kx}(1+kx) =$$
$$= e^{2kx}[1 + kx - kx] = e^{2kx} \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \quad (2.15)$$

Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные числа*:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \; p^2 - 4q < 0.$$

Тогда $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{i^2\left(4q - p^2\right)}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Обозначив $a = \frac{-p}{2}$ и $b = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, получим $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi \quad (b \neq 0)$

.

В этом случае $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$ являются решениями уравнения (2.12) и, вычисляя вронскиан, убедимся, что они составляют фундаментальную систему.

Таким образом, общее решение уравнения (2.12) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx$, или

$$y = e^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right). \qquad (2.16)$$

Примеры решить самостоятельно

1. $\left(xy^2 + y^2\right)dx = \left(x^2 - x^2 y\right)dy;$
2. $x^2 y' + y = 0;$
3. $x + xy + yy'\left(1 + x\right) = 0;$
4. $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y = 0;$
5. $x\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + x^2}\, y' = 0;$
7. $\left(1 + y^2\right)dx = xydy, y\left(2\right) = 1;$
8. $y' = 2\sqrt{y}\ln x, y\left(e\right) = 1$

1.	$y'' + y' - 2y = 0;$	2.	$y'' - 2y' = 0;$
3.	$y'' - 4y' + 5y = 0;$	4.	$y'' + 4y = 0;$
5.	$y'' - 2y' + y = 0$ при $y(0) = 4,\ y'(0) = -3;$	6.	$y'' + 2y' + 2y = 0$ при $y(0) = 0,\quad y'(0) = -1;$
7.	$y'' - 8y' + 15y = 0$ при $y(0) = 2,\ y'(0) = 8;$	8.	$y'' - 2y' + 5y = 0$ при $y(0) = 1,\quad y'(0) = 3;$

Нечётные в на занятиях, чётные дома