Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет
(СибАДИ)»

Е.Ю. Руппель

МАТЕМАТИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ

Учебно-методическое пособие

Омск•2022

УДК 512
ББК 22.14
Р86

Согласно 436-ФЗ от 29.12.2010 «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию» данная продукция маркировке не подлежит

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. О.Л. Курнявко
(ОИВТ (филиал) ФГБОУ ВО СГУВТ, г. Омск)

Работа утверждена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве учебно-методического пособия.

Руппель, Елена Юрьевна.
Р86 **Математика для архитекторов :** учебно-методическое пособие / Е.Ю. Руппель. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2022. – Режим доступа: http://bek.sibadi.org/MegaPro, для авторизованных пользователей. – Загл. с экрана.

Содержит теоретический и справочный материал по разделам «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия в пространстве», «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной», необходимый для обучающихся направления 07.03.01 «Архитектура» по дисциплине «Математика». Рассмотрены примеры решения задач, также представлены вопросы для самопроверки, контрольные работы и индивидуальные задания.

Имеет интерактивное оглавление.

Предназначено для обучающихся направления 07.03.01 «Архитектура», а также всех форм обучения экономических, технических, строительных направлений бакалавриата и специалитета.

Работа выполнена на кафедре «Физика и математика».

Текстовое (символьное) издание (2,2 МБ).
Системные требования: Intel, 3,4 GHz; 150 Мб; Windows XP/Vista/7;
DVD-ROM; 1 Гб свободного места на жестком диске;
программа для чтения pdf-файлов: Adobe Acrobat Reader; Foxit Reader

Редактор И.Г. Кузнецова
Техническая подготовка – А.А. Орловская

Издание первое. Дата подписания к использованию 12.12.2022

Издательско-полиграфический комплекс СибАДИ
644080, г. Омск, пр. Мира, 5
РИО ИПК СибАДИ
644080, г. Омск, ул. 2-я Поселковая,1

Кто с детских лет занимался математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает в себе настойчивость и упорство в достижении цели.

А.И. Маркушевич

Введение

Цель изучения общего курса математики вузов состоит в том, чтобы углубить знания по изученным разделам и ознакомиться с некоторыми новыми разделами математики, которые обогащают общую культуру, развивают логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный инженер в своей деятельности.

В каждом разделе изложены необходимые теоретические сведения, основные определения и формулы, достаточные для решения задач. Пособие составлено таким образом, что наряду с теоретической частью содержит подробный разбор типовых задач, решение которых позволит читателю глубже понять и закрепить изученный материал.

Предлагаются также задачи для самостоятельной работы, к которым приведены ответы в конце каждого раздела. Предложенные задачи для самостоятельной работы могут использоваться преподавателем для работы на практических занятиях, а также при подготовке к контрольной работе и итоговой форме контроля.

В конце каждого раздела содержатся контрольная работа и задания для самостоятельного решения, которые являются заданиями по целому разделу курса. Задания выдаются по вариантам и являются индивидуальными для обучающегося в каждой академической группе.

1. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. Начальный этап развития математических знаний

Способности к абстрагированию стали развиваться у людей с незапамятных времен. Вряд ли можно представить жизнь даже очень отдаленных предков, не предполагая у них необходимости, скажем, в пространственной и количественной ориентировке. Например, чтобы вырыть яму для ловли зверя или пронести тушу убитого зверя через вход в пещеру, надо как-то учитывать пространственные формы и величину предметов и отвлекаться от других их свойств.

Наблюдения за предметами окружающей действительности и обращение с ними в процессе трудовой деятельности учили человека замечать свойства предметов, играющие существенную роль при решении практических задач, которые, естественно, возникали уже при изготовлении орудий охоты и земледелия, при постройке жилищ и т. д. Сосредоточивая главное внимание на этих свойствах, люди постепенно научились мысленно отделять их от других свойств и даже от самих предметов, с которыми они неразрывно связаны в действительности, стали рассуждать об отвлеченных свойствах как о самостоятельных (абстрактных) предметах и наделять их названиями так же, как это делали с чувственно воспринимаемыми вещами. Так, общественная практика и развитие языка постепенно приводили к формированию различных понятий, в том числе и таких абстрактных, в которых находят отражение только пространственные формы и количественные отношения.

Наблюдения за границами, отделяющими предметы друг от друга, естественно, приводят к выделению простейших геометрических элементов, из которых они состоят, т. е. к понятиям о поверхности, линии и точке. Так, например, если в какой-нибудь сосуд налита вода, то она принимает определенную форму. Уже на этом простом примере видно, что одну и ту же поверхность тела можно рассматривать и как нечто целое, и как состоящее из некоторых частей. Части эти выделяются уже тем, что одна из них является общей границей воды и стенок сосуда, а другая – общей границей воды и воздуха; их общей границей служит линия. Такого рода наблюдения на протяжении длительного исторического периода приводят к тому, что поверхность надо понимать как общую границу двух тел или частей тела, линию – как общую границу двух частей поверхности, точку – как общую границу двух частей линии. При этом важнейшим свойством поверхности служит то, что она мыслится без толщины. Если понимать поверхность как нечто, имеющее толщину, то она теряет свою специфику служить общей границей двух тел. Аналогично линию надо мыслить без ширины, так как в противном случае она не может служить общей границей двух частей поверхности. Точка как общая граница двух частей линии не имеет никаких измерений.

Человеку трудно было мысленно выделить простейшие геометрические абстракции, но когда он почувствовал и узнал, скажем, что прямая обладает наиболее простыми свойствами из всех других линий, тогда он сам стал проводить прямые. Заметив, что геометрическими свойствами луча Солнца, проникающего в маленькое отверстие темного помещения, обладает и туго натянутая на двух опорах нить, и даже веревка, люди немедленно воспользовались этим при изготовлении различных брусьев, стержней, линеек, при постройке жилищ, планировании земельных участков и т. д.

Целесообразность практического использования плоских и прямолинейных форм диктуется и физическими свойствами тел. По равнине легко и удобно перемещаться. Прямолинейное движение при этом сопряжено с наименьшими затратами времени и сил. На горизонтальной плоскости тела приобретают устойчивое положение, предметы с плоскими и прямолинейными формами легко совмещаются и примыкают друг к другу без зазоров и т. д.

На уяснении характера геометрических абстракций особенно сказалась практика планирования и измерения на земной поверхности. Участок земли часто приходилось считать куском плоскости, а его границу – геометрической линией. На нем приходилось мысленно проводить различные линии, считая предметы, расположенные на границе, тачками, и таким путем разбивать этот кусок плоскости на геометрические фигуры желательного вида.

Из постоянного сравнения предметов со стороны их формы и размеров выделялось то общее, что связывает предметы независимо от их вещественного содержания, формировалось общее понятие о пространственной форме и геометрической фигуре. Всякий частный вид геометрической фигуры – прямоугольник, треугольник, круг, шар и т. д. – использовался в практических целях, где он проявлял новые свойства. Так практически складывались представления, составляющие основу формирования понятий геометрии, вместе с этим на основе опыта и запросов практики возникали и развивались простейшие понятия арифметики.

На основании некоторых косвенных данных, какими служат, например, наблюдения за культурой отсталых племен и народностей, можно считать, что вначале люди располагали, по-видимому, весьма ограниченным запасом первых натуральных чисел. При этом число воспринималось сначала как неотъемлемое свойство той или иной совокупности предметов, а потом постепенно выделялось на основе сравнения разнообразных множеств с некоторым стандартным множеством, которым чаще всего служило множество пальцев рук и ног. Знаменитый русский путешественник ученый Н. Н. Миклухо-Маклай так описывает в своих сочинениях характер счета у туземцев Новой Гвинеи: «...Папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например, „бе, бе, бе". Досчитав до пяти, он говорит „ибон-бе" (рука). Затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяет „бе, бе, бе", пока не доходит до „ибон-ал" (две руки). Затем он идет дальше, приговаривая „бе, бе, бе", пока не доходит до „самба-бе" и „самба-али" (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого». Мы видим, что здесь, например, число пять понимается как столько, сколько пальцев на руке.

В связи с развитием практической деятельности развивалась и система чисел с ее связями и законами. Большое значение в этом отношении имело введение обозначений для чисел, относящееся, вероятно, ко времени зарождения письменности. Это можно рассматривать как первый шаг по пути развития специфического для математики языка знаков и формул.

Наиболее древнее руководство по математике, дошедшее до нас в виде рукописи египетского писца Ахмеса, было составлено более чем за 1700 лет до нашей эры. Оно представляет сборник задач, которые должны были уметь решать царские чиновники. Среди этих задач встречаются уже отвлеченные задачи в виде упражнений в искусстве вычислений с дробями, но основное содержание все же составляют практические задачи на вычисление площадей земельных участков, на перевод одних мер зерна в другие, на определение земельных работ и заработной платы, вместимости сосудов и амбаров и т. д.

В те отдаленные времена, конечно, еще не было геометрии и арифметики как отдельных областей знания. Наука делала только первые шаги в направлении систематизации и обобщения накопленного опыта.

Однако и тогда в ряде стран и, в особенности в Египте и Вавилоне, на разнообразном конкретном материале появляются заметные ростки отвлеченных математических рассуждений.

Процесс формирования научных понятий сопровождается постепенным уяснением законов и навыков обращения с ними как с основными формами мышлении, входящими в состав суждений и умозаключений. Результаты этого стали сказываться в Древней Греции примерно с VII в. до н. э. Математические знания, перешедшие из Египета и Вавилона, стали здесь заметно приобретать качественно новую форму. В связи с их систематизацией выделяются наиболее общие понятия и предложения, на основе которых определяются другие понятия математики. Некоторые исходные положения об их свойствах, справедливость которых неизменно подтверждалась в практике на протяжении многих веков, фактически становятся аксиомами. Другие же свойства стали устанавливать с помощью рассуждений без обращения к опыту, т. е. оформлять их в виде теорем с доказательствами, схожими с теми, какие изучаются теперь в школьном курсе.

Пифагор и его ближайшие ученики (VI–V вв. до н. э.) уже владели логическим доказательством многих теорем геометрии. Они основательно развили и учение о числах. Придавая особенно большое значение выяснению закономерностей в числах четных и нечетных, простых и составных в так называемых фигурных, совершенных, а также в пропорциях.

Как полагают историки, математика в V–IV вв. до н. э. приобретает примерно такой вид, в каком дошла она до нас в «Началах» Эвклида (III в. до н. э.), т. е. становится теоретической наукой с характерным для нее дедуктивным методом, выражающим движение мысли от общего к частному. При этом считают, что развитие и выявление существа этого характерного для математики метода было делом пифагорейской школы.

1.2. Период элементарной математики

Чистая математика, сложившаяся в Древней Греции, о которой мы судим, главным образом, по «Началам» Эвклида, в своем дальнейшем развитии оказывается тесно связанной с развитием общества и запросами его экономической жизни.

Обычно полагают, что до XVII в. она была элементарной математикой, которая характеризуется в основном как математика постоянных величин и простейших геометрических фигур. Производственная жизнь в эту эпоху предъявляла к математике требования в отношении решения элементарных задач, сводящихся к простому счету предметов, к измерению времени, площадей земельных участков, количества продуктов, к вычислениям, связанным со строительством, и т. п. И математика удовлетворила эти требования. Геометрия позволила решать задачи с прямолинейными фигурами и с простейшими криволинейными фигурами, встречающимися в практике (преимущественно круг и его части). Арифметика в Древней Греции не достигла такого совершенства, как геометрия, но древние греки уже знали о бесконечности натурального ряда чисел и считали, что свойства чисел можно устанавливать логически так же, как доказываются и теоремы геометрии. В дальнейшем была хорошо развита арифметика рациональных чисел, хотя строго логическое обоснование арифметики в целом относится к следующему периоду.

Появившиеся еще в древности зачатки алгебры при дальнейшем развитии привели к тому, что в IX в. алгебра оформилась в самостоятельную дисциплину, изучающую уравнения. Для нужд астрономии Птолемеем (II в. н. э.) была составлена таблица хорд, заменяющая в то время таблицы тригонометрических величин, что положило начало развитию тригонометрии.

В годы наибольшего расцвета древнегреческой культуры (III в. до н. э.) Аполлоний в исследованиях конических сечений и Архимед в вычислениях площадей и объемов вплотную подошли к идеям высшей математики. Но производственная деятельность того времени не предъявляла настоятельных требований в отношении развития таких исследований. Математические исследования в этот период ограничились сферой таких понятий, как понятие числа, величины геометрической фигуры.

Элементарная математика может дать математическую характеристику только состояния, а не процесса, и вопрос о движении в ней не ставится. Для задач, решаемых средствами элементарной математики, характерно, что в них имеют дело с определенным числом неизменных фигур и величин, производят отдельные действия с отдельными числами, и таких актов всегда бывает вполне определенное число. Задачи решаются не на основе общего метода, а чаще всего путем особого подхода для каждой задачи.

1.3. Период высшей математики

В эпоху Средневековья идейный уровень математики, достигнутый в Древней Греции, существенно не изменился. Известный застой в науке в то время был обусловлен весьма ограниченными запросами феодального общества и реакционным влиянием церкви, власть которой была направлена на подавление всего нового.

Заметное движение в науке появилось в эпоху Возрождения в связи с появлением нового общественного класса буржуазии и ослаблением феодальной идеологии. Рост городов приводил к развитию торговли, которая с развитием мореплавания распространялась и на отдаленные районы. Открытие в конце XV в. Америки и морского пути в Индию способствовало расширению умственного горизонта людей, изучению природных богатств различных районов земли. От кустарного производства стали переходить к более совершенным видам общественного производства. Стали развиваться промышленность и транспорт, морское и военное дело, а это требовало от естественных наук и математики решения серьезных научно-теоретических проблем. Такими проблемами были, например, задачи определения местоположения корабли в море и составления географических карт. Начальная стадия развития капитализма серьезно расширила круг задач, которые должна решать математика. Перед астрономией, механикой и физикой, а вместе с тем и перед математикой была поставлена задача изучения различных форм движения, прежде всего механического движения. Возникла необходимость развития новой механики – механики движущихся тел.

Наиболее важные научные открытия, обусловливающие переход математики на качественно новый этап развития, были сделаны Галилеем (1564 – 1642) и Кеплером (1571 – 1630). Галилей установил закон свободного падения тел. Он же установил, что струя воды, вытекающая из бокового отверстия сосуда под давлением воды, имеет форму параболы. Галилей занимался также вопросами военного дела, где важно было изучить траекторию снаряда, связанную с наклоном орудия, чтобы рассчитать попадание его в цель. Немецкий математик Кеплер открыл закон движения планет вокруг Солнца. Было установлено, что планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце, что отрезок прямой, соединяющий планету с Солнцем, в равные промежутки времени описывает равновеликие фигуры, что планеты движутся по эллипсам с переменными скоростями, зависящими от размеров орбиты. Во всех таких задачах приходилось иметь дело с кривыми, которые описываются движущимся телом и связанными с ним отрезками, длина которых изменяется в процессе движения. Средства элементарной математики для таких задач были явно недостаточны.

Существенный вклад в математику внес французский математик Виет (1540 – 1603), перешедший в алгебре к систематическому употреблению букв для обозначения чисел. Эго послужило серьезной предпосылкой для развития абстрактного мышления. Шотландский математик Непер (1550 – 161?) открыл таблицы логарифмов, которые существенно расширили и упростили вычислительные возможности математики. В 1637 г. французский математик и философ Декарт (1596 – 1650) опубликовал «Геометрию», представляющую в основных чертах изложение той математической дисциплины, которая позднее стала называться аналитической геометрией. Он впервые пришел к понятию переменной величины и функциональной зависимости, решая геометрические задачи с помощью аппарата арифметики и алгебры. Это, можно сказать, и определило переход к высшей математике. Ф. Энгельс по этому поводу писал: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисления...».

Сам термин «функция» впервые встречается в трудах немецкого математика Лейбница (1646 – 1716), который вначале, как и Декарт, усматривал функциональную зависимость в задачах по геометрии. Английский математик и физик Ньютон (1643 – 1727) широко использовал понятие функциональной зависимости в механике. Геометрической задачей, приводящей к основным понятиям дифференциального исчисления служит задача проведения касательной к кривой в данной точке; механической задачей является задача определения скорости движения в данный момент времени. В отношении интегрального исчисления аналогичную роль играют задача определения площади плоской фигуры по заданному контуру и определение закона движения по заданной скорости. В связи с весьма простым механическим и геометрическим толкованием основных понятий дифференциального и интегрального исчислений высшая математика сразу же получила широкое применение в механике, геометрии, физике, технике и т. д., что в свою очередь послужило важным стимулом ее бурного развития на протяжении XVII и XVIII столетий.

История знает много выдающихся математиков того времени, среди которых особенно выделяется петербургский академик Леонард Эйлер (1707 – 1783). Ему принадлежат 756 работ, охватывающих все разделы математики того времени. Работы эти, в частности его учебники, имели огромное значение для дальнейшего развития математических знаний. Заметим, что Эйлеру принадлежит введение привычного теперь общего обозначения функции в форме $f(x)$.

Жизненность новых теорий эффективно подтверждалась практикой, но в их логическом обосновании было много неясного. Требовали уточнения почти все понятия высшей математики и прежде всего понятие бесконечно малой величины и бесконечного ряда. В новых непривычных методах было много непонятного.

Очень большое значение для уяснения методов высшей математики имели работы французского математика Коши (1789 – 1857). Разработанная им теория пределов была положена в основу высшей математики и дала возможность изложить дифференциальное и интегральное исчисления («Курс анализа») логически более четко и стройно. Этому ученому принадлежит также заслуга в расширении сферы применения новых методов на функции комплексной переменной.

Переход к высшей математике не означает отказ от элементарной математики, он означает только существенное расширение задач и коренное изменение в методах их решения. В элементарной математике противопоставляется прерывное и непрерывное, конечное н бесконечное, кривое и прямое, точное и неточное и т. д., дальше этого противопоставления не идут; в высшей математике на этом противопоставлении не останавливаются, а идут дальше. В бесконечных процессах, связанных с переходом к пределу, эти противоположности переходят друг в друга. Так, например, при определении и вычислении длины дуги кривой мы заменяем дугу кривой вписанной в нее ломаной, заведомо допуская погрешность. Затем, изучая процесс неограниченного увеличения числа звеньев ломаной при неограниченном уменьшении длины наибольшего из них, замечаем, что допущенная погрешность является в этом процессе закономерно исчезающей. Применение анализа и синтеза в их единстве позволяет затем перейти от неточного к точному. При всем этом средства элементарной математики не только не отбрасываются, а используются с большей силой. Вычисления средствами элементарной математики выступают здесь как отдельные звенья цепи с общим законом ее образования. Операция перехода к пределу, играющая в высшей математике определяющую роль, выступает здесь в форме предела суммы, число слагаемых которой неограниченно возрастает, а каждое в отдельности стремится к нулю. Все это характеризует гибкость понятий высшей математики.

Ф. Энгельс, указывая на различие в подходах элементарной и высшей математики, писал следующее: «Элементарная математика, математика постоянных величин, движется по крайней мере в общем и целом внутри формальной логики, математика переменных величин, самый значительный отдел которой составляет исчисление бесконечно малых, есть по своей сущности не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям».

1.4. Современная математика

В XIX в. наблюдается дальнейшее развитие высшей математики и ее новых теорий в связи со все большим охватом ими задач механики, физики, всего точного естествознания и техники. При этом все большее значение приобретают вопросы упорядочения фактического материала и связанные с этим вопросы логического обоснования математики вообще. В процессе решения этих вопросов создаются такие теории, необходимость которых вызывается не непосредственными запросами практики, а потребностями внутреннего развития самой математики. Все это приводит к коренным изменениям взглядов на основы математики и знаменует переход ее на качественно новую ступень развития, называемую современной математикой.

Очень важной предпосылкой для изменения взглядов на основы математики были работы, связанные с критическим анализом основ эвклидовой геометрии, завершившиеся открытием Н. И. Лобачевским в 1826 г. его новой (неэвклидовой) геометрии. Он пришел к выводу, что аксиома параллельности Эвклида представляет не вполне логически оправданное допущение и заменил ее другой аксиомой, согласно которой в плоскости через точку, взятую вне данной прямой, проходит не одна прямая, параллельная данной, а две (и следовательно, бесконечное множество не пересекающих ее прямых). Исходя из этого он развил свою «воображаемую геометрию», так же логически непротиворечивую, как и геометрия Эвклида.

Это открытие было настолько революционным, что английский математик Сильвестр назвал Лобачевского Коперником геометрии. Действительно, до Лобачевского геометрия Эвклида рассматривалась как единственно возможное и неизменное в своих основах учение о пространстве. На это нередко опирались представители идеалистического мировоззрения, например, немецкий философ Кант (1724–1804) полагал, что в основе геометрии лежат пространственные формы чувственности и рассудка, данные человеку от рождения. Открытие Лобачевским, а затем Риманом (1726–1804) пространственных закономерностей, отличных от привычных эвклидовых, опровергало такой взгляд на природу знания. Оно привело к значительным обобщениям в геометрии, к развитию взглядов на пространство и нашло применение в теории относительности Эйнштейна.

Тенденции к созданию широко обобщающих теорий наиболее отчетливо проявляются во второй половине XIX в. и становятся характерной особенностью математики на современном этапе развития.

С середины XIX в. отчетливо осознается тот факт, что арифметические операции с их основными законами обладают общим характером и специфически применимы не только к числам, но также и к объектам другой природы (к многочленам, подстановкам и т. д.), что в корне изменило взгляды на предмет изучения алгебры. Английский математик Дж. Буль (1815 – 1864) создал алгебру, в которой буквы обозначали высказывания и которая в XX в. послужила основой для развития так называемой математической логики. Уже тогда, в 1854 г. он уверенно высказал мысль о том, что «в природе математики не заложена необходимость заниматься идеями числа и величины».

Расширению взглядов на предмет математики особенно способствовала разработанная в своих основах немецким математиком Г. Кантором (1845 – 1918) общая теория множеств, в которой рассматривались операции над множествами любой природы. Кантор стал оперировать бесконечными множествами как данными законом их образования, подобно тому, как оперируют конечными множествами. Он установил количественные характеристики, позволяющие сравнивать бесконечные множества в соответствии с их структурой, например, существенно различать множество всех рациональных чисел и множество всех действительных чисел.

К концу XIX в. сложился определенный взгляд на требования к логической строгости любой математической теории. Большое значение в этом отношения имели работы итальянского математика Пеано (1858 – 1932) и немецкого математика Гильберта (1862 – 1943) в части наиболее строгого изложения основ арифметики и геометрии. В работе Гильберта «Основания геометрии» были устранены недостатки в логическом построении геометрии Эвклида. При этом стало ясно, что установленные в ней закономерности имеют общий характер.

Они относятся не только к «точкам», «прямым» и т. д., связанным с наглядным представлением, во и к любым другим возможным объектам, лишь бы они удовлетворяли данной системе аксиом.

Таким образом, был разработан аксиоматический метод построения любой математической теории, который в общих чертах можно охарактеризовать следующим образом. Любая математическая теория имеет дело с одним или несколькими множествами объектов, связанных между собой некоторыми отношениями. Основные свойства этих объектов и отношений указываются системой аксиом, не затрагивающих конкретной природы объектов и отношений. На этой базе и производится строго логическое развитие теории, при котором все новые объекты и отношения формально определяются через введенные, а их свойства доказываются, опираясь только на аксиомы или на предложения, установление на их основе.

Однако для важного обоснования теории приходится решать ещё ряд важных вопросов, относящихся к самой системе аксиом, например о их непротиворечивости в том смысле, что при указанном развитии теории никогда не будут получены противоречащие друг другу предложения. При этом возникают также вопросы о надежности логических средств, применяемых в математике. В связи с решением такого рода вопросов получила развитие математическая логика.

Математическая теория, построенная аксиоматически, является чрезвычайно абстрактной, поскольку она распространяется на любые объекты (не только известные, но и логически возможные), которые удовлетворяют принятой системе аксиом. Поэтому современная математика представляется совокупностью абстрактных форм или, как говорят, математических структур.

Заметим, что, как и прежде, представители идеалистического мировоззрения используют абстрактный характер математики для выводов о ее полной независимости от задач изучения материального мира. Они, например, утверждают, что «положения чистой математики не говорят ничего о действительности», в то время как на самом деле современная математика в своих понятиях и теориях отражает большую широту связей с действительностью, чем это представлялось прежде. Теперь в рамках одной теории охватывается изучением не один круг явлений, а много различных кругов, имеющих одинаковую формальную структуру. Количественная форма, которую имеет та или иная математическая теория, кажется бессодержательной и пустой потому, что она может быть наполнена различным содержанием.

Новые понятия и теории не создаются на пустом месте, как это нередко утверждают идеалисты, а возникают на основе накопленного знания и практического опыта. Поэтому определение предмета математики и на современном этапе развития остается, в сущности, таким же, каким его сформулировал Энгельс, только оно наполняется значительно более богатым содержанием.

Количественные отношения, в отличие от качественных, характеризуются лишь своим безразличием к конкретной природе тех объектов, которые они связывают. Поэтому они и могут быть совершенно отделены от их содержания, как от чего-то безразличного для дела (как указывает об этом Энгельс). С этой точки зрения количественные отношения в современной математике выступают еще более характерно как предмет ее изучении. Что касается пространственных форм, то можно заметить, что уже с появлением аналитической геометрии преодолено абсолютное противопоставление геометрии, изучающей пространственные формы, остальной математике Появилась возможность переводить геометрические задачи на язык алгебры и анализа, чтобы решать их чисто алгебраическими и аналитическими методами.

В связи с этим можно считать, что включение в определение предмета математика пространственных форм является указанием на относительную самостоятельность геометрических разделов математики. Можно говорить и о количественной форме как о системе отношений частей целого. Изучению в математике подлежат любые формы действительности, объективно не зависящие от содержания в такой степени, что могут быть полностью отвлечены от него, т. е. «чистые» формы.

Однако отделение формы от содержания носит характер не простого «фотографирования» действительности, а связано с ее упрощением и схематизацией. Поэтому процесс познания явлений конкретной действительности происходит в борьбе двух тенденций: выделения формы изучаемых явлений и ее логического анализа и вскрытия моментов, не укладывающихся в эти формы с дальнейшим переходом к рассмотрению новых форм, более гибких и полнее охватывающих явление. Это легко проследить, например, в процессе развитая понятия числа, функции.

При таких переходах от одних форм к другим решающую роль играет практика как источник и цель всякого знания и как единственный критерий истины.

Истина усматривается в правильном отражении действительности в системе понятий, а логическая непротиворечивость теории представляет лишь ступень в ее познании. Логическая истинность является необходимым условием для установления новой более гибкой формы как самостоятельного предмета изучения, при этом используется весь абстрактный аппарат математики. Соответствие новой формы действительности устанавливается нередко сложным путем через другие науки, так или иначе связанные с практикой. Именно таким путем при указанной смене форм приобретают прикладное значение такие понятия и теории, которые возникали из внутренних потребностей самой математики. Например, математическая логика нашла применение в вычислительной технике, которая в свою очередь чрезвычайно расширяет возможности чистой математики. В постоянном переходе чистой математики в прикладную, сопровождаемом разрешением противоречий процесса познания, и состоит прогрессивное развитие математики.

Современная математика характерна тем, что к процессу расширения предмета ее исследований стали подходить сознательно, рассматривая не только известные уже пространственные формы и количественные отношения, но и логически возможные формы и отношения.

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Матрицы

2.1.1. Основные определения

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: $a_{ij}\,(i = 1,2,\ldots,m;\, j = 1,2,\ldots,n)$, где i – номер строки; j – номер столбца.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например,

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Равными, называются две матрицы A и B одного размера если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$ для любых $i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n.$

Матрицей-строкой (вектором-строкой) называется матрица, состоящая из одной строки, а из одного столбца – **матрицей-столбцом (вектором-столбцом):**

Например,

$A=(a_{11}\,a_{12}\,,\dots,\,a_{1n})$ – матрица-строка; $B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица у которой, число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица третьего порядка.

Диагональными элементами матрицы A называются элементы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i=j)$, и они образуют главную диагональ матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}\,,a_{22}\,,\dots,\,a_{nn}$.

Диагональной матрицей называется матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

– диагональная матрица третьего порядка.

Верхней треугольной матрицей n**-го порядка** называется матрица, у которой элементы ниже диагонали равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

–верхняя треугольная матрица второго порядка.

Нижней треугольной матрицей n**-го порядка** называется матрица, у которой элементы выше диагонали равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

– нижняя треугольная матрица второго порядка.

Единичной матрицей n**-го порядка** называется диагональная n-го порядка, у которой все диагональные элементы равны единице. Она обозначается буквой E.

Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– единичная матрица третьего порядка.

Нулевой, или **нуль-матрицей** любого размера, называется матрица, у которой все элементы равны нулю:

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & ... \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Действия над матрицами

1. Произведением матрицы A **на число** λ называется матрица $C=\lambda A$, элементы которой $c_{ij}=\lambda\, a_{ij}\,(i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n)$.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{то}\quad 3A=\begin{pmatrix} -15 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за её знак.

Например,

$$\begin{pmatrix} 22 & 14 & 6 \\ 42 & 0 & 4 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 \\ 21 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Суммой двух матриц A и B **одинакового размера** $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n)$.

Замечание. Матрицы складываются поэлементно

Например,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix};\quad C=A+B=\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Замечание. В частном случае $A+O=A$.

Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции:

$$A-B=A+(-1)\cdot B.$$

Пример. Найти линейную комбинацию матриц $2A-5B$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -4 & 7 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$2A-5B=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -4 & 7 & 0\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ -8 & 14 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -5 & 10\\ 5 & 20 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-0 & 4+5 & 6-10\\ -8-5 & 14-20 & 0-15\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 9 & -4\\ -13 & -6 & -15\end{pmatrix}.$$

3. Произведением матрицы *A* на матрицу *B* называется такая матрица

$$C_{m\times n}=A_{m\times k}\cdot B_{k\times n},$$

каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}\quad (i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n).$$

Замечание. Произведение матриц определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пример. Вычислить произведение матриц $A\cdot B$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно). Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$C=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+1\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 1\cdot(-1)+1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 2+1\cdot 3+(-2)\cdot(-2) \\ (-3)\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 0 & (-3)\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot 1 & (-3)\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot(-2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2+1-0 & -1-2-2 & 2+3+4 \\ -6+0+0 & 3+0+1 & -6+0-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -6 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $C=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Некоторые свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами. Это следует из определений этих операций:

1. $A+B=B+A$. 2. $(A+B)+C=A+(B+C)$. 3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
4. $A(B+C)=AB+AC$. 5. $(A+B)C=AC+BC$. 6. $A(BC)=(AB)C$.
7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

Если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножителей местами произведение матриц BA может и не существовать. Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров и коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется, т.е.

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

Рассмотрим это утверждение на следующем примере.

Пример. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют): $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot 2 & 2\cdot 7+3\cdot(-3) \\ -1\cdot 3+1\cdot 2 & -1\cdot 7+1(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+7\cdot(-1) & 3\cdot 3+7\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-3)\cdot(-1) & 2\cdot 3+(-3)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 16 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получим, что $AB\neq BA$, т.е. произведение матриц не обладает коммутативным свойством.

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно

$$AE=EA=A.$$

Таким образом, единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

4. Целой положительной степенью $A^m\,(m>1)$ **квадратной матрицы** A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m = A\cdot A\cdot\ldots\cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению, полагают $A^0 = E;\quad A^1 = A.$ Нетрудно показать, что

$$A^m\cdot A^k = A^{m+k};\quad (A^m)^k = A^{mk}.$$

Пример. Найти A^2, где $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$

Решение. $A^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 7\\ 10 & 18\end{pmatrix}.$

5. Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^T называется **транспонированной** относительно матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m\times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $n\times m$.

Пример. Найти линейную комбинацию матриц $2A-5B$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -4 & 7 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}.$

Решение.

$$2A-5B=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -4 & 7 & 0\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ -8 & 14 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -5 & 10\\ 5 & 20 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-0 & 4+5 & 6-10\\ -8-5 & 14-20 & 0-15\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 9 & -4\\ -13 & -6 & -15\end{pmatrix}.$$

Пример. Транспонировать матрицу $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A имеет размерность 2×3, следовательно, размерность матрицы A^T – 3×2

$$A^T{}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ -5 & 4\end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1. $\left(A^T\right)^T=A.$ 2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T.$ 3. $(A+B)^T=A^T+B^T.$

4. $(AB)^T=B^T A^T.$

Задания для решения в аудитории

1. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Найти det ($AB$).

5. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Найти $2A+B$, $A\cdot B$.

6. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ и число $\alpha=2$. Найти $A^TB+\alpha C$.

7. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Показать, что $(AB)^T=B^TA^T$.

8. Найти линейную комбинацию матриц
$A=\begin{pmatrix}4 & -9\\ 5 & 1\\ -6 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 6\\ 5 & -2\end{pmatrix}$: а) $A-2B$; б) $2A+3B$.

Ответы.

1. $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 8 & 16 & 4\\ 6 & 12 & 3\end{pmatrix}$; $BA=21$. **2.** $\begin{pmatrix}13 & 16\end{pmatrix}$. **3.** 19. **4.** –26.

5. $2A+B=\begin{pmatrix}3 & 7 & 10\\ 9 & 9 & 16\\ 7 & 6 & 10\end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix}14 & 23 & 32\\ 11 & 21 & 32\\ 16 & 29 & 40\end{pmatrix}$. **6.** $A^TB+\alpha C=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 12\end{pmatrix}$.

8. а) $\begin{pmatrix}-2 & -13\\ 7 & -11\\ -16 & 11\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}17 & -12\\ 7 & 20\\ 3 & 8\end{pmatrix}$.

Индивидуальные задания

1. Выполнить действия над матрицами.

1. $A\cdot C+B$, если $A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -4 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8 & 1\\ -9 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

2. $A\cdot C-B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & -5\\ 9 & -7\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-7 & -7\\ 7 & -1\end{pmatrix}$.

3. $C\cdot A+2B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 3 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & 9\end{pmatrix}$.

4. $C\cdot A+B^T$, если $A=\begin{pmatrix}-6 & 5\\ -4 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -9 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & 9\end{pmatrix}$.

5. $C\cdot A-B$, если $A=\begin{pmatrix}9 & -4\\ -8 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -5\end{pmatrix}$.

6. $C^T\cdot A-2B$, если $A=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -1 & 5\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

7. $A^T\cdot C+3B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}8 & -5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

8. $A\cdot C-4B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

9. $A^T\cdot C-2B$, если $A=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

10. $A\cdot C-5B$, если $A=\begin{pmatrix}10 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

11. $A\cdot C-4B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

12. $A\cdot C\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

13. $A\cdot C-2B$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -2 & 10\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & 7\\ -3 & -4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

14. $A^T\cdot X-B=C$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

15. $2A\cdot C^T+4B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

16. $A\cdot C-B^T$, если $A=\begin{pmatrix}10 & 3\\ -7 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

17. $A\cdot C+3B$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

18. $A\cdot C^T+B$, если $A=\begin{pmatrix}13 & 4\\ 6 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-8 & 5\\ 9 & -4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 9 & -10\end{pmatrix}$.

19. $X\cdot A-B=C^T$, если $A=\begin{pmatrix}9 & 10\\ -2 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -7\end{pmatrix}$.

20. $C\cdot A-4B$, если $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -4 & -5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

21. $C\cdot A+5B$, если $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 9 & -8\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}6 & -5\\ 8 & -7\end{pmatrix}$.

22. $C\cdot A+3B$, если $A=\begin{pmatrix}8 & 5\\ -4 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-9 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5 & -9\\ 2 & -7\end{pmatrix}$.

23. $2B-C\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 9 & 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0 & -11\\ 2 & -7\end{pmatrix}$.

24. $B^T+C\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}15 & 11\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

25. $-2B+C\cdot A^T$, если $A=\begin{pmatrix}-8 & 10\\ -3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 9 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-2 & 17\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

2. Найти, если это возможно, произведение матриц *AB* и *BA*.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

10. $2A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$; $3B=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 0 & -6 & 9 \\ 9 & -3 & 15 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x & x \\ x^2 & x^2 & x^2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} x^2 & x^2 & x^2 \\ x & x & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & a & -a \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ a & 1 & -a \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

17. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -5 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ -10\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 5 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 2/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}\mathrm{tg}^2\alpha & \cos^2\alpha\\ \sin^2\alpha & \mathrm{ctg}^2\alpha\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha & \sin^2\alpha\\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 5 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 9\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}\cos 3\alpha & \sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos 3\alpha\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}\cos 3\alpha & \sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos 3\alpha\end{pmatrix}$.

26. $5A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\ 50 & 10 & 100\\ 0 & 10 & 20\end{pmatrix}$; $3B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=A^2$.

28. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a & a\\ b & b & b\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 1 & a & b\\ 1 & a & b\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\\ 8 & 8 & 8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 1/8\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}-15 & 3 & 0\\ 1 & 23 & 10\\ 0 & 10 & 27\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

2.2. Определители квадратных матриц

Определитель матрицы A обозначается $|A|$, Δ или $\det A$.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$**, или определителем первого порядка,** называется элемент

$$a_{11}: \Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Например, пусть

$$A=(7), \text{ тогда } \Delta_1 = |A| = 7.$$

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$**, или определителем второго порядка** называется выражение, равное

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, пусть $A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix}3 & 8\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 8\cdot 1 = -14.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$**, или определителем третьего порядка** называется выражение, равное

$$\Delta_3=|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -5 & 1\end{vmatrix}.$

Решение. Используем разложение определителя по первой строке.

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -5 & 1\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -5 & 1\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+(-2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(2-5)-3\cdot(1+2)-2\cdot(-5-4)=-12-9+18=-3.$$

Замечание. Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарруса), которое определяется схемой

$$\begin{vmatrix}\circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bullet & \circ & \circ\\ \circ & \bullet & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ & \bullet & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\\ \bullet & \circ & \circ\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ & \circ & \bullet\\ \bullet & \circ & \circ\\ \circ & \bullet & \circ\end{vmatrix}-\left(\begin{vmatrix}\circ & \circ & \bullet\\ \circ & \bullet & \circ\\ \bullet & \circ & \circ\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ & \bullet & \circ\\ \bullet & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\bullet & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \bullet\\ \circ & \bullet & \circ\end{vmatrix}\right).$$

Например,

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 4\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot4+3\cdot1\cdot2+(-1)\cdot5\cdot4-\left(2\cdot0\cdot4+(-1)\cdot3\cdot4+1\cdot1\cdot5\right)=$$

$$=0+6-20-\left(0-12+5\right)=-7.$$

Для определения определителя более высокого порядка введём некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} **матрицы *n*-го порядка** A называется определитель матрицы (n–1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} **элемента** a_{ij} **матрицы *n*-го порядка** называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ – четное число, и отличается от минора знаком, если $(i + j)$ – нечетное число.

Например,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}.$$

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Определителем квадратной матрицы *A n-го* порядка называется число, равное сумме попарных произведений элементов *i*-й строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{s=1}^{n} a_{1S}A_{1S}$$

– разложение по элементам первой строки.

Так, например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.
Для избегания громоздких вычислений необходимо знание свойств определителей.

Свойства определителей:

1. Если матрица содержит строку (или столбец), состоящую из нулей, то её определитель равен нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число α, то её определитель умножится на это число α.

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца; за знак матрицы можно выносить лишь общий множитель всех элементов.

3. Определитель транспонированной матрицы A^T равен определителю исходной матрицы A:

$$\left|A^T\right| = |A|.$$

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.

5. Если все элементы некоторой строки (или столбца) матрицы пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то её определитель равен нулю.

6. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой её строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta = \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is}.$$

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т. е.

$$\sum_{S=1}^{n} a_{iS} A_{jS} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \ .$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

9.Если каждый элемент i-й строки матрицы представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы равен сумме определителей таких матриц: у первой из них i-я строка состоит из первых слагаемых, а у второй – из вторых. Все остальные строки у всех трех матриц не изменятся.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

10. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной матрицы заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

11. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$|C| = |A| \cdot |B|, \text{ где } C = A \cdot B;\ A \text{ и } B \text{ – матрицы } n\text{-го порядка.}$$

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, $|AB| = |BA|$. Используя свойства определителей, при их вычислении целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1–9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержащую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

Пример. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 & 6 \\ 2 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вынесем за знак определителя множитель 2 из первой строки. Тогда

(-2) (-1) (1)

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad + \quad + \quad + \quad .$$

Прибавим к элементам второй строки элементы первой строки, умноженные на (–2); к элементам третьей строки–элементы первой строки, умноженные на (–1); к элементам четвертой строки – элементы первой строки. В результате этого в первом столбце все элементы, кроме первого, будут нулевыми. Разложим определитель по первому столбцу. Таким образом, сводим вычисление определителя 4-го порядка к вычислению определителя 3-го порядка.

$$\Delta = 2\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 7 & 14 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 9\end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}7 & 14 & 4\\ 0 & 5 & 0\\ 4 & 2 & 9\end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}7 & 4\\ 4 & 9\end{vmatrix} =$$
$$= 10\cdot(63-16) = 470.$$

При вычислении был разложен определитель третьего порядка по элементам второй строки. В типовом расчете не всегда полученный определитель 3-го порядка будет иметь какую-нибудь строчку или столбец с двумя нулями. Поэтому для его вычисления можно воспользоваться правилом треугольников или с помощью элементарных преобразований получить в каком-либо ряду два нулевых элемента.

Например,

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 7 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix} = 0\cdot(-7) + 5\cdot 2\cdot 2 + 6\cdot 3 - 6\cdot 7 - 6\cdot 2\cdot 0 - 5\cdot(-1) =$$
$$= +20 + 18 - 42 + 5 = 1$$

или

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 7 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix} \begin{matrix}(-7) & (-2)\\ + & +\end{matrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 0 & -8\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix}.$$

Умножаем первую строку на (–7) и складываем со второй, умножаем первую строку на (–2) и складываем с третьей. Раскладываем полученный определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 0 & -8\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}5 & -8\\ 3 & -5\end{vmatrix} = -(-25+24) = 1.$$

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в третьей строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (–4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице 3-го порядка элементы второй строки (кроме одного).

Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (–13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Пример. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Раскладывая по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 1 \cdot 2(-1) \cdot 3 + 0 = -6.$$

Замечание. Из приведённого выше примера следует, что определитель треугольной (и, очевидно, любой треугольной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \mathrm{tg}\varphi \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить уравнения: а) $\begin{vmatrix} x-3 & x+4 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix} = 20$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -x & -2 \\ -5x & 6 & 3x \\ -7 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

4. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 & 6 \\ 2 & 7 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ответы.

1. а) 17; б) –15; в) $\dfrac{1}{\cos^2 \varphi}$; г) $\cos 2\alpha$. **2.** а) –252; б) 37. **3.** а) –2; б) –1, 12.
4. 470. **5.** –24.

Индивидуальные задания

Вычислить определитель 4-го порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$ 9. $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 & 10 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 8 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & -1 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 4 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 & 10 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{8} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{8} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix}$.

2.3. Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Обратной по отношению к квадратной матрице A называется матрица A^{-1}, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E .$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Невырожденной, или **неособенной, матрицей** называется такая квадратная матрица, у которой определитель отличен от нуля $(|A| \neq 0)$. В противном случае $(при\ |A| = 0)$ матрица называется **вырожденной,** или **особенной**.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная. Можно доказать, что обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}^{T} \ (|A| \neq 0), \qquad (2.1)$$

где $\widetilde{A}$ – квадратная матрица n-го порядка, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная, и обратная матрица A^{-1} не существует.

Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная, и обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A_{ij} $(i = 1, 2, ..., n;\ \ j = 1, 2, ..., n)$ и составляем из матрицу $\widetilde{A}$:

3. Находим матрицу $\widetilde{A}^{T}$, транспонированную к $\widetilde{A}$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле (2.1).

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

Пример. Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 3\\ 8 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы A.

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 3\\ 8 & -3 & 6\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 8 & -3\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Определитель матрицы $|A|=2\neq 0$, т. е. матрица A – невырожденная, и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Вычисляем алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 6\end{vmatrix}=3;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{vmatrix}=0;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 8 & -3\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 6\end{vmatrix}=-9;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 8 & 6\end{vmatrix}=4;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 8 & -3\end{vmatrix}=14;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-6.$$

3 Находим присоединённую матрицу: $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}3 & -9 & 4\\ 0 & 4 & -2\\ -4 & 14 & -6\end{pmatrix}.$

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}^{T}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3 & -9 & 4\\ 0 & 4 & -2\\ -4 & 14 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5 & -4{,}5 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 7 & -3\end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&-1&3\\8&-3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1{,}5&-4{,}5&2\\0&2&-1\\-2&7&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+0-2&-9+2+7&4-1-3\\6+0-6&-18-2+21&8+1-9\\12+0-12&-36-6+42&16+3-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

1) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$;

2) $(A^{-1})^{-1}=A$;

3) $\left(A^m\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^m$;

4) $\left(A^{-1}\right)'=(A')^{-1}$;

5) $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

С помощью обратной матрицы решаются матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X:

$AX=B \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$;

$XA=B \quad\Rightarrow\quad X=B\cdot A^{-1}$;

$AXB=C \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить матрицу, обратную данной:

$$\begin{pmatrix}7&-7&-1\\-1&-3&0\\2&-2&2\end{pmatrix}.$$

2. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&-1\\2&0\end{pmatrix}$;

$$б)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответы.

1. $\begin{pmatrix} 3/32 & -1/4 & 3/64 \\ -1/32 & -1/4 & -1/64 \\ -1/8 & 0 & 7/16 \end{pmatrix}$. **2.** а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -7/4 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

Минорами *k*-го порядка матрицы *A* называются определители (квадратные подматрицы *k*-го порядка), которые получаются из *A* размером $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов ($k \le \min(m;n)$).

Например, из матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы *A* называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы *A* обозначается rang *A* или *r* (*A*). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т. е. $r(A) \le \min(m;n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. *A*=0;

в) для квадратной матрицы *n*-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица *A* – невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. Для матрицы $A_{3\times 4}$ $r(A) \le \min(3;4) = 3$. Проверим, равен ли ранг трём. Для этого вычислим все миноры третьего порядка, т. е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \le 2$. В силу того, что существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \ne 0$, $r(A) = 2$.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Следующие преобразования назовем ***элементарными***:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т. е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11} \ne 0$. В данном примере поменяем местами, например, первую и вторую строки матрицы.

2. Если $a_{11} \neq 0$, то, умножая элементы второй, третьей и четвёртой строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11}=0;\ -a_{31}/a_{11}=2;\ -a_{41}/a_{11}=1)$ и прибавляя полученные числа соответственно к элементам второй, третьей и четвёртой строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (в данном случае $a_{22}=-1\neq 0$), то, умножая элементы третьей и четвёртой строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22}=-3;\ -a_{42}/a_{22}=-3)$, добьемся того, чтобы все элементы второго столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю.

Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен двум.

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответы.

1. 2. **2.** 3.

2.5. Системы линейных алгебраических уравнений

2.5.1. Общие понятия

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $a_{ij}, b_i \left(i=1,2\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n\right)$– произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных и свободными членами уравнений.** В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=1,2\ldots,m).$$

Решением системы (2.2) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = d_1;\ x_2 = d_2;\ldots;x_n = d_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Например, система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 22; \\ 3x_1 - x_2 = -4 \end{cases}$$

– совместная и определенная, так как имеет единственное решение (2;10); система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8; \\ x_1 + 3x_2 = 16 \end{cases}$$

– несовместная, а система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10; \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$$

– совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а именно, бесконечное множество решений ($x_1 = c$; $x_2 = 10 - 2c$, где c – любое число).

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (2.2) в матричной форме. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы; X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m \times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n \times 1}$, их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

является матрицей-столбцом. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2.2). Воспользовавшись определением равенства матриц систему (2.2) можно записать в виде

$$AX = B. \tag{2.3}$$

2.5.2. Решение квадратных систем методом обратной матрицы

Пусть число уравнений системы (2.2) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**. Предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (2.3) на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \tag{2.4}$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2; \\ 3x + 2y + z = 5; \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}$$

матричным способом.

Решение. Введем обозначения

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\ \ B=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 12\end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде систему можно переписать следующим образом:

$$AX=B.$$

Определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$; следовательно, матрица A – невырожденная и существует обратная ей матрица A^{-1}. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся приведённым в подр. 2.3 алгоритмом вычисления обратной матрицы.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3$; $A_{21}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-4$; $A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$;

$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=2$; $A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3$; $\mathrm{A}_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1$;

$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-13$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=17$; $A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ -13 & 17 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ 13 & -17 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение системы

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B,$$

т. е. $$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ 13 & -17 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+20-12\\ -4+15-12\\ 26-85+60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили ответ: $x=2$; $y=-1$; $z=1$.

2.5.3. Решение квадратных систем по формулам Крамера

Сформулируем теорему.

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2.2), а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, ..., n). \tag{2.5}$$

Формулы (2.5) получили название формул Крамера.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2; \\ 3x + 2y + z = 5; \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}$$

методом Крамера.

Решение. Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 15 - 10 + 2 - 9 = -1.$$

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где Δ_i – определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой i-го столбца на столбец правых частей: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{-1} = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 & 38 \\ 13 & 0 & 29 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 17 & 38 \\ 13 & 29 \end{vmatrix} =$$

$$= 17\cdot 29 - 13\cdot 38 = 493 - 494 = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ответ. $x = 2;\ y = -1;\ z = 1$.

2.5.4. Решение линейных систем методом Гаусса

Рассмотрим решение системы (2.2) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2.2) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11},\ -a_{31}/a_{11}, ..., -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (2.2), исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго.

Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \text{.....................................} \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + ... + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}; \\ \text{.....................................} \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа

$$\left(\, -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, ..., \ldots, \, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \, \right)$$

и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, m-му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, ..., x_{r-1}$, после $(r-1)$-го шага получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1\,; \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2r}^{(1)}\,x_r + a_{2,r}^{(1)}\,x_{r+1} + ... + a_{2n}^{(1)}\,x_n = b_2^{(1)}\,; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}\,x_{r+1} + ... + a_{2n}^{(r-1)}\,x_n = b_r^{(r-1)}\,; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}\,; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, ..., b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2.2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}, ..., b_m^{(r-1)}$ в системе (2.6) равны нулю. В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (2.6) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2.2). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая:

а) число уравнений системы (2.6) равно числу переменных, т. е. $r = n$ [в этом случае система (2.6) имеет треугольный вид];

б) $r < n$ [в этом случае система (2.6) имеет ступенчатый вид]. Переход системы (2.2) к равносильной ей системе (2.6) называется

прямым ходом метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (2.6) – **обратным ходом.**

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемую **расширенной матрицей системы** (2.2),так как в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 3$, а $a_{21} = 1$, меняем первую и вторую строки. Исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая полученную первую строку на 3 и вычитая её из второй строки матрицы. Затем вычитаем первую строку из третьей и четвёртой строк.

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Шаг 2. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)}=-2$, выносим из второй строки общий множитель –2. Получим матрицу, эквивалентную данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку матрицы на число 3 и прибавляя её к третьей строке. Затем из четвертой строки вычитаем вторую, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. По последней матрице системы определяем ранг системы $r(A/B)=r(A)=n=3$, значит, система совместна и определённа. Записываем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2; \\ \qquad x_2+3x_3=3; \\ \qquad\qquad 7x_3=7. \end{cases}$$

Шаг 4. Находим из последнего уравнения $x_3=1$, затем из второго уравнения $x_2+3\cdot 1=3 \;\Rightarrow\; x_2=0$, из первого уравнения $x_1+2\cdot 0+3\cdot 1=2 \;\Rightarrow\; x_1=-1$. Получаем решение системы $(-1;\, 0;\, 1)$.

Шаг 5. Делаем проверку: $\begin{cases} 3(-1)+4\cdot 0+3\cdot 1=0; \\ -1+2\cdot 0+3\cdot 1=2; \\ -1-0+1=0; \\ -1+3\cdot 0-1=-2. \end{cases}$

Пример. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Вопрос о разрешимости системы (2.2) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема Кронекера–Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы. Если $r(A) \neq r(A_1)$, то система не совместна

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т. е. $r = n$, то система (2.2) имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т. е. $r < n$, тогда система (2.2) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пусть $r < n$, тогда r переменных $x_1, x_2, ..., x_r$ называются **основными** (или базисными), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются неосновными (или свободными).

Решение системы (2.2), в которой все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется **базисным решением.**

Пример. Исследовать на совместность и решить методом Гаусса данную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и выполним над ней элементарные преобразования:

$$(A/B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1\\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1;\\ x_2-10x_3+17x_4=-2.\end{cases}$$

$r(A/B)=r(A)=2<n=4$, следовательно, система совместна и неопределённа, т.к. имеет бесконечное множество решений.

Оставим в левой части переменные x_1, x_2, которые берем за основные. Определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases}x_1=-2x_2+3x_3-5x_4+1;\\ x_2=10x_3-17x_4-2.\end{cases}$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3=c_1$; $x_4=c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1=5-17c_1+29c_2;\ x_2=-2+10c_1-17c_2;\ x_3=c_1;\ \ x_4=c_2\right)$.

Найдём одно из частных решений системы, для этого положим $c_1=1; c_2=1$, тогда $x_1=17$; $x_2=-9$.

Проверка: $\begin{cases} 17+2\cdot(-9)-3\cdot 1+5\cdot 1=1; \\ 17+3\cdot(-9)-13\cdot 1+22\cdot 1=-1; \\ 3\cdot 17+5\cdot(-9)+1-2\cdot 1=5; \\ 2\cdot 17+3\cdot(-9)+4\cdot 1-7\cdot 1=4. \end{cases}$

Задания для решения в аудитории

1. Исследовать систему на совместность. Если она совместна, найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0\ ; \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=6\ ; \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4+2x_5=4\ ; \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=8\ . \end{cases}$$

2. Исследовать систему на совместность. Если она совместна найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-3x_4=1\ ; \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=2\ . \end{cases}$$

Ответы.

1. Система не совместна. **2.** $\begin{cases} x_1=-1-3C_3+5C_4; \\ x_2=3+4C_3-7C_4; \\ x_3=C_3; \\ x_4=C_4, \text{ где } C_3, C_4\in R. \end{cases}$

Индивидуальные задания

Задание 1.

Решить систему методом Крамера и средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} x+y-z=-2; \\ 4x-3y+z=1; \\ 2x+y=5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+4y-3z=-7; \\ x-3y+2z=0; \\ 2x-5y-z=-1. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x+2y+2z=1; \\ 2x-3y-z=3; \\ x+y+2z=-2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+4z=31; \\ 5x+y+2z=29; \\ 3x-y+z=10. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y+z=8. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 4x+5y-2z=-3; \\ x+2y+3z=0; \\ x+y-2z=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+2z=-1; \\ 2x-y+2z=-4; \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x-3y+z=-7; \\ x+4y+2z=-1; \\ x-4y=-7. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x+y-2z=16; \\ 2x+3y-7z=16; \\ 5x+2y+z=16. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=14; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x+y-z=1; \\ 8x+3y-6z=2; \\ -4x-y+3z=-3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x-5y=31; \\ 4x+11y=-43; \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x-2y+3z=6; \\ 2x+3y-4z=20; \\ 3x-2y-5z=6. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y-z=-2; \\ 4x-3y+z=1; \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 3x+y+z=5; \\ x-4y-2z=-3; \\ -3x+5y+6z=7. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x-y+5z=4; \\ 5x+2y+13z=2; \\ 3x-y+5z=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8; \\ 2x-4y-3z=-1; \\ x+5y+z=0. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 5x+8y-z=7; \\ 2x-3y+2z=9; \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 3x+5y+7z=24; \\ x+y-z=8; \\ 3x+4y-z=27. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 7x+2y+3z=5; \\ 3x-3y+5z=6; \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 3x+4y+5z=7; \\ 2x-y+z=0; \\ 5x+3y+3z=1. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x-3y-z=4; \\ x+y-z=3; \\ x-y-z=1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x+y-z=2; \\ 2x+2y+z=9; \\ x+y-z=0. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x+y+z=3; \\ 2x-3y+2x=1; \\ 3x+2y+z=4. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 2x+y+z=3; \\ 5x+y-z=2; \\ 3x+3y+z=3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x-y-z=0; \\ 2x+3y+z=7; \\ x+5y+3z=8. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 2x+3y-3z=1; \\ x+y+z=5; \\ 6x+y-5z=3. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 2x+3y-6z=15; \\ x+y-2z=6; \\ 5x-6y+z=8. \end{cases}$

Задание 2.

Исследовать систему на совместность. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 - 18x_4 = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8; \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2; \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5; \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0; \\ x_1 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 12x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4; \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1; \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -24; \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2; \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_5 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1; \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2; \\ x + y + z = 3; \\ 2x - 3y + 2z = 1; \\ 3x + 2y + z = 4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23; \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 = -8; \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1; \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7; \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3; \\ 4x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_5 = 1; \\ x_1 + x_3 = 2; \\ x_1 - x_4 = 5. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 10; \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5; \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4; \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 7. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8; \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7; \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4; \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+6x_4+9x_5=2; \\ x_2-2x_3+2x_4+3x_5=-7; \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5=3; \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=1; \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0; \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=4; \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=5. \end{cases}$

Контрольная работа по теме «Линейная алгебра»

Вариант № 1

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$2x_1-3x_2-x_3+5x_4-x_5=2;$

$3x_1+4x_2-x_3+4x_4-x_5=9;$

$6x_1+2x_2-3x_3+10x_4-3x_5=12;$

$3x_1-2x_2-2x_3+6x_4-2x_5=3.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$5x_1+6x_2-x_3=10;$

$x_1+x_2-x_3=1;$

$3x_1+4x_2-x_3=6.$

3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 2

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+3x_2-x_3+5x_4-x_5=8;$

$x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5=4;$

$3x_1+5x_2-2x_3+8x_4-2x_5=12;$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$2x_1+4x_2-x_3+7x_4-x_5=11.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1+4x_2-2x_3=5;$
$5x_1+6x_2-x_3=10;$
$x_1+x_2-x_3=1.$

3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&3\\1&4&5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&1{,}5&-1{,}5\\1&-1&0\\-1&0{,}5&0{,}5\end{pmatrix}.$$

Вариант № 3

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+8x_2-4x_3+x_4-x_5=5;$
$x_1-x_3+4x_4-2x_5=2;$
$4x_1+3x_2-x_3-4x_4-x_5=1;$
$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$
$2x_1+8x_2+x_4-x_5=10.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$2x_1+3x_2-4x_3=1;$
$3x_1+3x_2-x_3=5;$
$-2x_1+x_2-x_3=-2.$

3. Решить матричное уравнение

$A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-0{,}5&3&-1{,}5\\1&-1&0\\-0{,}5&0&0{,}5\end{pmatrix}.$$

Вариант № 4

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5=4;$
$4x_1-2x_2-x_3+x_4-3x_5=-1;$
$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$6x_1+x_2-2x_3+2x_4-4x_5=3;$
$7x_1+2x_2-3x_3+3x_4-5x_5=4.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1-4x_2-x_3=-2;$
$x_1+x_2-x_3=1;$
$-3x_1+x_2-x_3=-2.$

3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-6&3\\1&-1&0\\-1&3&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 5

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+3x_2-x_3+5x_4-x_5=7;$
$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$
$3x_1+x_2-4x_3+x_4-x_5=0;$
$2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=2;$
$2x_2+4x_4=6.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1+2x_2-4x_3=1;$
$x_1+2x_2-x_3=2;$
$-3x_1+x_2-x_3=-3.$

3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&3\\2&3&7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-5&12&-3\\1&-1&0\\1&-3&1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 6

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$3x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=7;$
$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$
$4x_1+5x_2-x_3+x_4-x_5=8;$

$4x_1+5x_2-2x_3+3x_4-2x_5=8;$
$3x_1+4x_2=7.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_2-x_3=0;$

$3x_1+x_2-x_3=3;$

$-2x_1+3x_2-x_3=0.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -18 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 7

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$3x_1+4x_2-x_3+x_4-5x_5=2;$

$2x_1+3x_2-3x_3+x_4-x_5=2;$

$4x_1+3x_2-x_3+3x_4-x_5=8;$

$-2x_1-2x_3-2x_4=-6.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$7x_1+3x_2-2x_3=8;$
$3x_1+4x_2-x_3=6;$
$x_1+x_2-x_3=1.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -18 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 8

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$3x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=7;$

$x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0$;
$2x_1+3x_2-x_3+4x_4-x_5=7$;
$x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5=3$.
2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.
$-2x_1+3x_2-x_3=0$;
$-4x_1+2x_2-x_3=-3$;
$7x_1+4x_2-x_3=10$.
3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&2\\2&3&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1{,}2&0{,}6&0{,}8\\0{,}8&-0{,}4&-0{,}2\\-0{,}2&0{,}6&-0{,}2\end{pmatrix}.$$

Вариант № 9

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.
$x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5=4$;
$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1$;
$3x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=4$;
$4x_1+4x_2-2x_3+4x_4-2x_5=8$;
$2x_1-2x_4=0$.
2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.
$7x_1+x_2-x_3=7$;
$x_1+x_2-x_3=1$;
$-3x_1+4x_2-x_3=0$.
3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&4&2\\2&3&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-6&3&2\\4&-2&-1\\-5&3&1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 10

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.
$x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=4$;
$3x_1+x_2-3x_3+7x_4-x_5=14$;
$5x_1+x_2-x_3+8x_4-x_5=24$;

$x_1+4x_2-x_3+x_4-x_5=8;$
$4x_1+x_2-5x_3+x_4-6x_5=10.$
2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.
$6x_1+3x_2-x_3=8;$
$x_1+x_2-x_3=1;$
$x_1+4x_2-x_3=4.$
3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где
$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&4&2\\1&3&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}6&-3&-2\\-2&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 11
1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.
$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$
$3x_1+4x_2-x_3+x_4-x_5=6;$
$x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5=0;$
$2x_1+2x_2-4x_3+3x_4-2x_5=1;$
$3x_1+3x_2-7x_3+5x_4-3x_5=1.$
2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.
$3x_1+x_2-x_3=3;$
$x_1+4x_2-x_3=4;$
$x_1+x_2-5x_3=-3.$
3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где
$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&4&2\\1&1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&-1&-1\\-3&2&1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 12
1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.
$2x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3;$
$x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=-1;$
$x_1+3x_2-x_3+x_4-4x_5=0;$
$6x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5=8;$
$x_1+2x_3+x_4=4.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$4x_1+x_2-x_3=4;$

$x_1+3x_2-x_3=3;$

$x_1+x_2-2x_3=0.$

3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&3&2\\1&1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1&0{,}5&1{,}5\\1&-0{,}5&-0{,}5\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Вариант № 13

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=2;$

$x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=-1;$

$x_1+4x_2-x_3+5x_4-2x_5=7;$

$2x_1+3x_2-4x_3+2x_4-2x_5=1;$

$x_2+2x_3=3.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$6x_1+x_2-x_3=6;$

$x_1+4x_2-x_3=4;$

$x_1+x_2-2x_3=0.$

3. Решить матричное уравнение $A\cdot B-E=X$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&3&2\\1&1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вариант № 14

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$2x_1+3x_2-2x_3+x_4-x_5=3;$

$x_1+3x_2-x_3+4x_4-x_5=6;$

$3x_1+4x_2-3x_3+2x_4-2x_5=4;$

$-x_1-2x_2+x_3=-2.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_1+x_2-x_3 = 1;$

$x_1+2x_2-3x_3 = 0;$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 15

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=2;$

$x_1+3x_2-2x_3+3x_4-x_5= 4;$

$3x_1+4x_2-3x_3+4x_4-2x_5= 6;$

$x_1-2x_2+x_3-2x_4= -2;$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3 =-2;$

$x_1+x_2-x_3 =1;$

$3x_1+4x_2-x_3 = 6.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 16

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$3x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=3;$

$x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5=4;$

$4x_1+3x_2-2x_3+4x_4-2x_5=7;$

$2x_1-x_2-2x_4= -1;$

$x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=5.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-x_1+3x_2-x_3 = 1;$

$4x_1+x_2-x_3 = 4;$

$3x_1+2x_2-x_3 = 4.$

3. Решить матричное уравнение $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -1,4 & 1,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & -0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 17

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$3x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=3;$

$x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=2;$

$x_1+x_2-x_3+3x_4-x_5=3;$

$4x_1+3x_2-2x_3+2x_4-2x_5=5;$

$2x_1-x_2 =1.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$2x_1+x_2-x_3 = 2;$

$x_1+4x_2-x_3 = 4;$

$x_1+x_2-6x_3 = - 4.$

3. Решить матричное уравнение $A{\cdot}B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 18

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$4x_1+4x_2-4x_3+4x_4-2x_5= 6;$

$-2x_1-2x_3-2x_4 = -6;$

$x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5= 0;$

$3x_1+2x_2-x_3+3x_4-x_5= 6.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_1+3x_2-x_3 = 3;$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2;$

$x_1+x_2-x_3 = 1.$

3. Решить матричное уравнение $A\cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & -1{,}5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 19

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$4x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=5;$

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 1;$

$5x_1+2x_2-2x_3+3x_4-2x_5= 6;$

$3x_1+x_4 =4;$

$8x_1+2x_2-2x_3+4x_4-2x_5= 10.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$x_1+x_2-x_3 = 1;$

$x_1+2x_2-x_3 = 0;$

$-3x_1+x_2-x_3 = -3.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 2 & -15 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 20

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 1;$

$2x_1+x_2-2x_3+3x_4-x_5=3;$

$3x_1+2x_2-3x_3+4x_4-2x_5=4;$

$-x_1+x_3-2x_4= -2;$

$2x_1+2x_2-2x_3+2x_4-2x_5= 2.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$3x_1+x_2-x_3 = 3;$

$x_1+4x_2-x_3 = 4;$

$-x_1+2x_2-x_3 = 0.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 21

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 1;$

$2x_1+3x_2-x_3+4x_4-x_5= 7;$

$3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5= 2;$

$3x_1+4x_2-2x_3+5x_4-2x_5= 8;$

$-x_1-2x_2-3x_4= -6.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3 = -2;$

$x_1+3x_2-x_3 = 3;$

$-6x_1+x_2-x_3 = -6.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -14 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 22

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5= 2;$

$x_1+4x_2-x_3+x_4-x_5= 4;$

$x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5= 3;$

$3x_1+5x_2-2x_3+2x_4-2x_5= 6;$

$x_1-3x_2 = -2.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-x_1+3x_2-x_3 = 1;$

$x_1+4x_2-x_3 = 4;$

$3x_1+x_2-x_3 = 3.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 23

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=1;$

$2_1+x_2-6x_3+x_4-x_5= -3$;
$3x_1+x_2-4x_3+x_4-x_5= 0$;
$3x_1+2x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -2$;
$-x_1+5x_3 = 4$.

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3 = -24$;
$x_1+4x_2-x_3 = 4$;
$-2x_1+x_2-x_3 = -2$.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 24

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$1x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=8$;

$2x_1+3x_2-6x_3+x_4-x_5= -6$;

$3x_1+3x_2-4x_3+x_4-x_5= 4$;

$3x_1+2x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -4$;

$-x_1+5x_3 = 8$.

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$;

$3x_1+4x_2-x_3 = 6$;

$-2x_1+x_2-x_3 = -2$.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 25

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+3x_2-x_3+x_4-x_5=5;$

$2x_1+4x_2-6x_3+x_4-x_5= 0;$

$3x_1+3x_2-4x_3+x_4-x_5= 2;$

$3x_1+2x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -2;$

$-3x_1+5x_3 = 2.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+4x_2-x_3 = 1;$

$3x_1+4x_2-x_3 = 6;$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 26

1. Исследовать совместность и в случае совместности найти все решения системы уравнений.

$x_1+5x_2-x_3+x_4-x_5=4;$

$2x_1+x_2-6x_3+x_4-x_5= -3;$

$3x_1+2x_2-4x_3+x_4-x_5= 1;$

$3x_1+6x_2-7x_3+2x_4-2x_5= -2;$

$-2x_1+5x_3 = 3.$

2. Решить систему линейных уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

$-2x_1+2x_2-x_3 = -1;$

$2x_1+4x_2-x_3 = 5;$

$-2x_1+x_2-x_3 = -2.$

3. Решить матричное уравнение $A \cdot B - E = X$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теоретические задания по теме «Линейная алгебра»

1.Действия над матрицами.

2.Обратная матрица, алгоритм нахождения. Теорема существования и единственности.

3.Решение систем линейных уравнений матричным способом.

4.Теорема Крамера.

5.Метод Гаусса.

6.Решение однородных систем. Ранг матрицы.

7.Теорема Кронекера–Капелли.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Векторы и действия над ними

3.1.1. Основные понятия

Вектором $\vec{a} = \overline{AB}$ называется направленный отрезок, где A – начало вектора; B – конец вектора.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора:

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|.$$

Вектор $\vec{e}$ называется **единичным**, если его длина равна единице:

$$|\vec{e}| = 1.$$

Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору

Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называются **противоположными**, если

$$|\vec{a}| = |-\vec{a}| \text{ и } \vec{a} \uparrow\downarrow -\vec{a}.$$

Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

3.1.2. Действия над векторами

1. Сложение векторов (рис. 3.1):
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

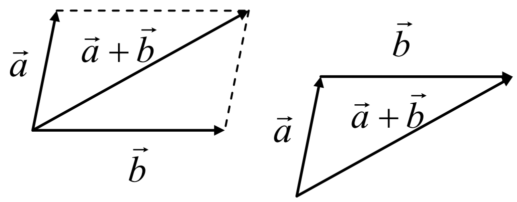

Рис. 3.1

2. Вычитание векторов (рис. 3.2):
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

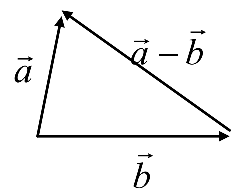

Рис. 3.2

3. Умножение на число (рис. 3.3): $\lambda\vec{a} = \vec{b}$: $\vec{b} \parallel \vec{a}$,

$$\begin{cases} \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \text{ при } \lambda > 0; \\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \text{ при } \lambda < 0. \end{cases}$$

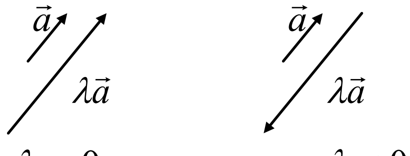

Рис. 3.3

4. Проекция вектора на ось (рис. 3.4):

$$np_l\, \overline{AB} = \begin{cases} \overline{A_1B_1}, \ \overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow l; \\ -\overline{A_1B_1}, \ \overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow l. \end{cases}$$

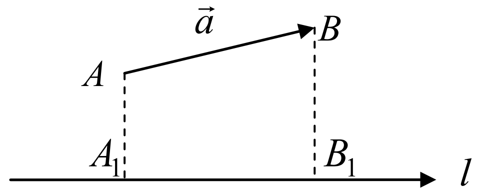

Рис. 3.4

Свойства проекции:

1) $np_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, l}\right)$;

2) $np_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$;

3) $np_l\lambda\vec{a} = \lambda \cdot np_l\vec{a}$.

Свойства векторов:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность;

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$;

5) $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность;

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – дистрибутивность;

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

3.1.3. Декартова прямоугольная система координат

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортонормированный базис, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (рис. 3.5).

$\vec{a} = \overline{AB} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$;

$a_x = \text{пр}_{OX}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha$;

$a_y = \text{пр}_{OY}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta$;

$a_z = \text{пр}_{OZ}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma$;

α, β, γ – углы $\vec{a}$ с осями OX, OY, OZ .

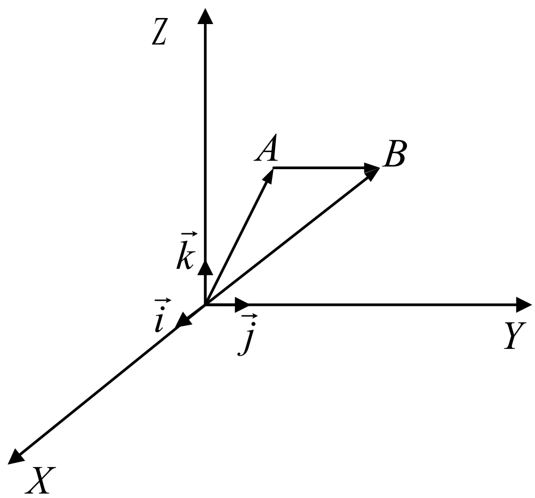

Рис. 3.5

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, если он удовлетворяет свойствам

$$\left|\vec{a}^0\right| = 1,\ \vec{a}^0 \uparrow\uparrow \vec{a}\,.$$

Его координаты находятся из соотношения

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Пусть заданы координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тогда

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}.$$

Если точка $M(x, y, z)$ делит отрезок AB в соотношении λ/μ, считая от A, то координаты этой точки определяются как

$$x = \frac{\mu x_A + \lambda x_B}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_A + \lambda y_B}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_A + \lambda z_B}{\mu + \lambda}.$$

В частности, при делении отрезка пополам

$$x = \frac{x_A + x_B}{2};\ y = \frac{y_A + y_B}{2};\ z = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Линейные операции над векторами в координатах. Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат:
$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

1. Сложение векторов:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}\,.$$

2. Умножение вектора на число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}\,.$$

3. Условие коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB} = \vec{b}$; $\overline{AC} = \vec{c}$.

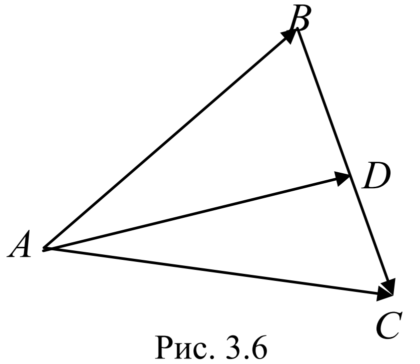

Рис. 3.6

Решение. $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \vec{c} - \vec{b}$ (рис. 3.6). Так как AD – медиана, то $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, следовательно, $\overline{BD} = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$.

Находим вектор $\overline{AD}$ как сумму векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$: $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \vec{b} + \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

Пример. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, приложенные к общей точке. Найти орт вектора, равного $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Решение. $2\vec{a} = (4; -6; 12)$, $\vec{b} = (-3; 6; -6)$;

$$\vec{c} = \overrightarrow{2a} + \overrightarrow{3b} = (4 - 3,\ -6 + 6,\ 12 - 6) = (1,\ 0,\ 6).$$

Найдем длину вектора $\vec{c}$ $|\vec{c}| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (6)^2} = \sqrt{37}$, тогда орт

$$\vec{c}^{\,0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{0}{\sqrt{37}}, \frac{6}{\sqrt{37}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{37}}, 0, \frac{6}{\sqrt{37}}\right).$$

Пример. Даны векторы $\vec{a} = \{4,-1,5\}$; $\vec{b} = \{0,-2,1\}$ и $\vec{c} = \{-1,7,3\}$. Найти координаты вектора $2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$.

Решение.

$$2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c} = 2\{4,-1,5\} - 5\{0,-2,1\} + \{-1,7,3\} =$$
$$= \{8,-2,10\} - \{0,-10,5\} + \{-1,7,3\} = \{7,15,8\}.$$

Пример. Проверить, лежат ли точки $A(4,4,3)$, $B(0,-2,-3)$ и $C(8,10,9)$ на одной прямой.

Решение. Три точки будут лежать на одной прямой в том случае, когда векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарные. Найдем координаты векторов:

$\overline{AB} = \{0-4,-2-4,-3-3\} = \{-4,-6,-6\}$;

$\overline{AC} = \{8-4,10-4,9-3\} = \{4,6,6\}$.

Координаты найденных векторов пропорциональны: $\frac{-4}{4} = \frac{-6}{6} = \frac{-6}{6} = -1$, т.е. $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{AC}$, а значит, точки A, B, C лежат на одной прямой.

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{-2,3,6\}$.

Решение. Найдем длину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = 7$. Следовательно, $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{7}$; $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{3}{7}$; $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{6}{7}$.

Пример. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют с осью l соответственно углы $\frac{2\pi}{3}$ и π. Найти проекцию вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$ на ось l, если $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 1$.

Решение.

$$np_l\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) = np_l 2\vec{a} + np_l 3\vec{b} = 2np_l\vec{a} + 3np_l\vec{b} =$$
$$= \{8,-2,10\} - \{0,-10,5\} + \{-1,7,3\} = \{7,15,8\}.$$

Задания для решения в аудитории

1. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, если его начало совпадает с точкой $M\,(1;\,2;\,-3)$.

2. В треугольнике OAB даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, где M – середина стороны AB.

3. Даны точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(4; -2; -1)$ и $D(5; -4; 2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну сторону или в противоположные.

4. Даны модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45^0$; $\beta = 60^0$; $\gamma = 120^0$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

5. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}\{12; -15; -16\}$.
6. Найти орт вектора $\vec{a} = \{3;\ 4;\ -12\}$.
7. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \{4, \alpha, -3\}$ и $\vec{b} = \{\beta, 1, -1\}$ коллинеарны?
8. По заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы: а) $\vec{b} - \vec{a}$; б) $2\vec{a} - \vec{b}$; в) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; г) $\dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{3}$.

9. В параллелограмме $ABCD$ даны стороны $\overline{AB} = \vec{b}$; $\overline{AD} = \vec{d}$. Выразить через $\vec{b}$ и $\vec{d}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ и $\overline{DB}$.

Ответы.

1. $N(4,1,1)$. **4.** $(\sqrt{2}, 1, -2)$. **5.** $\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$; $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$; $\cos\gamma = -\dfrac{16}{25}$.
6. $\vec{a} = \left(\dfrac{6}{7}, -\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$. **7.** $\alpha = 3$; $\beta = 4/3$. **9.** $\overline{BC} = \vec{d}$; $\overline{CB} = -\vec{d}$; $\overline{CD} = -\vec{b}$;

$\overline{AC} = \vec{b} + \vec{d}$; $\overline{BD} = \vec{d} - \vec{b}$; $\overline{DB} = \vec{b} - \vec{d}$.

Индивидуальные задания

Даны точки *A, B* и *C*. Разложить вектор $\vec{a}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Найти длину, направляющие косинусы и орт вектора $\vec{a}$.

1. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
2. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.
3. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.
4. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1; 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$.
5. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
6. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.
7. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
8. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$.
9. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$.
10. $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(0;\ 1;\ 5)$; $\vec{a} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.

11. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

12. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

13. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

14. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

15. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

16. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

17. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

18. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.

19. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

20. $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

21. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

22. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

23. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

24. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

25. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

26. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

27. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

28. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.

29. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

30. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$; $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

3.2. Нелинейные операции над векторами

3.2.1. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними (рис. 3.7).

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a,b)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$.

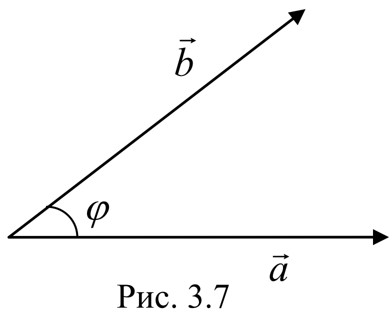

Рис. 3.7

Если заданы векторы $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Тогда из определения скалярного произведения следует

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительное);

2) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ (сочетательное относительно числового множителя);

3) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (распределительное относительно суммы векторов);

4) $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$;

5) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Физический смысл скалярного произведения: если вектор $\vec{F}$ представляет силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа A этой силы определяется равенством $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$.

Геометрические приложения:

1. Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$.

2. Проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$: $np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$; $\left|\vec{b}\right| = 3$; $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Решение.

$$(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} =$$
$$= 10|\vec{a}|^2 - 3\left|\vec{b}\right|^2 = 40 - 27 = 13,$$

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$; $\vec{b} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right|^2 = 9$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}; \vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Решение. По условию задачи $\vec{a}$ = (1, 2, 3); $\vec{b}$ = (6, 4, – 2). Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

Откуда по формуле

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 6$; $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

Решение.

$(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b}) = 15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} =$

$= 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 36 =$

$= 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

Пример. Найти, при каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

Решение. По условию $\vec{a}$ = (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, –3, –4). Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1.$$

Пример. На материальную точку действуют силы $\vec{f}_1 = -\vec{j}$; $\vec{f}_2 = -\vec{i}$; $\vec{f}_3 = -\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2,-1,0)$ в положение $B(4,1,-1)$.

Решение. Найдем силу $\vec{R}$ и вектор перемещения:

$$\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{S} = \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Тогда искомая работа $A = (\vec{R}, \vec{S}) = -2 - 2 + 1 = -3$.

Пример. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 7\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти $\vec{a}\cdot(\vec{a} - 2\vec{b})$.

Решение. Найдем координаты вектора:

$$\vec{a}-2\vec{b}=\{4,-3,1\}-\ 2\{7,5,-3\}=\{-10,-13,7\}.$$

Тогда

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=4\cdot(-10)-3\cdot(-13)+1\cdot 7=-40+39+7=6.$$

Пример. Найти проекцию вектора $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

Решение. Проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ найдем по формуле

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{4-1+6}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{9}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

3.2.2. Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением $\vec{a}\times\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (рис. 3.8), который:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

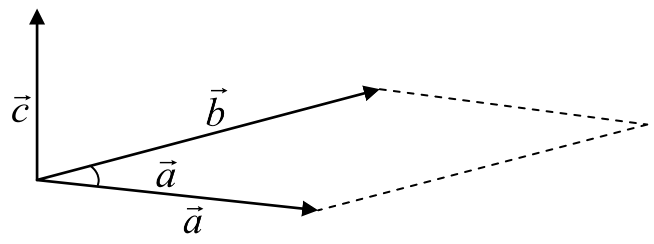

Рис. 3.8

Если заданы векторы $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

3) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4) $a \parallel b \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, т.е. векторы параллельны;

5) если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Геометрические приложения:

1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|;$$

2) площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|.$$

Физический смысл векторного произведения: если A – неподвижная точка, B – точка приложения силы $\vec{F}$, то момент силы $\vec{F}$ относительно точки A равен векторному произведению

$$M_A = \overline{AB} \times \vec{F}.$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решение. По условию задачи $\vec{a}$ = (2, 5, 1) и $\vec{b}$ = (1, 2, –3). Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3),C(0, 1, 0).

Решение. Найдём координаты векторов, выходящих из одной вершины A:

$$\overrightarrow{AC} = (0-2;1-2;0-2) = (-2;-1;-2), \overrightarrow{AB} = (4-2;0-2;3-2) = (2;-2;1).$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, равна

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|.$$

Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(-1-4) - \vec{j}(-2+4) + \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Тогда модуль найденного векторного произведения

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$$

Следовательно, $S_{\Delta} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (кв.ед.).

Пример. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $3\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$; $\left|\vec{b}\right| = 3$; $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Площадь треугольника определяем по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|(3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b})\right|.$$

После упрощения выражение примет вид

$$(3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + 9\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$$
$$= 9\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} = 8(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Тогда $S = \dfrac{1}{2}\left|8(\vec{a} \times \vec{b})\right| = 4|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\dfrac{\pi}{3} = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ (кв. ед.).

3.2.3. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Если заданы векторы

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$; $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$; $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;

2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

3) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$;

4) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Геометрические приложения:

1. Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

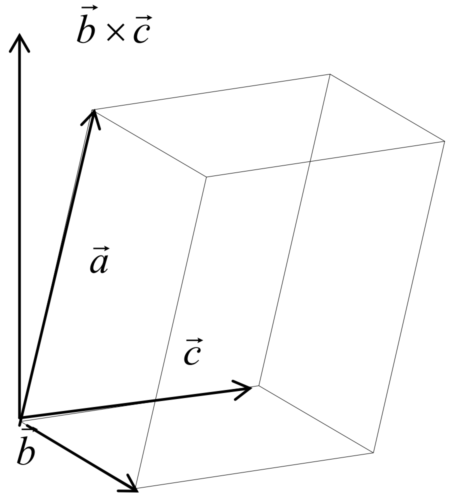

Рис. 3.9

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| \text{ (рис. 3.9).}$$

2. Объём треугольной пирамиды, построенной на $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Пример. Доказать, что точки $A(5; 7; 2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1),\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2),\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2).$$

Если точки лежат в одной плоскости, то смешанное произведение полученных векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны. Следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$.

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4),\overrightarrow{BD}=(1;4;-3),\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2).$$

Объем пирамиды.

$$V=\frac{1}{6}=\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$$

$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(\text{куб.ед}).$$

С другой стороны, объём пирамиды можно найти по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H.$$

Тогда $V=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot H=\frac{1}{6}\left|\overline{BD}\times\overline{BC}\right|\cdot H$. Отсюда длина высоты

$$H=\frac{6V}{\left|\overline{BD}\times\overline{BC}\right|}.$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-8-3)-\vec{j}\,(-2+12)+\vec{k}\,(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

Тогда площадь грани равна

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}\,.$$

$S_{осн}=\sqrt{510}/2$ (кв. ед.), значит, длина высоты

$$H=\frac{6V}{\left|\overline{BD}\times\overline{BC}\right|}=\frac{120}{\sqrt{510}}=\frac{4\sqrt{510}}{17}\text{(ед.)}.$$

Задания для решения в аудитории

1. Найти длины сторон и величины углов ΔABC, если

$$A(1;1;-1),\ B(2;3;1),\ C(3;2;1).$$

2. Найти работу равнодействующей сил

$$\vec{f}_1=(1;-1;3),\quad \vec{f}_2=(2;1;3)$$

при перемещении её точки приложения из начала координат в точку $M\,(2;-1;0)$.

3. При каком значении α векторы

$$\vec{a}=(\alpha;-5;3);\ \vec{b}=(1;2;-\alpha)$$

перпендикулярны?

4. Дано: $|\vec{a}|=3;\quad |\vec{b}|=4;\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=240^\circ$. Вычислить:

а) $\vec{a}^{\,2}$; б) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; в) $(a+b)^2$.

5. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;-4);\ \vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; в) $(a-b)^2$; г) $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$; д) $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$; е) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$; ж) $\text{пр}_{\vec{a}-\vec{b}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$; з) $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

6. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\{4,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=-84$.

7. Упростить выражения: а) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{c}-\vec{b})$;

б) $3\vec{i}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+2\vec{j}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+7\vec{k}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)$.

8. Дано: $\left|\vec{a}\right|=5;\quad \left|\vec{b}\right|=5;\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=45^\circ$. Найти векторное произведение

$$(\vec{a}-2\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b}).$$

9. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;2);\ \vec{b}=(1;2;-1)$. Найти векторные произведения:

а) $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{b}$; б) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$.

10. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, где $\left|\vec{a}\right|=2;\quad \left|\vec{b}\right|=6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=150^\circ$.

11. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины B треугольника с вершинами $A(2;-4;21),\ B(1;-6;3),\ C(2;3;-2)$.

12. Сила $\vec{F}=\{-1,2,3\}$ приложена к точке $A(0,1,-1)$. Определить величину момента этой силы относительно точки $B(0,-3,2)$.

13. Доказать, что точки $A(3;5;1),\ B(2;4;7),\ C(1;5;3),D(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.

14. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

15. Даны вершины пирамиды $A(5;1;-4),\ B(1;2;-1),\ C(3;3;-4),D(2;2;2)$. Найти объём пирамиды и длину высоты, опущенной на грань ABC.

16. При каком λ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут компланарны, если они равны соответственно $\vec{a}=(\lambda;3;1);\ \vec{b}=(5;-1;2);\ \vec{c}=(-1;5;4)$.

Ответы.

1. 8/9; $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$; $\sqrt{2},3,3$. **2.** A=6. **3.** α= –5. **4.** 9,–61,13. **5**. а)22; б) –200; в)41; г) $\sqrt{105}$; д) $\dfrac{22}{6}$; е) $\dfrac{22}{7}$; ж) $\dfrac{55}{\sqrt{41}}$; з) $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{11}{21}$. **6.** $\{-16,-4,8\}$. **7.** а) $5\sqrt{6}/3$; б) $45/7$. **8.** $100\sqrt{2}$. **9.** а) $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{b}=(-9;15;21)$; б) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)=(21;-35;-49)$. **10.** 48. **11.** $H=\sqrt{\dfrac{66}{65}}$. **12.** $\sqrt{349}$.

14. 1 ед^3. **15.** V=4; $H=\dfrac{4}{\sqrt{3}}S=3\sqrt{3}$. **16.** λ=–3.

Индивидуальные задания

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Требуется найти:

1) длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;

2) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;

4) площадь грани ABC;

5) объем пирамиды $ABCD$.

1.	$A(-2;\ 0;\ 4)$;	$B(4;\ -3;\ -2)$;	$C(7;-2;\ 2)$;	$D(-1;\ 2;\ 6)$.
2.	$A(0;\ -1;\ 1)$;	$B(6;\ -4;\ -5)$;	$C(9;-3;\ -1)$;	$D(1;\ 1;\ 3)$.
3.	$A(-5;\ 1;\ 3)$;	$B(1\ -2;\ -3)$;	$C(4;-1;\ 1)$;	$D(-4;\ 3;\ 5)$.
4.	$A(-1;\ -3;\ 0)$;	$B(5;\ -6;\ -6)$;	$C(8;-5;\ -2)$;	$\mathrm{D}(0;\ -1;\ 2)$.
5.	$A(1;\ 2;\ 5)$;	$B(7;\ -1;\ -1)$;	$C(10;0;\ 3)$;	$D(2;\ 4;\ 7)$.
6.	$A(-3;\ -2;-1)$;	$B(3;\ -1;\ -1)$;	$C(6;-4;\ -3)$;	$D(-2;\ 0;\ 1)$.
7.	$A(2;\ 3;\ 2)$;	$B(8;\ 0;\ -4)$;	$C(11;1;\ 0)$;	$D(3;\ 5;\ 4)$.
8.	$A(-4;\ 4;\ -2)$;	$B(2;\ 1;\ -8)$;	$C(5;2;\ -4)$;	$D(-3;\ 6;\ 0)$.
9.	$A(3;\ 5;-3)$;	$B(9;\ 2;\ -9)$;	$C(12;3;\ -5)$;	$D(4;\ 7;\ -1)$.
10.	$A(4;\ -4;\ 1)$;	$B(10;\ -7;\ -5)$;	$C(13;-6;\ -1)$;	$D(5;\ -2;\ 3)$.
11.	$A(4;\ 0;\ 4)$;	$B(0;\ 5;\ 0)$;	$C(0;0;\ 6)$;	$D(1;\ 3;\ -1)$.
12.	$A(-1;\ -3;\ 4)$;	$B(2;\ 3;\ -4)$;	$C(-3;1;\ -2)$;	$D(4;\ -1;\ 3)$.
13.	$A(0;\ 0;\ 0)$;	$B(2;\ 3;\ -1)$;	$C(-2;4;\ 5)$;	$D(3;\ -1;\ 4)$.
14.	$A(3;\ 2;\ -4)$;	$B(2;\ -5;\ 3)$;	$C(-5;6;\ -1)$;	$D(5;\ 2;\ 4)$.

15. $A(6;\ 0;\ 1)$; $B(-6;\ 2;\ -3)$; $C(2;\ 2;\ 4)$; $D(3;\ 4;\ -2)$.

16. $A(-4;\ 1;\ -4)$; $B(0;\ -5;\ 0)$; $C(0;\ 0;\ -2)$; $D(-1;\ 3;\ 1)$.

17. $A(2;\ 3;\ 5)$; $B(3;\ -2;\ 6)$; $C(2;\ 2;\ -5)$; $D(6;\ 3;\ -3)$.

18. $A(5;\ -2;\ -1)$; $B(3;\ 3;\ 4)$; $C(3;\ -1;\ -2)$; $D(0;\ -1;\ 2)$.

19. $A(3;\ -1;\ -2)$; $B(5;\ -2;\ -1)$; $C(0;\ -1;\ 2)$; $D(3;\ 3;\ 4)$.

20. $A(5;\ 2;\ 4)$; $B(-5;\ 6;\ -1)$; $C(3;\ 2;\ -4)$; $D(2;\ -5;\ 3)$.

21. $A(4;\ 0;\ 0)$; $B(-2;\ 1;\ 2)$; $C(1;\ 3;\ 2)$; $D(3;\ 2;\ 7)$.

22. $A(4;\ 2;\ 5)$; $B(0;\ 7;\ 1)$; $C(0;\ 2;\ 7)$; $D(1;\ 5;\ 0)$.

23. $A(4;\ 4;\ 10)$; $B(7;\ 10;\ 2)$; $C(2;\ 8;\ 4)$; $D(9;\ 6;\ 9)$.

24. $A(4;\ 6;\ 5)$; $B(6;\ 9;\ 4)$; $C(2;\ 10;\ 10)$; $D(7;\ 5;\ 9)$.

25. $A(3;\ 5;\ 4)$; $B(8;\ 7;\ 4)$; $C(5;\ 10;\ 4)$; $D(4;\ 7;\ 8)$.

26. $A(10;\ 6;\ 6)$; $B(-2;\ 8;\ 2)$; $C(6;\ 8;\ 9)$; $D(7;\ 10;\ 3)$.

27. $A(1;\ 8;\ 2)$; $B(5;\ 2;\ 6)$; $C(6;\ 8;\ 9)$; $D(4;\ 10;\ 9)$.

28. $A(6;\ 6;\ 5)$; $B(4;\ 9;\ 5)$; $C(4;\ 6;\ 11)$; $D(6;\ 9;\ 3)$.

29. $A(7;\ 2;\ 2)$; $B(5;\ 7;\ 7)$; $C(5;\ 3;\ 1)$; $D(2;\ 3;\ 7)$.

30. $A(8;\ 6;\ 4)$; $B(10;\ 5;\ 5)$; $C(5;\ 6;\ 8)$; $D(8;\ 10;\ 7)$.

Контрольная работа по теме «Элементы векторной алгебры»

Вариант № 1

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;2;3)$; $\vec{a}_2=(1;2;3)$; $\vec{a}_3=(1;1;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(3;0;-2)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(1;-2;5)$ и $\vec{b}=(3;0;-1)$, если $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$; $\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}+5\vec{q}$, если $|p|=2$; $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/6$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;-2;3)$, $B(2;-3;2)$, $C(-1;4;2)$, $D(-3;2;1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(-1;3;4)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 2

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;1;-1)$; $\vec{a}_2=(2;-3;1)$; $\vec{a}_3=(-1;-2;-4)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(8;-1;9)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(3;4;-1)$ и $\vec{b}=(2;-1;1)$, если $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$; $\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=4\vec{p}+2\vec{q}\,\vec{a}$ и $\vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}$, если $|p|=2$; $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;2;3)$, $B(-2;3;4)$, $C(-5;1;1)$, $D(1;3;-4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(1;-2;3)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 3

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(1;2;0)$; $\vec{a}_2=(0;-3;0)$; $\vec{a}_3=(2;1;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(5;-6;3)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(-2;-3;-2)$ и $\vec{b}=(1;0;5)$, если $\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b}$; $\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=-2\vec{p}+3\vec{q}$ $\vec{a}$ и $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, если $|p|=3$; $|q|=1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;2;-3)$, $B(-3;2;1)$, $C(4;5;6)$, $D(6;5;4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(1;-3;4)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 4

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(3;3;1)$; $\vec{a}_2=(2;-2;1)$; $\vec{a}_3=(2;1;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(1;0;5)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(-1;4;2)$ и $\vec{b}=(3;-2;6)$, если $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{c}_2=-6\vec{a}+3\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если $|p|=4$; $|q|=2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $4\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;-3;1)$, $B(3;2;1)$, $C(1;2;3)$, $D(-1;2;4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(2;-3;4)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 5

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;1;1)$; $\vec{a}_2=(0;2;2)$; $\vec{a}_3=(-2;3;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(1;2;5)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (5;0;-1)$ и $\vec{b} = (7;2;3)$, если $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{c}_2 = -6\vec{a} + 3\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = -3\vec{p} + 2\vec{q}$, если $|p| = 2$; $|q| = 3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $5\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(-2;3;1)$, $B(1;3;-1)$, $C(2;3;4)$, $D(-4;3;2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (-2;3;4)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 6

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (2;0;1)$; $\vec{a}_2 = (1;1;-2)$; $\vec{a}_3 = (-1;5;2)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (1;3;4)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (0;3;-2)$ и $\vec{b} = (1;-2;1)$, если $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = -3\vec{p} + \vec{q}$, если $|p| = 2$; $|q| = 3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/6$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;3;-3)$, $D(-3;1;-3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (-3;4;5)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 7

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (2;1;-1)$; $\vec{a}_2 = (5;-1;2)$; $\vec{a}_3 = (1;2;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (-5;2;11)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (-2;7;-1)$ и $\vec{b} = (-3;5;2)$, если $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, если $|p| = 1$; $|q| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;3;5)$, $B(-2;3;4)$, $C(-3;4;5)$, $D(1;1;1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (2;5;4)$, приложенной к точке *A*, при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 8

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (3;2;1)$; $\vec{a}_2 = (2;5;3)$; $\vec{a}_3 = (3;4;2)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (3;1;0)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (3;7;0)$ и $\vec{b} = (1;-3;4)$, если $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = -2\vec{a} + \vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, если $|p| = 2$; $|q| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;1;3)$, $B(-3;2;1)$, $C(2;5;6)$, $D(-6;4;5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (1;2;3)$, приложенной к точке *A*, при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 9

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (1;-2;3)$; $\vec{a}_2 = (2;1;4)$; $\vec{a}_3 = (3;1;-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (10;5;2)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (-1;2;-1)$ и $\vec{b} = (2;-7;1)$, если $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = -3\vec{a} + \vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$, если $|p| = 2$; $|q| = 1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;-2;3)$, $B(1;2;3)$, $C(-3;2;1)$, $D(3;2;-4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}=(3;-4;6)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 10
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(0;2;-3)$; $\vec{a}_2=(5;-1;4)$; $\vec{a}_3=(2;1;-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(0;5;5)$ в этом базисе.
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(7;9;-2)$ и $\vec{b}=(5;4;3)$, если $\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{c}_2=-\vec{a}+4\vec{b}$?
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}-4\vec{q}$, если $|p|=3$; $|q|=2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(3;1;-3)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$, $D(-1;0;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}=(1;-7;3)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 11
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(3;4;5)$; $\vec{a}_2=(-3;-5;-6)$; $\vec{a}_3=(2;2;4)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(2;1;3)$ в этом базисе.
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(5;0;-2)$ и $\vec{b}=(6;4;3)$, если $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$; $\vec{c}_2=-10\vec{a}+6\vec{b}$?
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=-2\vec{p}+3\vec{q}$, если $|p|=2$; $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $3\pi/4$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(3;4;1)$, $B(2;-3;4)$, $C(1;2;2)$, $D(-2;3;4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(2;-3;4)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант №12

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(1;2;3)$; $\vec{a}_2=(2;-1;1)$; $\vec{a}_3=(-3;4;-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(0;5;2)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(8;3;-1)$ и $\vec{b}=(4;1;3)$, если $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{c}_2=-4\vec{a}+2\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, если $|p|=3$; $|q|=4$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;3;-4)$, $D(-4;2;-3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(-3;4;-5)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 13

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;5;2)$; $\vec{a}_2=(1;1;1)$; $\vec{a}_3=(1;3;2)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(2;14;5)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(3;-1;6)$ и $\vec{b}=(5;7;10)$, если $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$; $\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=2\vec{p}+3\vec{q}$, если $|p|=2$; $|q|=1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $5\pi/6$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(3;2;1)$, $B(-1;2;-3)$, $C(4;2;-2)$, $D(1;2;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(1;-5;4)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 14

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;3;-2)$; $\vec{a}_2=(-1;-1;1)$; $\vec{a}_3=(4;1;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(15;8;0)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(1;-2;4)$ и $\vec{b}=(7;3;5)$, если $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$; $\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b}=-4\vec{p}+5\vec{q}$, если $|p|=2$; $|q|=4$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;1;4)$, $B(-4;2;1)$, $C(3;-2;6)$, $D(6;-2;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(3;-5;7)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 15

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(1;1;4)$; $\vec{a}_2=(1;2;4)$; $\vec{a}_3=(1;-1;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(1;-5;2)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(3;7;0)$ и $\vec{b}=(4;6;-1)$, если $\vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}$; $\vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-4\vec{q}$, если $|p|=3$; $|q|=2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;-3;4)$, $B(4;-3;2)$, $C(1;2;3)$, $D(-3;2;1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(1;-2;3)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 16

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(3;2;4)$; $\vec{a}_2=(2;4;-3)$; $\vec{a}_3=(-4;-5;2)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(8;11;1)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(2;-1;4)$ и $\vec{b}=(3;-7;-6)$, если $\vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b}$; $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, если $|p|=3$; $|q|=4$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/6$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-4;2;-3)$, $D(-3;4;-3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(-4;4;-3)$, приложенной к точке *A*, при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 17

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;1;3)$; $\vec{a}_2=(-4;-2;-1)$; $\vec{a}_3=(3;4;5)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(1;3;2)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(5;-1;-2)$ и $\vec{b}=(6;0;7)$, если $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$; $\vec{c}_2=-6\vec{a}+4\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=2\vec{p}+4\vec{q}$, если $|p|=2$; $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(3;4;5)$, $B(5;4;3)$, $C(-1;-3;1)$, $D(1;-2;4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(7;-3;4)$, приложенной к точке *A*, при перемещении ее в точку *B*. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 18

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;3;1)$; $\vec{a}_2=(-1;2;-2)$; $\vec{a}_3=(1;2;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(2;-2;1)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(-9;5;3)$ и $\vec{b}=(7;1;-2)$, если $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-5\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, если $|p|=4$; $|q|=4$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;5;6)$, $B(6;5;4)$, $C(-1;-2;-3)$, $D(1;0;6)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F} = (2;4;-5)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 19
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (1;2;1)$; $\vec{a}_2 = (2;-1;3)$; $\vec{a}_3 = (3;-1;4)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (5;-1;6)$ в этом базисе.
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (4;2;9)$ и $\vec{b} = (0;-1;3)$, если $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 4\vec{a} - 3\vec{b}$?
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = -4\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, если $|p| = 3$; $|q| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $4\pi/3$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(2;4;6)$, $B(6;4;-2)$, $C(1;-1;0)$, $D(0;2;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F} = (2;-4;7)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 20
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (2;1;7)$; $\vec{a}_2 = (1;-2;1)$; $\vec{a}_3 = (-1;2;-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (5;-5;10)$ в этом базисе.
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (2;-1;6)$ и $\vec{b} = (-1;3;8)$, если $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$?
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 4\vec{q}$, если $|p| = 3$; $|q| = 1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $2\pi/3$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(2;-1;-1)$, $B(0;2;-3)$, $C(-3;2;0)$, $D(0;0;1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (1;-2;4)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 21

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (3;1;4)4\ \vec{a}_2 = (2;1;-1)$; $\vec{a}_3 = (1;-1;-5)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (5;0;3)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (5;0;8)$ и $\vec{b} = (-3;1;7)$, если $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 4\vec{b}$; $\vec{c}_2 = -9\vec{a} + 12\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$ и $\vec{b} = -3\vec{p} + \vec{q}$, если $|p| = 4$; $|q| = 1$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $3\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(-2;1;0)$, $B(-4;1;3)$, $C(3;1;-4)$, $D(0;0;0)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (-2;0;3)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 22

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (1;2;1)$; $\vec{a}_2 = (1;3;-2)$; $\vec{a}_3 = (-2;1;-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x} = (1;0;7)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a} = (-1;3;4)$ и $\vec{b} = (2;-1;0)$, если $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = -3\vec{a} + \vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, если $|p| = 5$; $|q| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-1;-2;-3)$, $D(0;0;0)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F} = (1;5;-6)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 23

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(4;1;-2)$; $\vec{a}_2=(2;-3;0)$; $\vec{a}_3=(3;-1;-2)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(7;-1;-3)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(1;4;-2)$ и $\vec{b}=(1;1;-1)$, если $\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}+2\vec{q}$, если $|p|=2$; $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2;-2;3)$, $B(1;1;-2)$, $C(0;0;-1)$, $D(1;2;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(3;4;1)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 24

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(1;0;1)$; $\vec{a}_2=(1;1;0)$; $\vec{a}_3=(1;2;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(3;-5;1)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(3;5;4)$ и $\vec{b}=(5;9;7)$, если $\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$?

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, если $|p|=3$; $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(0;-4;1)$, $D(1;2;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Найти работу силы $\vec{F}=(2;3;-2)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 25

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;-2;3)$; $\vec{a}_2=(1;-3;1)$; $\vec{a}_3=(-1;0;-1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(3;-1;5)$ в этом базисе.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(1;2;-3)$ и $\vec{b}=(2;-1;-1)$, если $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$; $\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$?
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, если $|p|=1$; $|q|=3$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/4$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(1;-2;3)$, $B(0;2;3)$, $C(-2;3;1)$, $D(-2;1;3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}=(-2;2;3)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Вариант № 26
1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(1;1;1)$; $\vec{a}_2=(0;1;12)$; $\vec{a}_3=(0;0;1)$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{x}=(5;6;-3)$ в этом базисе.
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}=(-1;4;1)$ и $\vec{b}=(1;-2;7)$, если $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$; $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$?
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=4\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=-2\vec{p}+4\vec{q}$, если $|p|=3$; $|q|=4$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/6$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(3;-2;4)$, $B(1;2;-3)$, $C(4;1;2)$, $D(-2;3;4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на основание BC, угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.
5. Найти работу силы $\vec{F}=(4;-3;2)$, приложенной к точке A, при перемещении ее в точку B. Координаты точек следует взять из задания 4.

Теоретические задания по теме «Элементы векторной алгебры»

1. Линейное пространство, примеры.
2. Векторы, проекция вектора на ось, свойства операций над векторами.
3. Скалярное произведение векторов.
4. Векторное произведение векторов.
5. Смешанное произведение векторов.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Плоскость в пространстве

4.1.1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *перпендикулярно вектору* $\vec{N} = \{A, B, C\}$

Покажем, что это уравнение можно привести к виду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Действительно, пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка на искомой плоскости. Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Т.к. вектор $\vec{N}$ – вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0.$$

Вычислив скалярное произведение, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости (рис. 4.1).

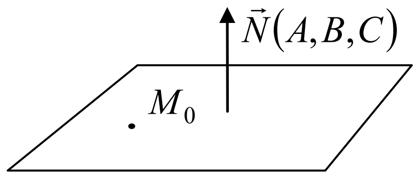

Рис. 4.1

Раскрыв в последнем равенстве скобки, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

4.1.2. Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на (-D)

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

заменив $-\dfrac{D}{A}=a;\ -\dfrac{D}{B}=b;\ -\dfrac{D}{C}=c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где a,b,c – абсцисса, ордината, аппликата точек пересечения плоскостью координатных осей.

4.1.3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$

Рассмотрим точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того чтобы произвольная точка $M(x,y,z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3, необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M}$ были компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M})=0.$$

Найдём эти векторы.

Таким образом,

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\};$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\};$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

4.1.4. Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Определение. Углом между плоскостями называется любой из двух смежных двугранных углов, образованных плоскостями при их пересечении. Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0 или π радиан.

Рассмотрим плоскости

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \text{ и}$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Очевидно, угол между плоскостями

$$\varphi = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right)$$

или

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

4.1.5. Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4.1.6. Примеры решения задач

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 0, -3)$, $M_2(4, -1, 2)$, $M_3(2, -2, 1)$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 4-1 & -1-0 & 2+3 \\ 2-1 & -2-0 & 1+3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, имеем

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, 6(x-1) - 7y - 5(z+3) = 0.$$

Окончательно получим уравнение искомой плоскости $6x - 7y - 5z - 21 = 0$.

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4; -3; 12)$ – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Решение.

$\overrightarrow{OP} = (4;-3;12)$; $\quad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13$;

$\overrightarrow{N} = (\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13})$.

Таким образом, $A = 4/13$; $B = -3/13$; $C = 12/13$. Воспользуемся формулой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\frac{4}{13}(x-4) - \frac{3}{13}(y+3) + \frac{12}{13}(z-12) = 0;$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{16}{13} - \frac{3}{13}y - \frac{9}{13} + \frac{12}{13}z - \frac{144}{13} = 0;$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{169}{13} = 0;$$

$$4x - 3y + 12z - 169 = 0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки $P(2; 0; -1)$ и $Q(1; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.

Решение. Вектор нормали к плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$ $\overrightarrow{N} = (3;2;-1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0;$$

$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0;$$

$$-7x + 14 + 11y + z + 1 = 0;$$

$$-7x + 11y + z + 15 = 0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,1)$ и перпендикулярной плоскостям $3x + y - 5z - 7 = 0$ и $x + 2y - 3z + 8 = 0$.

Решение. Нормальный вектор $\vec{N}$ искомой плоскости будет перпендикулярен нормальным векторам $\vec{N}_1 = \{3,1,-5\}$ и $\vec{N}_2 = \{1,2,-3\}$ заданных плоскостей, поэтому вектор $\vec{N}$ найдем как векторное произведение векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$.

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Далее воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,1)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{7,4,5\}$:

$7(x+1) + 4(y-2) + 5(z-1) = 0$ или $7x + 4y + 5z - 6 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Пример. Дан тетраэдр с вершинами $A(1,-3,4)$, $B(0,-2,-1)$, $C(1,1,-1)$ и $D(1,-3,2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Длину высоты, опущенной из вершины D, найдем как расстояние от точки D до плоскости ABC.

Составим уравнение плоскости ABC, используя уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ 0-1 & -2+3 & -1-4 \\ 1-1 & 1+3 & -1-4 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки: $15(x-1)-5(y+3)-4(z-4)=0 \Rightarrow 15x-5y-4z-14=0$.

Находим расстояние от точки $D(1,-3,2)$ до плоскости $15x-5y-4z-14=0$: $d=\dfrac{|15\cdot 1-5\cdot(-3)-4\cdot 2-14|}{\sqrt{15^2+(-5)^2+(-4)^2}}\approx 0{,}5$.

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1,\,-2,\,3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3,\ -1,\ 2)$, $M_2(4,\ -1,\ -1)$, $M_3(2,\ 0,\ 2)$.

Решение. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1, M_2,\ M_3$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по первой строке:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0$; $3x+3y+z-9+3-2=0$; $3x+3y+z-8=0$.

Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости $3x+3y+z-8=0$.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|3\cdot 1-3\cdot 2+3-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

Пример. Какой угол образуют плоскости $\alpha_1 : x-2y-z+4=0$; $\alpha_2 : 3x+y-2z-7=0$?

Решение. Угол между плоскостями есть угол между нормальными векторами заданных плоскостей. По условию задачи

$$\vec{N}_1=(1;-2;-1), \text{ а } \vec{N}_2=(3;1;-2).$$

Тогда их скалярное произведение равно

$$\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=3-2+2=3.$$

$$\left|\vec{N}_1\right| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}, \quad \left|\vec{N}_2\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

Задания для решения в аудитории

1. Какой угол образуют плоскости

$\alpha_1 : x + y - 1 = 0$; $\alpha_2 : 2x - y + \sqrt{3}z + 1 = 0$?

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, \;\; 4, \;\; -7)$ и перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{2; \;\; -1; \;\; 3\}$.
3. Установить, что плоскости

$x - y - z - 10 = 0$; $4x + 11z + 43 = 0$; $7x - 5y - 31 = 0$

имеют единственную общую точку. Найти её.
4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; \;\; -3; \;\; -7)$ параллельно плоскости

$$2x - 6y - 3z + 5 = 0.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -3; 5)$ и перпендикулярно линии пересечения плоскостей

$$2x + y - 2z + 1 = 0 \text{ и } x + y + z - 5 = 0.$$

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(1;2;3),\ M_2(4;-1;-2),\ M_3(4;0;3).$$

7. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x - 2y + 5z + 12 = 0$ и $6x - 4y + 10z + 45 = 0$.

Ответы.

1. $\varphi = \arccos\frac{1}{4}$. **2.** $2x - y + 3z + 23 = 0$. **3.** $M(3, \;\; -2, \;\; -5)$.

4. $2x-6y-3z-43=0$. **5.** $3x-4y+z-23=0$.
6. $-10x-15y+3z+31=0$. **7.** 1,7.

Индивидуальные задания

Задание 1. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2 и M_3:

1. $M_1(-3;4;-7), M_2(1;5;-4), M_3(1;-2;3), M_0(2;4;5)$.
2. $M_1(3;-2;7), M_2(3;4;-5), M_3(0;-2;4), M_0(-2;1;5)$.
3. $M_1(-3;-1;1), M_2(-9;1;-2), M_3(3;-5;4), M_0(-7;0;-1)$.
4. $M_1(1;-1;1), M_2(-2;0;3), M_3(2;1;-1), M_0(-2;4;2)$.
5. $M_1(1;2;0), M_2(1;-1;2), M_3(0;1;-1), M_0(2;-1;4)$.
6. $M_1(1;0;2), M_2(1;2;-1), M_3(2;-2;1), M_0(-5;-9;1)$.
7. $M_1(1;2;-3), M_2(1;0;1), M_3(-2;-1;6), M_0(3;-2;-9)$.
8. $M_1(3;10;-1), M_2(-2;3;-5), M_3(-6;0;-3), M_0(-6;7;-10)$.
9. $M_1(-1;2;4), M_2(-1;-2;-4), M_3(3;0;-1), M_0(-2;3;5)$.
10. $M_1(0;-3;1), M_2(-4;1;2), M_3(2;-1;5), M_0(-3;4;-5)$.
11. $M_1(1;3;0), M_2(4;-1;2), M_3(3;0;1), M_0(-2;3;5)$.
12. $M_1(-2;-1;-1), M_2(0;3;2), M_3(3;1;1), M_0(-21;20;16)$.
13. $M_1(-3;-5;6), M_2(2;1;-4), M_3(0;-3;-1), M_0(3;6;68)$.
14. $M_1(1;5;-7), M_2(-3;6;3), M_3(-2;7;3), M_0(1;-1;2)$.
15. $M_1(1;-1;2), M_2(2;1;2), M_3(1;1;4), M_0(-3;2;7)$.
16. $M_1(1;3;6), M_2(2;2;1), M_3(-1;0;1), M_0(5;-4;5)$.
17. $M_1(-4;2;6), M_2(2;-6;0), M_3(-10;5;8), M_0(-12;1;8)$.
18. $M_1(7;2;4), M_2(7;-1;-2), M_3(-5;-2;-1), M_0(10;1;8)$.
19. $M_1(2;1;4), M_2(3;5;-2), M_3(-7;-3;2), M_0(-3;1;8)$.
20. $M_1(-1;5;2), M_2(-6;0;3), M_3(3;6;-3), M_0(10;-8;-7)$.
21. $M_1(0;-1;-1), M_2(-2;3;5), M_3(1;-5;-9), M_0(-4;-13;2)$.
22. $M_1(5;2;0), M_2(2;5;0), M_3(1;2;4), M_0(-3;-6;12)$.
23. $M_1(2;-1;-2), M_2(1;2;1), M_3(5;0;-6), M_0(14;-3;7)$.
24. $M_1(-2;0;-4), M_2(-1;7;1), M_3(4;-8;-4), M_0(-6;5;5)$.
25. $M_1(14;4;5), M_2(-3;-3;2), M_3(-2;-6;-3), M_0(-1;-8;7)$.
26. $M_1(1;2;0), M_2(3;0;-3), M_3(2;5;6), M_0(-13;-8;16)$.

27. $M_1(-2;-1;2), M_2(1;2;-1), M_3(3;2;6), M_0(-5;3;7)$.
28. $M_1(1;1;2), M_2(-1;1;3), M_3(-2;1;2), M_0(-3;2;6)$.
29. $M_1(2;3;1), M_2(4;1;2), M_3(6;3;7), M_0(-5;-4;8)$.
30. $M_1(1;1;-1), M_2(2;3;1), M_3(3;2;1), M_0(-3;-7;6)$.

Задание 2. Найти угол между плоскостями:

1. $x-3y+5=0;\ 2x-y+5z-16=0$.
2. $x-3y+z-1=0;\ x+z-1=0$.
3. $4x-5y+3z-1=0;\ x-4y-z+9=0$.
4. $3x-y+2z+15=0; 5x+9y-3z-1=0$.
5. $6x+2y-4z+17=0; 9x+3y-6z-4=0$.
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0;\ x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
7. $3y-z=0;\ 2y+z=0$.
8. $6x+3y-2z=0; x+2y+6z-12=0$.
9. $x+2y+2z-3=0; 16x+12y-15z-1=0$
10. $2x-y+5z+16=0; x+2y+3z+8=0$.
11. $2x+2y+z-1=0; x+z-1=0$.
12. $3x+y+z-4=0; x+2y+3z+8=0$.
13. $3x-2y-2z-16=0; x+y-3z-7=0$.
14. $2x+2y+z+9=0; x-y+3z-1=0$.
15. $x+2y+2z-3=0; 2x-y+2z+5=0$.
16. $3x+2y-3z=0;\ x+y+z-7=0$.
17. $x-3y-2z-8=0;\ x+y-z+3=0$.
18. $3x-2y+3z+23=0;\ y+z+5=0$.
19. $x+y+3z-7=0;\ y+z-1=0$.
20. $x-2y+2z+17=0; x-2y-1=0$.
21. $x+2y-1=0;\ x+y+6=0$.
22. $2x-z+5=0;\ 2x+3y-7=0$.
23. $5x+3y+z-18=0;\ 2y+z-9=0$.
24. $4x+3z-2=0;\ x+2y+2z+5=0$.
25. $x+4y-z+1=0;\ 2x+y+4z-3=0$.
26. $2y+z-9=0;\ x-y+2z-1=0$.
27. $2x-6y+14z-1=0; 5x-15y+35z-3=0$.

28. $x - y + 7z - 1 = 0;\ 2x - 2y - 5 = 0$.
29. $3x - y - 5 = 0;\ 2x + y - 3 = 0$.
30. $x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0; x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0$.

4.2. Прямая в пространстве

4.2.1. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору

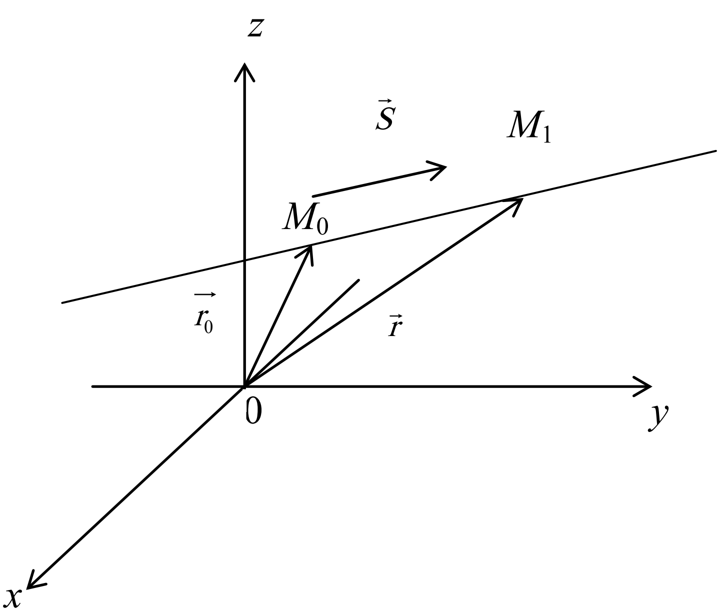

Рис. 4.2

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно вектору $\vec{s} = \{m, n, p\}$(рис. 4.2):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Вектор $\vec{s} = \{m, n, p\}$ называется **направляющим вектором прямой**.

Действительно, на прямой дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, возьмём произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}$.

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарные, то отношение их координат пропорционально, т.е. верно соотношение

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

В силу того, что этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, полученное уравнение является ***каноническим уравнением прямой***.

4.2.2. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно вектору $\vec{s}=\{m,n,p\}$

В каноническом уравнении прямой приравняем полученные отношения координат векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ произвольному параметру *t*, получим

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\ .$$

Выразим координаты произвольной точки через параметр *t,* получим

$$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt; \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

где $t\in(-\infty;+\infty)$.

Эта система равенств позволяет определить любую точку на прямой при соответствующем значении параметра *t* и носит название **параметрического уравнения прямой**.

4.2.3. Общие уравнения прямой

Общие уравнения прямой предполагают её задание как уравнение линии пересечения двух плоскостей с нормалями $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ соответственно.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

4.2.4.Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению прямой

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Подставим в это уравнение координаты точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

4.2.5. Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1\colon\ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_2} = \frac{z - z_1}{p_3};$$

$$l_2\colon\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2};$$

$$\overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ_1 этих прямых связаны соотношением $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения.

Таким образом,

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых: $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \;\Rightarrow\; \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \;\Rightarrow$ $\Rightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

4.2.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

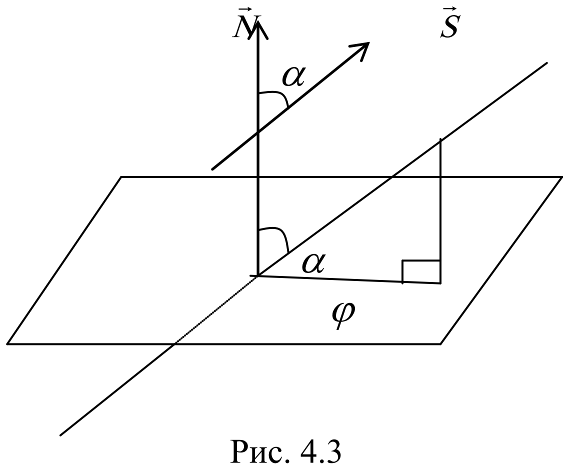

Рис. 4.3

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ находится из соотношения

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Действительно, пусть плоскость задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая – $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Из геометрических соображений (рис. 4.3) видно, что искомый угол $\alpha = 90^0 - \varphi$, где α – угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|} \text{ или } \sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}.$$

В координатной форме $\sin\varphi = \dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$,

что и требовалось доказать.

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$\vec{N}\perp\vec{s} \Rightarrow \vec{N}\cdot\vec{s}=0 \Rightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\vec{N}\,||\,\vec{s} \Rightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Условие принадлежности прямой плоскости:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$$

4.2.7. Примеры решения задач

Пример. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-2,2)$ параллельно оси *Oy*.

Решение. Вектор $\vec{j}=\{0,1,0\}$, расположенный на оси *Oy*, по условию параллелен прямой. Поэтому его можно считать направляющим вектором этой прямой. Составим каноническое уравнение прямой, где $x_0=1$; $y_0=-2$; $z_0=2$; $\vec{s}=\vec{j}=\{0,1,0\}$, т. е. $m=0; n=1$; $p=0$:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}.$$

Для нахождения параметрических уравнений прямой составляем уравнения: $\dfrac{x-1}{0}=t; \dfrac{y+2}{1}=t; \dfrac{z-2}{0}=t \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=1+0\cdot t; \\ y=-2+1\cdot t; \\ z=2+0\cdot t., \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=1; \\ y=-2+t; \\ z=2 \end{cases}$$ – параметрические уравнения прямой,

где $-\infty < t < +\infty$.

Пример. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(1;-2;0)$, $C(-3;2;2)$. Составить канонические уравнение медианы AP.

Решение. точка P делит сторону AC пополам. Поэтому координаты точки P равны полусуммам координат B и C.

$$x_P = \frac{1-3}{2} = -1;\ y_P = \frac{-2+2}{2} = 0;\ z_P = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Следовательно, $P(-1;0;1)$. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точки A и P.

Если прямая ℓ проходит через две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то её уравнение имеет вид

$$\ell: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляя координаты точек A и P, получим
$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{0-3} = \frac{z+1}{1+1}$ или $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{2}$.

Пример. Написать уравнения прямой ℓ, которая проходит через точку $M(1;-2;3)$ параллельно прямой $\ell_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-5}$.

Решение. Так как прямые параллельны ($\ell \parallel \ell_1$), то их направляющие – векторы $\vec{s} \parallel \vec{s_1}$. Это значит, что в качестве направляющего вектора прямой ℓ можно взять вектор $\vec{s_1} = (1,3,-5)$.

Тогда канонические уравнения искомой прямой имеют вид

$$\ell: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}.$$

Пример. Написать уравнение прямой, которая проходит через точки $M_1(1;-3;5)$ и $M_2(0;4;-2)$.

Решение. Если прямая ℓ проходит через две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то её уравнение имеет вид

$$\ell : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Подставляя координаты заданных точек, получим

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+3}{4+3} = \frac{z-5}{-2-5} \qquad \text{или} \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-5}{-7}.$$

Уравнения полученной прямой запишем в параметрической форме. Приравнивая каждое из отношений параметру t, получим

$$\frac{x-1}{-1} = t; \frac{y+3}{7} = t; \frac{z-5}{-7} = t.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x = 1 - t; \\ y = -3 + 7t; \\ z = 5 - 7t, \end{cases}$$

где $-\infty < t < +\infty$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0; \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определим координаты какой-либо точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, лежащей на прямой. Для этого положим в обеих уравнениях $z_0 = 0$.

Тогда

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 = 4; \\ 3x_0 + 2y_0 = 4. \end{cases}$$

Отсюда найдем $x_0 = 2$ и $y_0 = -1$. Таким образом, $M_0(2;-1;0)$. Найдем направляющий вектор прямой $\vec{s}$. Он должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей $\vec{N}_1 = \{1;-2;3\}$ и

$\vec{N}_2 = \{3;2;-5\}$. Следовательно, в качестве вектора $\vec{s}$ берем векторное произведение векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$.

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k}$.

Запишем канонические уравнения:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

Пример. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Решение. Приведем уравнения прямой к параметрическому виду: $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1} = t$; $\quad \dfrac{x-12}{4} = t \Rightarrow x = 12 + 4t$;

$\dfrac{y-9}{3} = t \Rightarrow y = 9 + 3t$; $\dfrac{z-1}{1} = t \Rightarrow z = 1 + t$, т. е. параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 12 + 4t; \\ y = 9 + 3t; \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдем t:

$$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0; t = -3.$$

Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты

$x_0 = 12 + 4(-3) = 0$; $y_0 = 9 + 3(-3) = 0$; $z_0 = 1 - 3 = -2$, т. е. $M(0;\ 0;\ -2)$.

Задания для решения в аудитории

1. Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(-1;0;-5)$, $B(1;2;0)$, и плоскостью $x - 3y + z + 5 = 0$.

2. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} 2x+3y+z-8=0; \\ x-2y+3z+3=0. \end{cases}$$

3. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ с плоскостью $3x+5y-z-2=0$. Вычислить угол между прямой и плоскостью.

4. Вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z}{4}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $A(4,1,-1)$.

Ответы.

1. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{33}\approx 3^\circ$. **2.** $\frac{x-1}{11}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z}{-7}$. **3.** (0,0,–2), $\arcsin 0{,}9$.
4. $\arccos 0{,}04$.

Индивидуальные задания

Задание 1. Написать канонические уравнения прямой:

1. $\begin{cases} 2x-y-3z+1=0; \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z-1=0; \\ 2x-3y+2z-9=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y-z-1=0; \\ 8x+3y-6z-2=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y-z+2=0; \\ 4x-3y+z-1=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+5y-3z-4=0; \\ 4x-3y+2z-9=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+7y-z-8=0; \\ x+2y+z-4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+4y+2z-8=0; \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-4y-3z+3=0; \\ 3x+y+z-5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y-z-1=0; \\ x+2y+z-4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+y+z-5=0; \\ 4x-3y+z-1=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0; \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-3y+2z+2=0; \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-2y+z-4=0; \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+z-2=0; \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0; \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0; \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+5y+2z+11=0; \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0; \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0; \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-y-z-2=0; \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0; \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0; \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0; \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0; \\ x+y+z+10=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0; \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+5y-z-5=0; \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0; \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0; \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x+y+z+2=0; \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0; \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$

Задание 2. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ и $x+2y+3z-14=0$.
2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$ и $x+2y-5z+20=0$.
3. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$ и $x-3y+7z-24=0$.
4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$ и $2x-y+4z=0$.
5. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$ и $3x+y-5z-12=0$.
6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+3y-5z+9=0$.
7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ и $x-2y+5z+17=0$.

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$ и $x-2y+4z-19=0$.

9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-y+3z+23=0$.

10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и $2x-3y-5z-7=0$.

11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и $4x+2y-z-11=0$.

12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$ и $3x-2y-4z-8=0$.

13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и $x+2y-z-2=0$.

14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$ и $5x-y+4z+3=0$.

15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и $x+3y+5z-42=0$.

16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ и $7x+y+4z-47=0$.

17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$ и $2x+3y+7z-52=0$.

18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$ и $3x+4y+7z-16=0$.

19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-5y+4z+24=0$.

20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$ и $x-2y-3z+18=0$.

21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$ и $x+7y+3z+11=0$.

22. $\frac{\mathrm{x}-5}{-1}=\frac{\mathrm{y}+3}{5}=\frac{\mathrm{z}-1}{2}$ и $3x+7y-5z-11=0$.

23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$ и $4x+y-6z-5=0$.

24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$ и $5x+9y+4z-25=0$.

25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$ и $x+4y+13z-23=0$.

26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$ и $3x-2y+5z-3=0$.

27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ и $3x-y+4z=0$.

28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+2y-5z+16=0$.

29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$ и $3x-7y-2z+7=0$.

30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$ и $5x+7y+9z-32=0$.

Контрольная работа по теме «Аналитическая геометрия в пространстве»

Вариант №1

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ и плоскости $x+2y+3z-14=0$.

2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-12, 7, -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3, 4, -7)$, $M_2(1, 5, -4)$, $M_3(-5, -2, 0)$.

4. $\triangle ABC$ задан своими вершинами $A(-3, 0)$, $B(-1, 5)$, $C(1,3)$. Найти уравнения сторон этого треугольника и точки пересечения высоты BD с осями координат.

5. Показать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$; $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$ лежат в одной плоскости и найти уравнение этой плоскости.

Вариант № 2

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$ и плоскости $x+2y-5z+20=0$.

2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.

3. Найти расстояние от точки $M_0(1, -6, -5)$до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(-1,2, -3)$, $M_2(4, -1,0)$, $M_3(2,1, -2)$.

4. ΔABC задан уравнениями сторон y-x–2=0; $2y$–x–2=0; $2y$+x–5=0. Найти координаты вершины треугольника и уравнение одной из его высот (на выбор).

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A (2, –1,1) и прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Вариант №3

1.Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$ и плоскости $x-3y+7z-24=0$.

2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.

3. Найти расстояние от точки M_0(–7, 0, –1) до плоскости, проходящей через точки M_1(–3, –1, 1), M_2 (–9, 1, –2), M_3 (3, –5, 4).

4. Найти уравнения высот треугольника, если известно, что стороны лежат на прямых x–6y+5=0; 5x–2–y–3=0; x+y–9=0.

5. Составить уравнение плоскости, зная, что точка P (2,6, –4) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость, и найти координаты точек пересечения этой плоскости с осями.

Вариант №4

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$ и плоскости $2x-y+4z=0$.

2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.

3. Найти расстояние от точки M_0 (–2,4,2) до плоскости, проходящей через три: точки M_1(1,–1,1) M_2(–2,0,3,) M_3(2,1–1).

4. Даны уравнения сторон AB и BC в ΔABC 3x–2y+1=0; x–y+1=0, и уравнение медианы AM 2x–y–1=0. Составить уравнение третьей стороны.

5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ с плоскостью $x-2y+z-3=0$ и следы этой прямой на координатных плоскостях.

Вариант №5

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$ и плоскости $3x+y-5z-12=0$.

2. Найти угол между плоскостями из заданий 2 и 4.

3. Найти расстояние от точки $M_0(2, -1, 4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(1, -1, 2)$, $M_3(0, 1, -1)$.
4. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $M(3,2)$ на прямую $x - 4y + 5 = 0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой пересечения плоскости $x - 2y + 4z - 3 = 0$ с плоскостью OXZ.

Вариант №6

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскости $x + 3y - 5z + 9 = 0$.
2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-5,-9,1)$до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1, 0, 2)$, $M_2(1, 2, -1)$, $M_3(2, -2, 1)$.
4. Площадь ΔABC равна 3, две его вершины имеют координаты $A(3,1)$, $B(1, 3)$. Определить координаты третьей вершины C, если она лежит на оси OX.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, 1)$ и перпендикулярной к двум плоскостям $2x - z + 1 = 0$ и $y = 0$.

Вариант №7

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и плоскости $x - 2y + 5z + 17 = 0$.
2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.
3. Найти расстояние от точки $M_0(3, -2, -9)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 2, -3)$, $M_2(1, 0, 1)$, $M_3(-2, -1, 6)$.
4. Из точки $A(2, 4)$ падает луч света на ось OX и отразившись от оси проходит через точку $B(8,2)$. Найти уравнения падающего и отражённого лучей.
5. Через линию пересечения плоскостей $6x - y + z = 0$; $5x + 3z - 10 = 0$ провести плоскость, параллельную оси OX.

Вариант №8

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$ и плоскости $x - 2y + 4z - 19 = 0$.

2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.
3. Найти расстояние от точки M_0 (–6, 7, –10) до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3, 10, -1)$, $M_2(-2, 3, -5)$, $M_3(-6,0,-3)$.
4. Даны две вершины треугольника $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка H (1, 2) пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.
5. Найти ортогональную проекцию прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ на плоскость $x - 2y + z - 3 = 0$.

Вариант №9

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости $2x - y + 3z + 23 = 0$.
2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-2, 3, 5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 2, 4)$, M_2 $(-1, -2, -4)$, M_3 $(3, 0, -1)$.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (6, 3) параллельно отрезку CD, C (0, –3), D (3, –2), и найти точки пересечения этой прямой с осями координат.
5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$; $x + 2y + z = 0$.

Вариант №10

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и плоскости $2x - 3y - 5z - 7 = 0$.
2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.
3. Найти расстояние от точки M_0 (–3, 4, –5) до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(0, -3, 1)$, $M_2(-4, 1, 2)$, $M_3(2, -1, 5)$.
4. Найти уравнение сторон ромба, если известны две его вершины A (2, 2), B (7, 1) и уравнение одной диагонали.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OX и точку A (1, 2, –1), и найти угол между этой плоскостью и плоскостью XOY.

Вариант №11

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и плоскости .

2. Найти угол между прямой и плоскостью из задания 1.

3. Найти расстояние от точки $M_0(4, 3, 0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 3, 0)$, M_2 $(4, –1, 2)$, M_3 $(3, 0, 1)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M $(–2, –3)$ и наклонной к оси абсцисс 135^0.

5.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(6, 2, 4)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $3x + y + 3z + 7 = 0$.

Вариант №12

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$ и плоскости $3x – 2y – 4z – 8 = 0$.

2. Найти угол между прямой и плоскостью из задания 1.

3. Найти расстояние от точки M_0 $(–21, 20, –16)$ до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(–2, –1, –1)$, $M_2(0, 3, 2)$, $M_3(3, 1, – 4)$.

4. Составить уравнение медианы ΔABC, проведённой из вершины A, и найти координаты основания перпендикуляра, проведённого из вершины C, если A $(–3, 1)$, $B(4, 2)$ и $C(–5, 21)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки P $(–3, 2, 5)$ на плоскости
$4x+y-3z+13=0;\ x-2y+z-11=0$.

Вариант №13

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и плоскости $x+2y-z-2=0$.

2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.

3. Найти расстояние от точки $M_0(3, 6, 68)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(–3, –5, 6)$, M_2 $(2, 1, –4)$, M_3 $(0, –3, –1)$.

4. Найти координаты точки пересечения медианы ΔABC, если A $(1, 1)$, B $(–3, 2)$, C $(6, 4)$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Вариант №14

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+3}{1}=\frac{x-2}{-5}=\frac{y+2}{3}$ и плоскости $5x-y+4z+3=0$.

2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.

3. Найти расстояние от точки M_0 (2, –10, 8) до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(2,-4,-3)$, $M_2(5,-6,0)$, $M_3(-1,3,-3)$.

4. В трапеции $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а три вершины имеют координаты $A(-2,0)$, $B(2,4)$ и $C(2,7)$. Найти координаты вершины D.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$ перпендикулярно плоскости XOZ.

Вариант № 15

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и плоскости $x+3y+5z-42$.

2. Найти угол между прямой и плоскостью из задания 1.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-3,2,7)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-1,2)$, M_2 (2, 1, 2), M_3 (1, 1, 4).

4. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M (2, 1) на прямую, отсекающую на осях координат отрезки $a=8$; $b=6$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$.

Вариант № 16

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ и плоскости $7x+y+4z-47=0$.

2. Найти угол между плоскостями из задания 1.

3. Найти расстояние от точки M_0 (5, –4, 5) до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1,3,6)$, $M_2(2,2,1)$, $M_3(-1,0,1)$.

4. Даны стороны треугольника AB: $x - y = 0$; BC: $x + y - 2 = 0$; AC : $y = 0$. Найти угол между медианой, проведённой из вершины B, и стороной AB.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $6x + 3y - z - 41 = 0$ с прямыми $\frac{x-1}{6} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-1}$; $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-15}{-1}$.

Вариант № 17

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$ и плоскости $2x + 3y + 7z - 52 = 0$.
2. Найти угол между плоскостью и прямой из задания 1.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-12, 1, 8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-4, 2, 6)$, M_2 $(2, -3, 0)$, M_3 $(-10, 5, 8)$.
4. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки вершины C на AB, и угол между сторонами AB и AC, если A $(-3, 0)$, B $(2, 6)$, C $(4, -2)$.
5. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $x - y - 2z = 0$, перпендикулярной вектору $\vec{a} = (0, 2, -1)$ и проходящей через начало координат.

Вариант № 18

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$ и плоскости $3x + 4y + 7z - 16 = 0$.
2. Найти угол между прямой и плоскостью из задания 1.
3. Найти расстояние от точки M_0 $(10, 1, 8)$ до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(7, 2, 4)$, $M_2(7, -1, -2)$, $M_3(-5, -2, -1)$.
4. Составить уравнение средней линии трапеции и найти точку пересечения её с высотой, опущенной из вершины B, если $A(1, 5)$, $B(9, 4)$, $C(-3, -7)$, $D(-4, 1)$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(6, 2, 1)$ и точку пересечения прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ с плоскостью $2x - y + z - 7 = 0$.

Вариант № 19

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$ и плоскости $2x-5y+4z+24=0$.

2. Найти угол между прямой и плоскостью из задания 1.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-3, 1, 8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2, 1, 4)$, $M_2(3, 5, -2)$, $M_3(-7, -3, 2)$.

4. Найти острый угол, который образует высота ΔABC, опущенная из вершины C со стороной AC, координаты основания этой высоты, если $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$, $C(-8, -12)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+7}{1}$; $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$.

Вариант № 20

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$ и плоскости $x-2y-3z+18=0$.

2. Найти угол между прямой и плоскостью из задания 1.

3. Найти расстояние от точки $M_0(10, -8, -7)$ до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(-1, -5, 2)$, $M_2(-6, 0, -3)$, $M_3(3, 6, -3)$.

4. Даны три вершины параллелограмма $O(0, 0)$, $A(2, 4)$, $C(8, -2)$ и точка пересечения диагоналей $M(5, 1)$. Найти четвёртую вершину и уравнение диагоналей.

5. Через прямую $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ провести плоскость, параллельную прямой линии $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{3}$.

Вариант № 21

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$ и плоскости $x+7y+3z+11=0$.

2. Найти угол между плоскостями из заданий 1,2.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-4, -13, 6)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0, -1, -1)$, $M_2(-2, 3, 5)$, $M_3(1, -5, -9)$.

4. Составить уравнение двух сторон параллелограмма и найти один из острых углов, если две другие стороны имеют уравнения $2x + 3y - 12 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$ и $M\,(2, -2)$ – одна из вершин параллелограмма.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$; $\begin{cases} x + y - z = 0; \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$ Доказать их параллельность.

Вариант № 22

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$ и плоскости $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.

2. Найти угол между прямой и плоскостью из задания 1.

3. Найти расстояние от точки M_0 (–3, –6, –8) до плоскости, проходящей через три точки: $M_1\,(5, 2, 0)$, $M_2\,(2, 5, 0)$, $M_3\,(1, 2, 4)$.

4. Найти координаты точки D, лежащей на прямой $2y - 3x - 3 = 0$ так, чтобы четырехугольник $ABCD$, где $A(2, -3)$, $C(6, -7)$ – противоположные вершины, был ромбом.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$ параллельно прямым $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{6}$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{9}$.

Вариант № 23

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$ и плоскости $4x + y - 6z - 5 = 0$.

2. Найти угол между плоскостями из заданий 1, 2.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-14, -3, 7)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -1, -2)$, $M_2\,(1, 2, 1)$, $M_3\,(5, 0, -6)$.

4. Найти угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины B, если вершины находятся в точках $A(-3, 1)$, $B(7, 8)$, $C(5, -3)$.

5. Составить уравнение плоскости, содержащей пересекающиеся прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$; $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0; \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$

Вариант № 24

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$ и плоскости $5x + 9y + 4z - 25 = 0$.

2. Найти угол между плоскостями из заданий 1, 2.
3. Найти расстояние от точки M_0 (–6, 5, 5) до плоскости, проходящей через три точки: M_1 (–2, 0, –4), M_2 (–1, 7, 1), M_3 (4, –8, –4).
4. Найти координаты точки пересечения высоты, опущенной из вершины A, и медианы, проведённой из вершины B, если $A(-1, 6)$, $B(5, -4)$, $C(-3, -2)$.
5. Составить уравнение перпендикуляра к плоскости $x + 3y - 4z = 0$, проходящей через точку (2, –1, 3).

Вариант № 25

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ и плоскости $x + 4y + 13z - 23 = 0$.
2. Найти угол между плоскостями из заданий 1, 2.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-1, -8, 7)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(14, 4, 5)$, M_2 (–5, –3, 2), M_3 (–2, –6, –3).
4. Найти координаты точек пересечения перпендикуляра, проведённого из точки $M(1, -2)$ с каждой из параллельных прямых: $5x - 2y = 13$; $10x - 4y = 25$.
5. Найти координаты основания перпендикуляра к плоскости $x + 3y - 4z - 13 = 0$ проходящего через точку (2, –1, 3).

Вариант № 26

1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$ и плоскости $3x - 2y + 5z - 3 = 0$.
2. Найти угол между плоскостями из заданий 1, 2.
3. Найти расстояние от точки M_0 (–13, –8, 16) до плоскости, проходящей через три точки: M_1 (1, 2, 0), M_2 (3, 0, –3), M_3 (5, 2, 6).
4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(3, -5)$ и отсекает на координатных осях равные отрезки. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -3, 5)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 1 = 0; \\ z + y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

Теоретические задания по теме «Элементы аналитической геометрии»

1. Общее уравнение плоскости в пространстве.
2. Угол между двумя плоскостями, расстояние от точки до плоскости.
3. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
4. Уравнение прямой в пространстве, угол между двумя прямыми.
5. Уравнение прямой как пересечение двух плоскостей, уравнение прямой, проходящей через две точки.

5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

5.1. Предел функции

5.1.1. Основные определения

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

Определение (предел функции в точке $x = a$ по Коши)**.** Число A называется **пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\sigma > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \sigma,$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде: если $a - \sigma < x < a + \sigma,\ x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ (рис. 5.1).

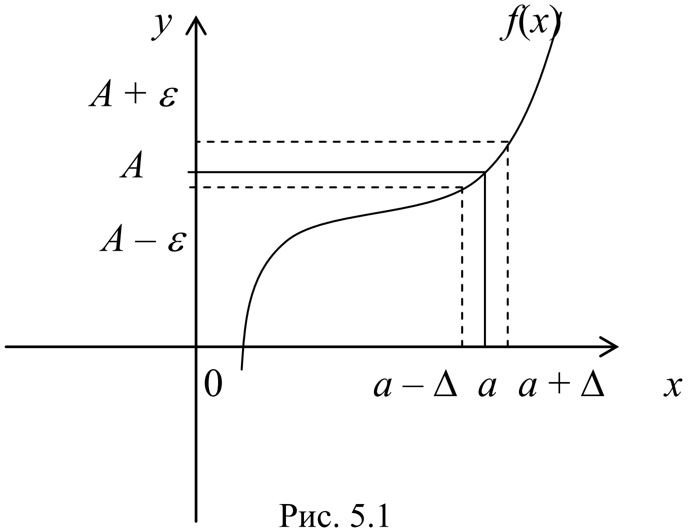

Рис. 5.1

Запись предела функции в точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ называется **пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ справа** (рис. 5.2).

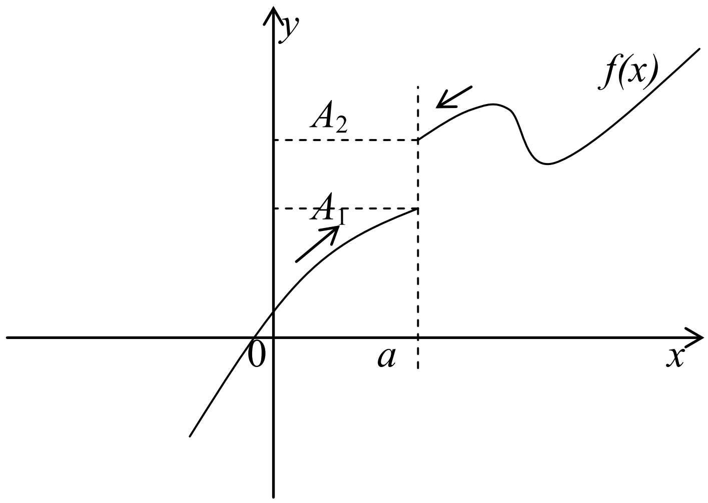

Рис. 5.2

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $y = f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.** Также говорят, что A – конечный предел функции $y = f(x)$.

5.1.2. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

Определение (предел функции на ∞ по Гейне). Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, все члены которой положительны, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b (рис. 5.3). Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

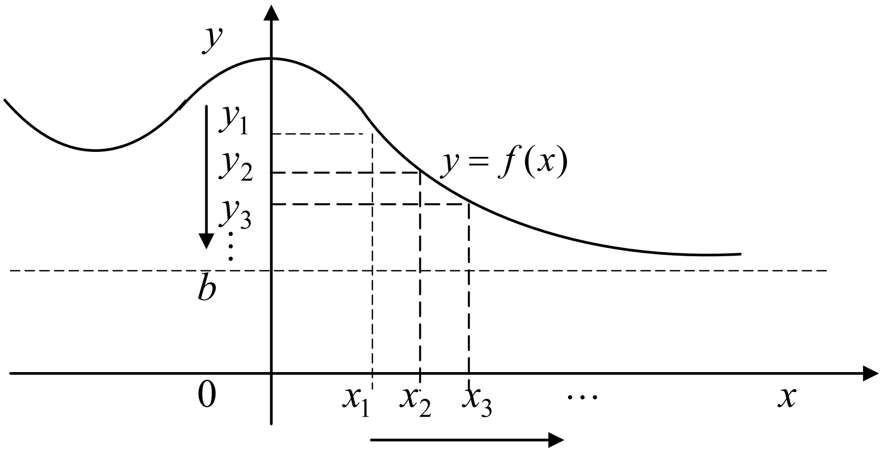

Рис. 5.3

Определение (предел функции на + ∞ по Коши). Число b называется **пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$**, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $x > M$ выполняется неравенство (рис. 5.4)

$$|b - f(x)| < \varepsilon .$$

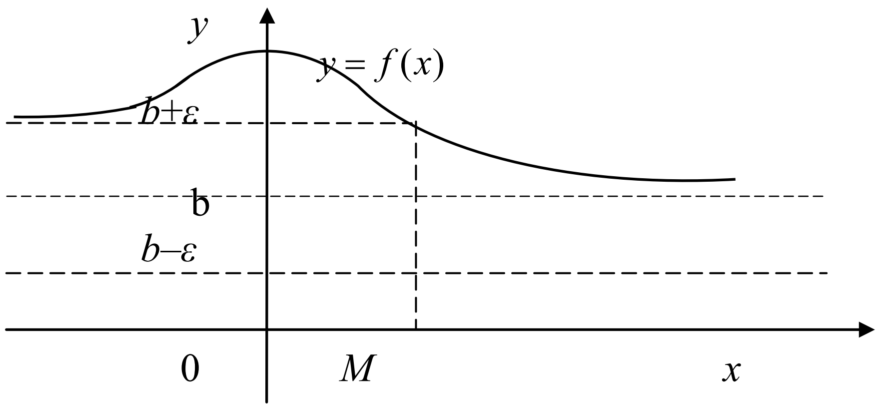

Рис.5.4

При этом предполагается, что функция $y = f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b.$

Определение (предел функции на –∞ по Гейне). Число b называется **пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$**, если для любой бесконечно большой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, все члены которой отрицательны, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Определение (предел функции на – ∞ по Коши) **.** Число b называется **пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$**, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $x < -M$ выполняется неравенство

$$|b - f(x)| < \varepsilon .$$

При этом предполагается, что функция $y = f(x)$ определена в окрестности минус бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b.$

Можно доказать, что определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

5.1.3. Основные теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Теорема 5. Если $f(x)>0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $A>0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной вблизи точки $x = a$**, если существует такое число $M>0$, что $|f(x)|<M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A|$$

или

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{где } M = \varepsilon + |A|,$$

что и требовалось доказать.

5.2. Бесконечно малые функции

5.2.1. Основные определения

Определение. Функция $y=\alpha(x)$ называется **бесконечно малой в точке** $x=a$, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Определение. Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой в точке** $x=a$, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x\to\infty$.

Бесконечно малой функция может быть, только если указать, к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Замечание. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x\to a$ (или $x\to\infty$), то функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой, и наоборот.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x\to 0$ и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(x)$ при $x\to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$ ($\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$).

5.2.2. Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.

2 Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.

3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$, является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Доказательство. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$; $g(x) = B + \beta(x)$, где

$$A = \lim_{x\to a} f(x); \quad B = \lim_{x\to a} g(x),$$

тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x),$$

$A + B = \mathrm{const}$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая, значит,

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Доказательство. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$; $g(x) = B + \beta(x)$, где

$$A = \lim_{x\to a} f(x); \quad B = \lim_{x\to a} g(x),$$

тогда

$$f(x)\cdot g(x) = A\cdot B + A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x),$$

$A\cdot B = \mathrm{const}$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, значит,

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} A\cdot B + 0 = A\cdot B = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

что и требовалось доказать.

Определение. Две бесконечно малые в точке $x = a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными**, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Эквивалентность обозначается $\alpha(x) \approx \beta(x)$.

Определение. Бесконечно малая в точке $x = a$ функция $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем бесконечно малая в точке $x = a$ функция $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 0$.

Определение. Две бесконечно малые в точке $x = a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **одного порядка малости**, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = c$, где c является константой.

Пример. $\alpha(x) = x^2$; $\beta(x) = x$; $\gamma(x) = 4x$ – бесконечно малые в точке $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Следовательно, $\alpha(x) = x^2$ имеет более высокий порядок малости, чем бесконечно малая в точке $x = 0$ функция $\beta(x) = x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} = \mathrm{const}.$$

Следовательно, бесконечно малые в точке $x = 0$ функции $\beta(x) = x$ и $\gamma(x) = 4x$ являются одного порядка малости.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Теорема 4 (принцип замены эквивалентных бесконечно малых). Пусть $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ – бесконечно малые в точке $x = a$ функции и $\alpha(x) \approx \alpha_1(x)$; $\beta(x) \approx \beta_1(x)$. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Доказательство. Так как $\alpha(x) \approx \alpha_1(x)$; $\beta(x) \approx \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\beta(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

что и требовалось доказать.

При вычислении пределов может быть использован приём, основанный на том, что предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если эти бесконечно малые заменить их эквивалентными.

При $\alpha(x) \to 0$ имеем

$\sin\alpha(x) \approx \alpha(x);$	$\sin 0^\circ = 0;$
$\arcsin\alpha(x) \approx \alpha(x);$	$\arcsin 0^\circ = 0;$
$\ln(1+\alpha(x)) \approx \alpha(x);$	$\ln 1 = 0;$
$\log_a(1+\alpha(x)) \approx \alpha(x)\ln a;$	$\log_a 1 = 0;$
$\sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \approx \dfrac{\alpha(x)}{2};$	
$\mathrm{tg}\alpha(x) \approx \alpha(x);$	$\mathrm{tg}0^\circ = 0;$
$\mathrm{arctg}\alpha(x) \approx \alpha(x);$	$\mathrm{arctg}0^\circ = 0;$
$e^{\alpha(x)} - 1 \approx \alpha(x);$	$e^0 = 1;$
$e^{\alpha(x)} \approx 1 + \alpha(x);$	
$a^{\alpha(x)} \approx 1 + \alpha(x)\ln a;$	$a^0 = 1;$
$1 - \cos\alpha(x) \approx \dfrac{\alpha(x)^2}{2};$	$\cos 0^\circ = 1.$

В частности, при $x \to 0$ имеют место эквивалентности:

$\sin x \approx x;$	$\mathrm{tg}x \approx x;$
$\arcsin x \approx x;$	$\mathrm{arctg}x \approx x;$
$\ln(1+x) \approx x;$	$e^x - 1 \approx x;$
$\sqrt{1+x} - 1 \approx \dfrac{x)}{2};$	$1 - \cos x \approx \dfrac{x^2}{2}.$

При доказательстве этих эквивалентностей использовались пределы:

1. ***Первый замечательный предел:***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1.$$

2. ***Второй замечательный предел:***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[1^\infty\right] = 1.$$

5.2.3. Образцы решения задач

Часто встречаются случаи, когда непосредственно применить теорему 4 нельзя. Это так называемые неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Рассмотрим на примерах методы раскрытия этих и некоторых других неопределённостей.

Разложим квадратные трёхчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена, которые вычисляются по формулам

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При решении примеров необходимо вспомнить и формулы сокращенного умножения:
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения $x = 2$ в дробь под знаком предела приводит к неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Разложим квадратные трёхчлены числителя и знаменателя на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена. В числителе корни равны:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 1}{2} = 2;\ x_2 = \frac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

Корни знаменателя:

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3+1}{2} = 2;\ x_2 = \frac{3-\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Затем сократим общий сомножитель, после чего уже подставим предельное значение $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \left[\frac{2^2-5\cdot 2+6}{2^2-3\cdot 2+2}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1} = \frac{2-3}{2-1} = -1.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{x-2}}{x^2-1}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения $x = 1$ в дробь под знаком предела приводит к неопределённости вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разложим квадратные трёхчлены знаменателя на множители по формуле сокращённого умножения $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} = \left[\frac{(1-1)\sqrt{2-1}}{1^2-1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}}{(x+1)} = \frac{\sqrt{2-1}}{(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения $x = 1$ в дробь под знаком предела приводит к неопределённости вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \left[\frac{1^2-2\cdot 1+1}{1^3-1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{1-1}{1\cdot(1+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения в дробь под знаком предела приводит к неопределённости вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{6(x-1/2)(x-1/3)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2(x-1/2)(4x^2+2x+1)}{6(x-1/2)(x-1/3)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2+2x+1}{3(x-1/3)} = \frac{4\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}+1}{3(1/2-1/3)} = 6.$$

При вычислении предела воспользовались разложением:

$$6x^2-5x+1 = 6(x-1/2)(x-1/3),$$

где x_1=1/2; x_2=1/3 – корни квадратного трёхчлена $6x^2 - 5x+1=0$, вычисленные по формуле $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\dfrac{5\pm1}{12}$. Для числителя дроби воспользовались формулой разности кубов:

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1).$$

Если при $x\to x_0$ $f(x)\to\infty$ и $q(x)\to\infty$, то отношение $\dfrac{f(x)}{q(x)}$ представляет собой неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. В этом случае рекомендуется числитель и знаменатель разделить почленно на старшую степень переменной x.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\dfrac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^4 (наивысшая степень), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0,$$ так как при $x\to\infty$ величины $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x^4}$ являются бесконечно малыми.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшая степень), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+3}{3x^2-x+7}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям.

Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x^2 (это старшая степень x), после чего находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+3}{3x^2-x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{1+0+0}{3-0+0}=\frac{1}{3},$$ так как при $x\to\infty$ величины $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ являются бесконечно малыми.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}5x}{\sin 7x}$.

Решение. Так как $\mathrm{tg}5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Решение. Так как 1 – cos$x$ = $2\sin^2\dfrac{x}{2}\sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}2x=0.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sin x^2}$.

Решение. Так как tg$x$ ~ x и sinx^2 ~ x^2 при $x\to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

Решение. Исключив целую часть из дроби, полагаем $-\dfrac{5}{x+2}=t$, откуда $x=-\dfrac{5}{t}-2$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{2\cdot\left(-\frac{5}{t}-2\right)+1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{10}{t}-3}=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-10}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+2}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном значении аргумента функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (случай 1^∞), преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1+1}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\left(1+\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Пример. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+3}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном значении аргумента функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (случай 1^{∞}), преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-3)+3+5}{x-3}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{8}{x-3})^{\frac{x-3}{8}\cdot\frac{8}{x-3}(2x+3)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{8}{x-3})^{\frac{x-3}{8}}\right)^{\frac{8}{x-3}(2x+3)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{8(2x+3)}{x-3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{8(2+\frac{3}{x})}{1-\frac{3}{x}}} = e^{16}.$$

При вычислении последнего предела поделили числитель и знаменатель дроби на x, после чего воспользовались тем, что при $x\to\infty$ величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой, т.е. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Пример. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+8}\right)^{3x-1}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном значении аргумента функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (случай 1^{∞}), преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+8}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+8)-8+5}{2x+8}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{-3}{2x+8})^{\frac{2x+8}{-3}}\right)^{\frac{-3}{2x+8}(3x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-3}{2x+8}(3x-1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-9+\frac{3}{x}}{2+\frac{8}{x}}} = e^{-\frac{9}{2}}.$$

При вычислении последнего предела поделили числитель и знаменатель дроби на x, после чего воспользовались тем, что при $x \to \infty$ величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-5x+8}\right)^{3x+2}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном значении аргумента функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (случай 1^{∞}), преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-5x+8}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-5x+8)+5x-8+3x+4}{x^2-5x+8}\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{8x-4}{x^2-5x+8})^{\frac{x^2-5x+8}{8x-4}}\right)^{\frac{8x-4}{x^2-5x+8}(3x+2)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(8x-4)(3x+2)}{x^2-5x+8}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{24+\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}}}=e^{24}.$$

При вычислении последнего предела поделили числитель и знаменатель дроби на x^2(это старшая степень x), после чего воспользовались тем, что при $x\to\infty$ величины $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ является бесконечно малыми, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$.

Решение. Применяем тригонометрическую формулу $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ и первый замечательный предел.

Получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=2\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot 1^2=2$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{\ln(1+2x^2)}$.

Решение. Пользуясь тем, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми и учитывая, что $\mathrm{tg}2x\approx 2x;\ \ln\left(1+2x^2\right)\approx 2x^2$ при $x\to 0$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{\ln(1+2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{2x^2}=2.$$

Сформулируем правила, позволяющие вычислить пределы.

Замечание 1. Чтобы вычислить $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{q(x)}$, нужно вместо переменной x поставить её предельное значение x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0;\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=C\neq 0,$ то $A=\dfrac{0}{C}=0.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=C\neq 0;\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=0,$ то $A=\left[\dfrac{C}{0}\right]=\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0;\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=0,$ то $A=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ – неопределенность.

Замечание 2. Чтобы раскрыть неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ в алгебраическом выражении, надо в числителе и знаменателе выделить множитель $x-x_0$, который стремится к нулю, и на него под знаком предела сократить.

Замечание 3. Если в числителе и знаменателе стоят многочлены, то чтобы получить множитель $x-x_0$, нужно многочлены разложить на множители.

На основании, изложенных выше замечаний, рассмотрим решение задачи 1.

Задача 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения $x = 6$ в дробь под знаком предела приводит к неопределённости вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x \to 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6} = \left[\frac{2 \cdot 6^2 - 11 \cdot 6 - 6}{3 \cdot 6^2 - 19 \cdot 6 + 6}\right] = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Разложим квадратные трёхчлены числителя и знаменателя на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена. Найдём корни квадратного трёхчлена в числителе:

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{11 - 13}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{11 + 13}{4} = 6.$$

Корни квадратного трёхчлена в знаменателе равны:

$$x_1 = \frac{19 + \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = \frac{19 + 17}{6} = 6;$$

$$x_2 = \frac{19 + \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = \frac{19 - 17}{6} = \frac{1}{3}.$$

Разложим квадратные трёхчлены числителя и знаменателя на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена. Получим

$$2x^2 - 11x - 6 = 2(x - 6)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 6)(2x + 1);$$

$$3x^2 - 19x + 6 = 3(x - 6)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x - 6)(3x - 1).$$

Затем сократим общий сомножитель, после чего уже подставим предельное значение $x = 6$.

$$\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(2x+1)}{(x-6)(3x-1)}=\lim_{x\to 6}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{2\cdot 6+1}{3\cdot 6-1}=\frac{13}{17}.$$

Замечание 4. Если в числителе или знаменателе стоят иррациональные выражения, то для получения сомножителя $x - x_0$ умножим числитель и знаменатель на сопряженные им выражения. Для этого необходимо воспользоваться формулами сокращённого умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);\ a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right);$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right).$$

На основании изложенного выше замечания рассмотрим решение задачи 2.

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения $x = 5$ в дробь под знаком предела приводит к неопределённости вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\frac{\sqrt{6-5}-1}{3-\sqrt{4+5}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Домножим числитель и знаменатель на соответствующие сопряжённые выражения, получим

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\frac{\left[\left(\sqrt{6-x}-1\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)\right]\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left[\left(3-\sqrt{4+x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left[\left(\sqrt{6-x}\right)^2-1^2\right]\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left[\left(\sqrt{4+x}\right)^2\right]}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(\sqrt{6-x}+1\right)(5-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1}=\frac{6}{2}=3.$$

Замечание 5. Если при $x \to x_0$ функции $f(x)\to\infty$ и $q(x)\to\infty$, то отношение $\dfrac{f(x)}{q(x)}$ представляет собой неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. В этом случае рекомендуется числитель и знаменатель разделить почленно на старшую степень переменной x.

На основании изложенного выше замечания рассмотрим решение задачи 3.

Задача 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-7-2x^2}{7x+x^3}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби разделить почленно на старшую степень переменной x, т.е. на x^3. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7-2x^2}{7x+x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x-7-2x^2}{x^3}}{\dfrac{7x+x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}-2}{\dfrac{7}{x^2}+1}=$$

$$=\frac{0-0-2}{0+1}=-2.$$

Замечание 6. Если при $x\to x_0$, $f(x)\to+\infty$ и $q(x)\to+\infty$, то разность $f(x)-q(x)$ представляет собой неопределенность $\infty-\infty$. Чтобы раскрыть такую неопределенность, надо привести её к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

На основании изложенного выше замечания рассмотрим решение задачи 4.

Задача 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}\right)$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения $x\to\infty$ под знаком предела приводит к неопределённости вида $[\infty-\infty]$. Умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x-3}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Здесь старшая степень x – первая, поэтому разделим числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x-4}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{4}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x-3}}{x}+\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{\dfrac{4x-3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty.$$

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если одну или обе бесконечно малые заменить их эквивалентными, т. е. если $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$ и $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$.

Заметим, что с помощью эквивалентных бесконечно малых раскрывают неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Используя данную теорему, рассмотрим задачи 5, 6, 7 и 8.

Задача 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 18x}{\operatorname{tg} 13x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Решение. Пользуясь тем, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми и учитывая, что $\sin 8x\sim 8x;\ \operatorname{tg}3x\sim 3x$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg}3x}==\lim_{x\to 0}\frac{8x}{3x}=\frac{8}{3}.$$

Задача 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{\arcsin^2 7x}$.

Решение. Пользуясь тем, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми и учитывая, что $\sin^2 3x\sim(3x)^2$; $\arcsin^2 5x\sim(5x)^2$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos^3 3x}{\arcsin^2 5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\left(1-\cos^2 3x\right)}{\arcsin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot\sin^2 3x}{\arcsin^2 5x}3\ =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot 9x^2}{25x^2}=\frac{9}{25}.$$

Задача 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}2x}-1}{\ln(1+3x)}=.$

Решение. Пользуясь тем, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми и учитывая, что $\sqrt{1+\mathrm{tg}2x}-1\sim\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}2x\sim\dfrac{1}{2}\cdot 2x\sim x;\ \ln(1+3x)\sim 3x$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}2x}-1}{\ln(1+3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}\ =\ \frac{1}{3}.$$

Задача 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{7}}{\mathrm{arctg}15x}.$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5}}{\mathrm{arctg}5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{5}\right)\cdot\mathrm{arctg}5x}\ =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+5}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{7}\right)5\cdot\mathrm{arctg}5x}\ =\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{5}\right)\cdot\mathrm{arctg}15x}=$$

$$=\left|\mathrm{arctg}\ 5x\sim 5x\right|\ =\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{5}\right)\cdot 5x}\ =\ \frac{2}{2\sqrt{5}\cdot 5}\ =\ \frac{1}{5\sqrt{5}}.$$

Замечание 7. Пусть необходимо вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}$. Если при этом при $x\to x_0$, $f(x)\to 1$ а $\varphi(x)\to\infty$, то имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$; если $f(x)\to\infty$, а $\varphi(x)\to 0$, то имеем неопределенность $\left[\infty^0\right]$; $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to 0$, то имеем неопределенность $\left[0^0\right]$. Эти неопределенности раскрываются с помощью второго замечательного предела.

1. $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e,\ \ e=2{,}71828...$

или

2. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

На основании изложенного выше замечания рассмотрим решение задач 9 и 10.

Задача 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^{x}$**.**

Решение. Убедившись сначала, что при указанном значении аргумента функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (случай 1^{∞}):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{3x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{3+\frac{1}{x}}=1,$$

получим неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Используем первую форму второго замечательного предела. Для этого преобразуем основание к виду $1+\frac{1}{y}$ следующим образом:

$$\frac{3x+5}{3x+1}=1+\left(\frac{3x+5}{3x+1}-1\right)=1+\frac{3x+5-3x-1}{3x+1}=1+\frac{4}{3x+1}=1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}.$$

Следовательно, $y=\frac{3x+1}{4}$. Далее преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{3x+1}{4}}\right]^{\frac{4}{3x+1}\cdot x}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{3x+1}{4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x+1}} = e^{\frac{4}{3}}.$$

При вычислении предела воспользовались тем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x+1}=\frac{4}{3}$, а предел основания степенного выражения равен e.

Задача 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном значении аргумента функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности (случай 1^{∞}), преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел.

Полагая $-2x = y$, найдём $y \to 0$, когда $x \to 0$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{6}{y}} = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-6} = e^{-6}.$$

Задания для решения в аудитории

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x-3x^3}{6x^3+x^2-5}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{4x+3}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+4x-1}{2x^3-7x^2-5}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3-1}{4x^2-5x+3}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\mathrm{tg}4x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos 4x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$.
10. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x$. (положить $x=1-\alpha$);
11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 2x}{e^{2x^2}-1}$.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x^2}{\mathrm{arctg}^2 2x}$.

***Ответы*.**

1. $\frac{5}{9}$. **2.** 0. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** 0. **6.** ∞. **7.** 2. **8.** $\frac{1}{8}$. **9.** $\frac{1}{4}$. **10.** $\frac{2}{\pi}$. **11.** e^{-4}. **12.** e^{-2}. **13.** e. **14.** 2. **15.** $\frac{3}{4}$.

Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$.
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+10x+8}$.
3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$.
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$.
7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+x-6}$.
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$.
9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$.
10. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x^2-x}{3x^2+8x-3}$.
11. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$.
12. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-7x-3x^2}{2x^2+7x+3}$.
13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$.
14. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$.
15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$.
16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.
17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$.
18. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$.
19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$.
20. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$.
21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$.
22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}$.
23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$.
24. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$.
25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{5-3x-2x^2}$.
26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-7}{3x^2+x-2}$.
27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$.
28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-7x+12}$.
29. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{10-3x-x^2}$.
30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{10x-x^2-21}$.

Задание 2. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5+7x^3-4}{6x^5-3x^2+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{2x^3+x^2-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{3x^3+x^2+4x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+2x^3-5x^4}{2x^5+5x^2-3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5-2x+1}{2x^5+4x+5}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+5x^2-3x^5}{8-6x-x^5}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-7x+1}{3x^4+x+3}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x-3x^4}{x^5+x+3}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{5x^5-x+4}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-8x+1}{4x^2+x+1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-5}{6x^2-2x+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-x^3+5}{x^2+x-4}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-2x+5}{4-x^4}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-x-x^2}{2x^3+x+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x+1}{7x^4-x+5}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^5-2x^3+4}{7x^5+3x^2+2}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5-3x^2+2}{3x^5+4x+1}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+5x^2-3x^5}{2x^5+4x^4-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+x^2+4x}{7-7x^3+2x}$.

Задание 3. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$.

8. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.

15. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{4-\sqrt{x+7}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.

23. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{8}}{\sqrt{2x+5}-3}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{5z+x^2}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{4-x^2}-2}$.

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+13}-4}$.

Задание 4. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+12x}-\sqrt{9x^2+18x-5}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+6x-3}-x\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^6+3x^2+1}-x^3\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+9}-x\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{y^2-2y}-y\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x-1}-\sqrt{2x+1}\right)$.

13. $\lim\limits_{u\to \infty}\left(\sqrt{u^2-4}-\sqrt{u^2+4u}\right)$.

14. $\lim\limits_{y\to +\infty}\left(\sqrt{(y+2)(y+6)}-y\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{4x^2+8x-7}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x+x^2}-x\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-\sqrt{3x^2+2x+1}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+10x+9}-x\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+7}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-9x}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-2}-5x\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right)$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-\sqrt{x^2+2}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+1}-\sqrt{3x^2+1}\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{7x-1}-\sqrt{2x-3}\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+1}-2x\right)$.

Задание 5. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,\mathrm{tg}2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{9x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}x}{1-\cos x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\sin^2 5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\mathrm{tg}^2 2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{x\sqrt{1-\cos 8x}}{\sin^2 4x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x\sin 3x}$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,\mathrm{tg}x}{1-\cos 4x}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{x\,\mathrm{tg}2x}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos^5 x}{x\sin 3x}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x\,\mathrm{tg}3x}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x\,\mathrm{tg}4x}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{\arcsin^4 3x}$.

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{2x\,\mathrm{tg}2x}$.

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}$.

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,\mathrm{tg}2x}{1-\cos x}$.

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{\arcsin^2 3x}$.

30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}$.

Задание 6. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sqrt{x+16}-4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-1}{3x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sqrt{x+8}-\sqrt{8}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\operatorname{arctg}3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos x-\cos^3 x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{5-\sqrt{x+25}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sqrt{x+4}-2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{\sqrt{9+x^2}-3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{8+x}-\sqrt{8}\right)\sin 2x}{x^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{9-x}-3\right)\operatorname{tg}3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)x}{\sin^2 3x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}7x}{\sqrt{x+49}-7}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sqrt{x+4}-2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}13x}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}3x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x\sin x}-\sqrt{2}}{2x^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+25}-5}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sqrt{x+9}-3}$.

Задание 7. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x^2+1}\right)^{6-4x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+8}{2x^2+3x-1}\right)^{x^2-4}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3+1}\right)^{6x^3+4}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x-2}\right)^{3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+4x-5}{2x^2-8}\right)^{2x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{3-x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x-3}\right)^{4x+1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{1-3x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{1-2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x+1}\right)^{2x-3}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{6x+1}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4-x}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+7}{5x-3}\right)^{2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1}{7x+5}\right)^{4-x}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-3}{3x-1}\right)^{1-4x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+7}\right)^{3x+1}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6-x}{7-x}\right)^{3x}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+5}{7x-1}\right)^{3-x}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+4}\right)^{5x^3+1}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+8}{3x^2-1}\right)^{x^2-4}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-5}\right)^{7x+1}$.

5.3. Непрерывность функции

5.3.1. Основные понятия

Определение. Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке $x=x_0$**, если выполняются условия:

1) функция определена в этой точке и некоторой её окрестности;

2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

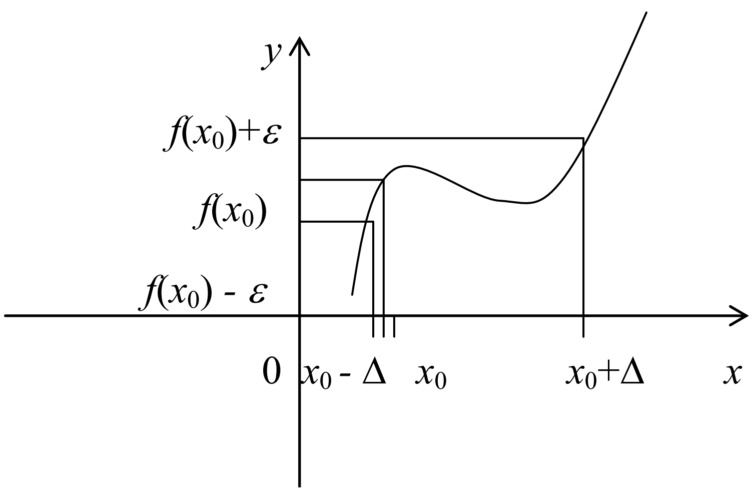

Рис. 5.5

Если хотя бы одно условие не выполняется, то функция называется **разрывной в точке x_0**, а сама точка называется точкой разрыва функции. Пример непрерывной функции показан на рис. 5.5. Пример разрывной функции иллюстрирует рис. 5.6.

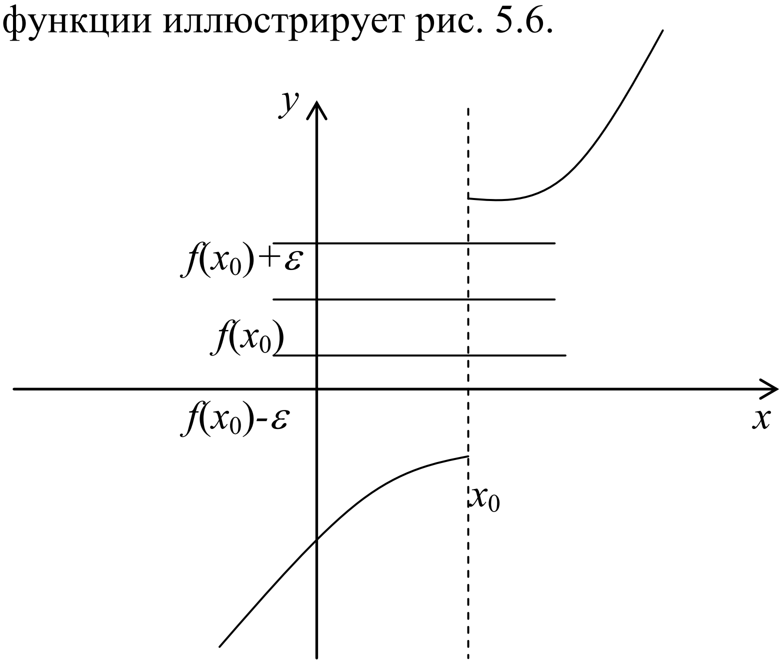

Рис. 5.6

Свойства непрерывных функций:

1. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций есть функция, непрерывная в точке x_0.

2. Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0.

3. Суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом: если $u = f(x)$; $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены. Для доказательства их непрерывности удобно пользоваться следующим определением.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке $x = x_0$**, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0 + \Delta x\right) \right) = 0.$$

Рассмотрим это определение на примере функции $y = \sin x$.

Запишем приращение функции $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ или после преобразования по формуле $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Окончательно получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0.$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при $\Delta x \to 0$ $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно, это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями функция $y = \sin x$ – непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Классификация точек разрыва:

а) точка $x = x_0$ называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке существуют и конечны пределы слева и справа, но не равны друг другу;

б) точка $x = x_0$ называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке хотя бы один из пределов слева или справа бесконечен или не существует.

Неэлементарная функция может иметь разрывы как в точках, где она не определена, так и в тех точках, где меняются её аналитические выражения.

В некоторых частных случаях точку разрыва первого рода еще иногда называют **устранимой точкой разрыва**.

5.3.2. Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке:

Свойство 1. Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815–1897) – немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие

$$-M \le f(x) \le M.$$

Свойство 2. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$; $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M.$$

Эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например, $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значениями функции на отрезке называется **колебанием функции на отрезке**.

Свойство 3. Вторая теорема Больцано – Коши. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5. Первая теорема Больцано (1781–1848) – Коши. Если функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$, т.е. если

$$\mathrm{sign}(f(a)) \ne \mathrm{sign}(f(b)), \text{ то } \exists\, x_0: f(x_0) = 0.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной на отрезке [a, b]**, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$, такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta,$$

верно неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Отличие равномерной непрерывности от «обычной» в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при «обычной» непрерывности Δ зависит от ε и x.

Свойство 6. Теорема Кантора (Кантор Георг (1845–1918) – немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем. Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.

Свойство 7. Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

5.3.3. Образцы решения задач

Пример. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва первого рода. Это устранимая точка разрыва, т.к. можно доопределить функцию (рис. 5.7)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 1 \text{ при} & x = 0. \end{cases}$$

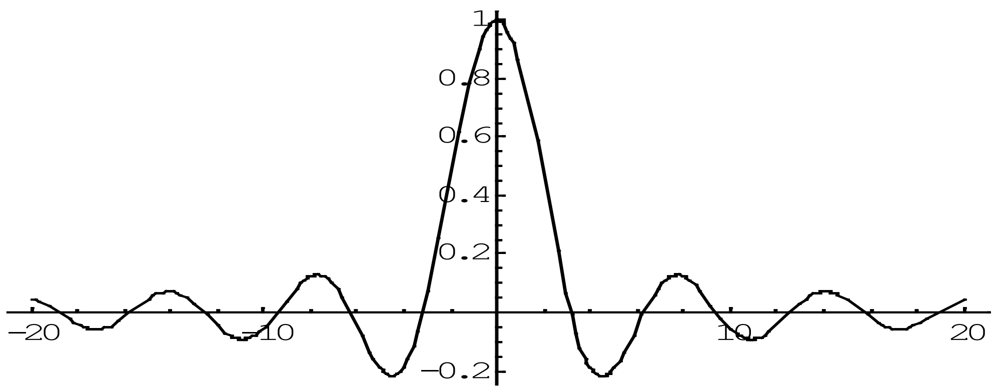

Рис. 5.7

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва первого рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Пример. Найти точки разрыва функции и определить типы разрывов.

$$y(x)=\begin{cases} 2x^2, & -\infty < x < 1; \\ \dfrac{1}{x-2}, & 1 \le x < 3; \\ x-2, & 3 \le x \le \infty. \end{cases}$$

Решение. Функция определена на всей числовой прямой. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой прямой, так как эта функция неэлементарная и может иметь разрывы в точках $x=1$; $x=3$, где меняется её аналитическое выражение.

Исследуем на непрерывность точки $x=1$; $x=3$.

Пусть $x=1$. Найдем правосторонний и левосторонний пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2x^2 = 2; \ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-2} = -1.$$

Пределы слева и справа конечны, но не равны, т.е. не выполняется второе условие непрерывности. Поэтому в точке $x=1$ функция терпит разрыв первого рода («скачок»).

Пусть $x=3$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} \frac{1}{x-2} = 1; \ \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} (x-2) = 1.$$

Пределы слева и справа конечны и равны значению функции в этой точке. По условию задачи значение функции $y(x)$ в точке $x=3$ определяется третьей формулой $y(3)=3-2=1$.

Следовательно, точка $x=3$ является точкой непрерывности функции.

Пример. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ и определить типы разрывов.

Решение. Функция $f(x)$ не определена в точках $x = \pm 2$, следовательно, в этих точках она может терпеть разрыв. Найдём односторонние пределы функции в этих точках:

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty,$$

так как при $x \to -2-0$ величина $x^2 - 4$ является положительной бесконечно малой, а обратная ей $\frac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой;

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty,$$

так как при $x \to -2+0$ величина $x^2 - 4$ является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является отрицательной бесконечно большой;

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty,$$

так как при $x \to 2-0$ величина $x^2 - 4$ является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является отрицательной бесконечно большой;

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty,$$

так как при $x \to 2+0$ величина $x^2 - 4$ является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой.

Следовательно, в точках $x = \pm 2$ функция $f(x)$ имеет разрывы второго рода.

Пример. Найти точки разрыва функции $f(x) = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ и определить типы разрывов.

Решение. Данная функция имеет одну точку разрыва $x = 0$, так как в этой точке она не определена. Найдём односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \to 0-0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi;$$

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0.$$

Следовательно, точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода.

Задания для решения в аудитории

Найти точки разрыва функций и определить типы разрывов.

1. $y(x) = \begin{cases} x+1, & -\infty < x < 0; \\ (x-1)^2, & 0 \le x < 2; \\ -1, & 2 \le x < \infty. \end{cases}$ 2. $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2-1}$. 3. $y(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

4. $y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -\infty < x < -1; \\ (2x+1)^2, & -1 \le x < 1; \\ 5x, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$ 5. $y(x) = \begin{cases} 2, & -\infty < x < -2; \\ \dfrac{1}{x}, & -2 \le x < 1; \\ 2x-1, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$

Ответы.
1. $x = 2$, первого рода. **2.** $x = -1$; $x = 1$, оба разрыва второго рода.
3. $x = 0$, второго рода. **4.** $x = -1$; $x = 1$, оба разрыва первого рода.
5. $x = -2$, первого рода, $x = 0$, второго рода.

Индивидуальные задания

Найти точки разрыва функций и определить типы разрывов.

1. $y(x)=\begin{cases}-2, & -\infty<x<-2;\\ x, & -2\le x<0;\\ \dfrac{1}{x-1}, & 0\le x<\infty.\end{cases}$

2. $y(x)=\begin{cases}2x, & -\infty<x<0;\\ \sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2};\\ 2x-\pi, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\infty.\end{cases}$

3. $y(x)=\begin{cases}2x+1, & -\infty<x<-1;\\ x^2-1, & -1\le x<1;\\ -1, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

4. $y(x)=\begin{cases}x+1, & -\infty<x<0;\\ x^2, & 0\le x<2;\\ \dfrac{1}{2}x^2-1, & 2\le x<\infty.\end{cases}$

5. $y(x)=\begin{cases}\pi-x, & -\infty<x<0;\\ \pi\cos x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2};\\ 2x-\pi, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\infty.\end{cases}$

6. $y(x)=\begin{cases}-2, & -\infty<x<-1;\\ 2x, & -1\le x<1;\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

7. $y(x)=\begin{cases}2x+1, & -\infty<x<-1;\\ -x^2, & -1\le x<2;\\ \dfrac{3}{x+1}, & 2\le x<\infty.\end{cases}$

8. $y(x)=\begin{cases}-x, & -\infty<x<0;\\ \mathrm{tg}x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4};\\ 2, & \dfrac{\pi}{4}\le x<\infty.\end{cases}$

9. $y(x)=\begin{cases}-2x, & -\infty<x<0;\\ \sqrt{x}, & 0\le x<4;\\ 3, & 4\le x<\infty.\end{cases}$

10. $y(x)=\begin{cases}x^2, & -\infty<x<0;\\ -x, & 0\le x<2;\\ \dfrac{1}{2}x-1, & 2\le x<\infty.\end{cases}$

11. $y(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<0;\\ 2\sin x, & 0\le x<\pi;\\ x+\pi, & \pi\le x<\infty.\end{cases}$

12. $y(x)=\begin{cases}-2, & -\infty<x<0;\\ 2\sqrt{x}, & 0\le x<1;\\ 2x, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

13. $y(x)=\begin{cases}-2x, & -\infty<x<0;\\ \cos x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2};\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\infty.\end{cases}$

14. $y(x)=\begin{cases}2, & -\infty<x<-1;\\ 2x-1, & -1\le x<1;\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

15. $y(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & -\infty<x\le 1;\\ 2-x, & 1<x<2{,}5;\\ 2x-5, & 2{,}5\le x<\infty.\end{cases}$

16. $y(x)=\begin{cases}x-3, & -\infty<x<0;\\ \sqrt{x}+3, & 0\le x<1;\\ 4, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

17. $y(x)=\begin{cases}2x^2, & -\infty<x<1;\\ \dfrac{1}{x-2}, & 1\le x<3;\\ x-2, & 3\le x<\infty.\end{cases}$

18. $y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0;\\ x, & 0\le x<1;\\ \sqrt{x}, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

19. $y(x)=\begin{cases}2-x, & -\infty<x<0;\\ \sin x, & 0\le x<\pi;\\ 0, & \pi\le x<\infty.\end{cases}$

20. $y(x)=\begin{cases}\cos x, & -\infty<x<0;\\ x+1, & 0\le x<2;\\ 2x-1, & 2\le x<\infty.\end{cases}$

21. $y(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0;\\ 1-x, & 0\le x<1;\\ \ln x, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

22. $y(x)=\begin{cases}2-x^2, & -\infty<x<-1;\\ x+2, & -1\le x<1;\\ 2^x, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

23. $y(x)=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<-2;\\ x^2-1, & -2\le x<1;\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x<\infty.\end{cases}$

24. $y(x)=\begin{cases}2-x^2, & -\infty<x<1;\\ \sqrt[3]{x}, & 1\le x<8;\\ \dfrac{2}{x-9}, & 8\le x<\infty.\end{cases}$

25. $y(x)=\begin{cases}x^3+1, & -\infty<x<0;\\ \sqrt{x}, & 0\le x<4;\\ x-2, & 4\le x<\infty.\end{cases}$

Контрольная работа по разделу «Введение в математический анализ»

Вариант №1

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg} x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{1+x}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases} x^2-2, & -\infty\prec x\prec 2;\\ x-2, & 2\le x\prec 3;\\ 1, & 3\le x\prec\infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=x^3+1$.

Вариант №2

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+4x^2}{3+4x^2}\right)^{x\ +2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases} 3x-2, & -\infty\prec x\prec 2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\prec 3;\\ 1, & 3\le x\prec\infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{x}{x^3-3}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\sqrt[3]{x}$.

Вариант №3

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{4}{x}\right)^{(3x+2)}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}(x-2), & -\infty\prec x\prec 2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\prec 3;\\ 3, & 3\le x\prec\infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\cos x$.

Вариант №4

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{x^2+2}\right)^{x^2+x}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}x-2, & -\infty\prec x\prec 0;\\ \sin x, & 0\le x\prec \pi/2;\\ 1, & \pi/2\le x\prec 3.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\log_3 x$.

Вариант №5

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\cos\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} (x-2), & -\infty \prec x \prec 2; \\ (x-2)^2, & 2 \le x \prec 3; \\ 3, & 3 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = 3^x$.

Вариант №6

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2+4x}{3+4x}\right)^{x+2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} 2, & -\infty \prec x \prec -1; \\ (3x-1), & -1 \le x \prec 0; \\ x^2-1, & 0 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = x^2 - 1$.

Вариант №7

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; 2) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x}-2^x}{x-\sin 9x}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\ln\left(1+\dfrac{1}{6x}\right)\right)^{x+1}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}\sin x, & -\infty \prec x \prec \pi/2;\\ 1, & \pi/2 \le x \prec 3;\\ x^2, & 3 \le x \prec \infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\sqrt{x}$.

Вариант №8

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\mathrm{arctg}x-\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\mathrm{tg}\dfrac{4x}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}3^x, & -\infty \prec x \prec 0;\\ 1, & 0 \le x \prec 1;\\ x^2+1, & 1 \le x \prec \infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\log_2 x$.

Вариант №9

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\leftarrow 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+e^{\frac{1}{x^2}}\right)^{2x^2+2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}2x-2, & -\infty \prec x \prec 2;\\ (x-2)^2, & 2 \le x \prec 3;\\ 1, & 3 \le x \prec \infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{x}{x-4}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=2-x^3$.

Вариант №10

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x - 2x}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{x^2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} 4x-2, & -\infty \prec x \prec 2; \\ (x-2)^2, & 2 \le x \prec 3; \\ 1, & 3 \le x \prec \infty. \end{cases}$

2) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = \cos 2x$.

Вариант №11

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin x - x}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\sin\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2+1}{x+2}}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} \sqrt{2x+8}, & -\infty \prec x \prec 4; \\ (x-2)^2, & 4 \le x \prec 5; \\ 3, & 5 \le x \prec \infty. \end{cases}$

2) $y = \dfrac{1}{x^4-26x^2+25}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = 2^x$.

Вариант №12

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x + 5\pi / 2)\mathrm{tg}x}{\arcsin 2x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{6x^2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} 2x - 2\,, & -\infty \prec x \prec 1; \\ (x-1)^2, & 1 \le x \prec 3; \\ 1\,, & 3 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = 3^{\frac{1}{x-1}}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = \sin 2x$.

Вариант №13

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9\ln(1 - 2x)}{4\mathrm{arctg}3x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^{7x}}{\mathrm{tg}3x - x}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin\dfrac{1}{2x} + 1 \right)^{\frac{x^3}{x^2+1}}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} 2\,, & -\infty \prec x \prec -1; \\ 3x - 1, & -1 \le x \prec 0; \\ x^2 - 1\,, & 0 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = 2^{\frac{1}{2-x}}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = (x + 2)^2$.

Вариант №14

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{3x + 1}}{\cos[\pi(x + 1) / 2]}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\mathrm{tg}2x - \sin x}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \mathrm{tg}\dfrac{1}{x} \right)^{x+1}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases} 2^x, & -\infty \prec x \prec 0; \\ \cos x, & 0 \le x \prec \pi/2; \\ 1, & \pi/2 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=|x+2|$.

Вариант №15

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7(x+1)\pi}{x^2+\pi x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{arctg}x}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases} 2x^2, & -\infty \prec x \prec -1; \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \prec 0; \\ x-1, & 0 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=4^{-x}$.

Вариант №16

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\mathrm{arctg}x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x-\sin 5x}$;

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{(x+2)}\right)^{x+3}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -\infty \prec x \prec -1; \\ x, & -1 \le x \prec 0; \\ x^2, & 0 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y=5^{-\frac{1}{x}}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\lg x$.

Вариант №17

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x+x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{3x^2+10}\right)^{x^2+2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}1, & -\infty\prec x\prec -1;\\ x^2, & -1\le x\prec 0;\\ 2-x, & 0\le x\prec\infty.\end{cases}$

2) $y=\dfrac{x^2}{x+3}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=5x^2$.

Вариант №18

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9-2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg}x-\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4+5}{x^4+10}\right)^{x^4+3}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}\sqrt{x+7}, & -\infty\prec x\prec 2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\prec 3;\\ 1, & 3\le x\prec\infty.\end{cases}$

2) $y=x+\dfrac{2}{x}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=5^{x+1}$.

Вариант №19

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x+8}{12x+1}\right)^{x+3}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}2x+4\,, & -\infty\prec x\prec 3;\\ (x-2)^2, & 3\le x\prec 5;\\ 9, & 5\le x\prec\infty.\end{cases}$ 2) $y=3^{\frac{x}{x+1}}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=3x+5$.

Вариант №20

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+26}-3}{\sqrt{6+x}-\sqrt{3x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\mathrm{tg}x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{x^3+3}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}x^3\,, & -\infty\prec x\prec 2;\\ x+6, & 2\le x\prec 3;\\ 3\,, & 3\le x\prec\infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\log_3 x$.

Вариант №21

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \mathrm{tg} x^3}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1+3x^2}{3+3x^2} \right)^{2x^2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} (x-2), & -\infty \prec x \prec 4; \\ (x-2)^2, & 4 \le x \prec 5; \\ 9, & 5 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{2}{9-x^2}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = 3\sqrt{x}$.

Вариант №22

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{\sin 3(x+\pi) - \mathrm{tg} 2x}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1+2x^3}{3+2x^3} \right)^{3x^3}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y = \begin{cases} 2x+3, & -\infty \prec x \prec 2; \\ (x-2)^2, & 2 \le x \prec 3; \\ 1, & 3 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = 2x + 4$.

Вариант №23

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$; 2)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$; 4) $\lim\dfrac{1-\cos 2x}{\sin(x+2\pi)+\sin x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+3x}{3+3x}\right)^{2x+3}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}2x\ , & -\infty \prec x\prec 2;\\ x+2, & 2\le x\prec 3;\\ 3\ , & 3\le x\prec\infty.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=\sqrt[3]{x}+1$.

Вариант №24

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3(x+\pi)-\mathrm{tg}2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3x}\right)^{x+2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases}(x+2)\ , & -\infty \prec x\prec 2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\prec 3;\\ 1\ , & 3\le x\prec\infty.\end{cases}$ 2) $y=4^{\frac{1}{x+2}}$.

3. Доказать непрерывность функции $y=(x+2)^3$.

Вариант №25

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{\cos 2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-2^{3x}}{\mathrm{arctg}(2x+\pi)-7x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{3x}\right)^{x+2}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases} x^2, & -\infty \prec x \prec 2; \\ x+2, & 2 \le x \prec 3; \\ 3, & 3 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = 1+\dfrac{1}{x}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = 3|x+2|$.

Вариант №26

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x-\sin x^2}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\sin\dfrac{1}{5x^2}\right)^{(x^2+6)}$.

2. Найти точки разрыва функции, указать их вид. Сделать чертеж.

1) $y=\begin{cases} (x-2), & -\infty \prec x \prec 2; \\ \sqrt{(x+6)}, & 2 \le x \prec 3; \\ 3, & 3 \le x \prec \infty. \end{cases}$ 2) $y = 2^{\frac{x}{x+2}}$.

3. Доказать непрерывность функции $y = \sin 3x$.

Теоретические задания по разделу «Введение В математический анализ»

1. Предел функции в точке, предел функции на бесконечности, односторонние пределы.

2.Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и связь между ними.

3. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций.

4. Эквивалентные бесконечно малые функции, их свойства.

5. Основные теоремы теории пределов (о представлении функции, имеющей предел; пределе суммы, произведения и частного двух функций; пределе функций, связанных неравенствами).

6. Непрерывные функции, определение и свойства.

7. Точки разрыва, их классификация.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Производная функции. Правила дифференцирования. Таблица производных

6.1.1. Основные определения

Пусть $f(x)$ – функция, определённая в некоторой окрестности точки x_0. Введём обозначения: $x - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента x), $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции y).

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ называется **средней скоростью изменения функции** $y = f(x)$ **в промежутке** $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует и обозначается

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производную функции $y = f(x)$ в произвольной точке x принято обозначать $f'(x)$, или $y'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$. Если же точка x_0 задана, значение производной в этой точке записывают в виде $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$.

Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a,b). Тогда $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha,$$

где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$(рис. 6.1).

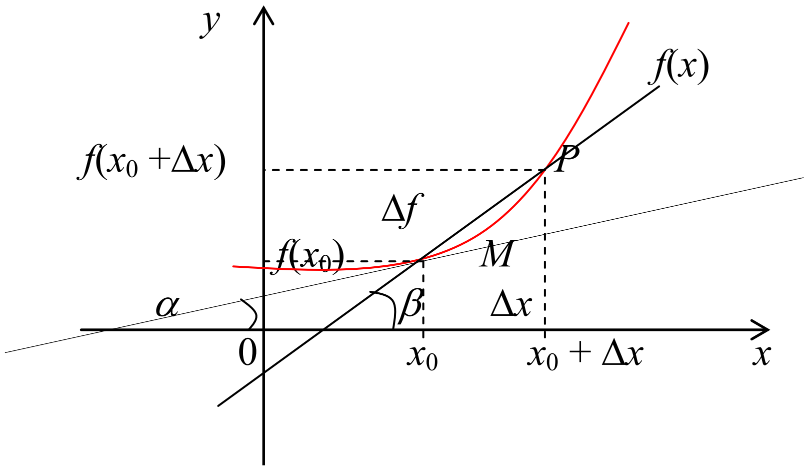

Рис. 6.1

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к кривой:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Производная функции в заданной точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Например, производная от пути по времени есть скорость движения, то есть $v(t) = \frac{ds}{dt}$; производная от скорости по времени дает ускорение движения $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

Если функция $Q = Q(t)$ выражает количество электричества, протекающего за время t через сечение проводника, то $\frac{dQ}{dt} = i(t)$ есть сила тока в момент времени t.

Теорема (необходимое условие существования производной). Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Понятно, что это условие не является достаточным.

6.1.2.Основные правила дифференцирования

Обозначим $f(x) = u$; $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в точке x, тогда справедливы формулы:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Доказательство:

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x+\Delta x)}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = u'v + v'u.$$

При вычислении последнего предела используем непрерывность дифференцируемой функции $v(x)$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) пусть определена сложная функция $y = f(u(x))$, тогда если функция $y = f(u)$ имеет производную в точке u, а функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную в точке x и справедливо равенство $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$, равенство называется **правилом дифференцирования сложной функции.**

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}; \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как $u = u(x)$ – непрерывная функция, то если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$.

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$,

что и требовалось доказать;

6) пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

Доказательство.

Для доказательства этого утверждения дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x:

$$1 = g'(y)y'.$$

Так как $g'(y) \neq 0$, то

$$y' = \frac{1}{g'(y)}.$$

Откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции $y = a^x$.

Решение. Функция $x = \log_a x$ является функцией, обратной функции $y = a^x$, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Следовательно,

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$$

Пример. Найти формулу для производной функции y=arctg$x$.

Решение. Функция y=arctg$x$ является функцией, обратной функции tg$y$, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = \mathrm{arctg}x;\, x = \mathrm{tg}y.$$

Известно, что $x' = (\mathrm{tg}y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$.

По приведенной выше формуле получаем

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathrm{tg}^2 y = 1 + x^2$, то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример. Найти производную функции $y=\sin x$.

Решение. По определению производной

$$y(x)=\sin x, y(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x),$$

тогда

$$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

Так как $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, то

$$\Delta y = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

По определению производной

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x)=\cos x,$$

так как $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\sin t}{t}$ (первый замечательный предел) и функция $y=\cos x$ непрерывна. Следовательно,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Пример. Найти производную функции $y=\log_a x$.

Решение. По определению производной

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\frac{(x+\Delta x)}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}\ln a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{x\Delta x}=\frac{\ln a}{x}=\frac{1}{x\log_a}.$$

Следовательно,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log_a}$$

При вычислении воспользовались эквивалентностью $\log_a(1+\alpha(x)) \approx \alpha(x)\ln a$, где $\alpha(x)=\dfrac{\Delta x}{x}$.

Таблица производных основных элементарных функций
и соответствующих им сложных функций

1	$C'=0$	
2	$x'=1$	
3	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$
4	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\, u'$
5	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\, u'$
6	$(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$
7	$(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$
8	$(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}u)'=\dfrac{1}{1+u^2}u'$
9	$(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'$
10	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
11	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arcos}u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
12	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^u)'=a^u\ln a\, u'$
13	$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u u'$
14	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'$
15	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\,u'$

Пример 1. Для $y=x^3\cdot\sin x$ найти y'.

Решение. Воспользуемся формулой $(U(x)\cdot V(x))'=U'(x)V(x)+U(x)V'(x)$, где $U(x)=x^3, V(x)=\sin x$. Тогда для $y=x^3\cdot\sin x$; $y'=\left(x^3\right)'\cdot\sin x+x^3(\sin x)'=3x^2\cdot\sin x+x^3\cos x$.

Пример 2. Для $y=\dfrac{\sin x}{2x^3}$ найти y'.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{(V(x))^2}, \text{ где } U(x)=\sin x, V(x)=2x^3.$$

$$y'=\left(\frac{\sin x}{2x^3}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin x)'\cdot x^3-\sin x\cdot\left(x^3\right)'}{x^6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x\cdot x^3-\sin x\cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$=\frac{x\cos x-3\sin x}{2x^4}.$$

Пример 3. Для $y=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+2x-10$ найти y'.

Решение. Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y=x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{3}}-x^{-2}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x-10.$$

Применяя правила и таблицу производных, получим

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+3\cdot(-\frac{1}{3})x^{-\frac{1}{3}-1}-(-2)x^{-2-1}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}+2x^{1-1}-0=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{2}{x^3}+\sqrt{x^3}+2.$$

Пример 4. Найти производную функции $y=\dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

Решение. Воспользуемся формулой для сложной функции

$$(u^2)'=2u^{2-1}u', \text{ где } u=\cos x.$$

Получим

$$y'=\frac{1}{2}2\cos x(\cos x)'=\cos x(-\sin x)=-\cos x\sin x.$$

Пример 5. Найти производную функции $y=\sqrt[3]{x^3+2x-3}$.

Решение. Данная функция является сложной функцией:

$$y=u^{\frac{1}{3}}, \text{ где } u=x^3+2x-3.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1} \cdot u' = \frac{1}{3}(x^3 + 2x - 3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^3 + 2x - 3)' = \frac{1}{3}(x^3 + 2x - 3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 + 2).$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{(V(x))^2}, \quad \text{где} \quad U(x) = x^2 e^{x^2}, V(x) = x^2 + 1,$$

получим

$$y' = \left(\frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 e^{x^2}\right)' \cdot \left(x^2 + 1\right) - x^2 e^{x^2} \cdot \left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Применим правило дифференцирования произведения:

$(U(x) \cdot V(x))' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$, где $U(x) = x^2; V(x) = e^{x^2}$.

Тогда

$$y' = \left(\frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 e^{x^2}\right)' \cdot \left(x^2 + 1\right) - x^2 e^{x^2} \cdot \left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2x \cdot e^{x^2} + x^2 e^{x^2} \cdot 2x\right)\left(x^2 + 1\right) - x^2 e^{x^2} \cdot 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{2x \cdot e^{x^2}\left[\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^2\right) - x^2\right]}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot e^{x^2}\left(x^4 + x^2 + 1\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \ln \sin^3 x$.

Решение. Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, получим

$$y' = \frac{1}{\sin^3 x} \cdot (\sin^3 x)' = \frac{1}{\sin^3 x} \cdot 3(\sin x)^2 \cdot (\sin x)' = \frac{3\cos x}{\sin x} = 3\mathrm{ctg}x.$$

Пример 8. $y = \ln\sqrt{\dfrac{\sin 3x}{1 + \sin 3x}}$. Вычислить $y'(\pi)$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$y=\ln\sqrt{\frac{\sin 3x}{1+\sin 3x}}=\frac{1}{2}(\ln\sin 3x-\ln(1+\sin 3x))=\frac{1}{2}(\ln 3+\ln x-\ln(1+\sin 3x)).$$

Затем дифференцируем функцию по формуле $(\ln u)'=\frac{1}{u}\,u'$:

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{(1+\sin 3x)'}{1+\sin 3x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}\right);$$

$$y'(\pi)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{3\cos 3\pi}{1+\sin 3\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{3(-1)}{1+0}\right)=\frac{1+3\pi}{2\pi}.$$

Пример 9. Найти производную функции $y=\cos^2(x^2)$.

Решение. Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, получим

$$y'=2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(\cos\left(x^2\right)\right)'=2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2\right)\right)'\cdot\left(x^2\right)'=-2x\cdot\sin\left(2x^2\right).$$

Задания для решения в аудитории

Вычислить производные функций:

1. $y=3x^2\sqrt{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+9\sqrt[3]{x^2}-6x+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$.

Указание. Каждое слагаемое записать в виде степенной функции с дробным показателем степени.

2. $y=\ln\cos 3x$ в точке $x=\frac{\pi}{12}$.
3. $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $y=\left(\cos^2 x+2/3\right)\cdot\sin^3 x$.
5. $y=(x^2-2x)\cdot\operatorname{tg}x$ в точке $x=0$.
6. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x^2}$.
7. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ в точке $x=\frac{\pi}{8}$.
8. $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)$.

9. $y=\ln\dfrac{x^2-2}{\sqrt{\left(6-2x^2\right)^3}}$.

Указание. Целесообразно предварительно выполнить логарифмирование $y=\ln\left(x^2-2\right)-\dfrac{3}{2}\ln\left(6-2x^2\right)$.

10. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

Ответы.

1. $y'=7x\sqrt[3]{x}-7\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+\dfrac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$. **2.** –3.

3. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

4. $y'=5\sin^2 x\cdot\cos^3 x$. **5.** 0. **6.** $y'=\dfrac{-2x}{2\cdot 2x^2+x^4}$. **7.** –1.

8. $y'=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}$. **9.** $y'=\dfrac{x^3}{\left(x^2-2\right)\left(3-x^2\right)}$.

10. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Индивидуальные задания

Найти производные данных функций, используя правила вычисления производных.

1. а) $y=\sqrt[3]{1-4x^3}-\dfrac{x-x^2}{\sin^2 x}$; б) $y=e^{\sqrt{x}}\operatorname{tg}^3 x$;

в) $y=(2x^5-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x^2}{2})^7$; г) $y=\ln\arcsin 3x$.

2. а) $y=(\dfrac{1}{2}x^4+e^{\cos x})\left(x^3-\ln x\right)$; б) $y\dfrac{4\sin^3 x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x$;

в) $y = \arccos e^{x^2}$;

г) $y = (3x^2 + \frac{5}{x} - 6\sqrt[3]{x^2})$.

3. а) $y = \frac{\sin x}{3 - x^2}$;

б) $y = \mathrm{ctg}^5 x - 2^{x^2}$;

в) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x^2 + 3}$;

г) $y = 5^{\sin x} \cdot \ln(2x^3 + 1)$.

4. а) $y = (3x + 5) \cdot \sqrt[3]{2 - x - 5x^3}$;

б) $y = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{4}{\sqrt{x^7}}$;

в) $y = \ln(x + 5^{x^2})$;

г) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

5. а) $y = \frac{4^x + 3x^2}{a^2 - ax - x^2}$;

б) $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^4 x + \sin x^2$;

в) $y = e^{\sqrt{x}} \cdot \mathrm{arctg} x^3$;

г) $y = \cos \ln(x + \lg x)$.

6. а) $y = \frac{2 + 2^{x^2}}{2 - 2^{x^2}}$;

б) $y = 2\arcsin^3 \sqrt{x}$;

в) $y = 3^{\mathrm{tg} x} \cdot (1 + \sqrt[3]{x^2})$;

г) $y = \left(e^{x^2} + x - x^3\right)^5$.

7. а) $y = \frac{2 - x}{\sqrt{x^2 + 3}} - \sqrt[3]{x^7} + 2x$;

б) $y = (\cos \ln x + 2) \cdot e^{\sqrt{x}}$;

в) $y = x \cdot \sqrt{x - x^2}$;

г) $y = \arccos^2 \sqrt{x}$.

8. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{5x^2+2}$;

б) $y=e^{x^2}\cdot(1+\mathrm{tg}^2x)$;

в) $y=2^{\mathrm{arctg}x}\cdot(x+3\sin x)$;

г) $y=\mathrm{ctg}^5\ln x$.

9. а) $y=\dfrac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $y=2^{x-x^3}\cdot\sqrt{\ln x}$;

в) $y=\ln\left(\sqrt[3]{3x^2+1}\right)$;

г) $y=10\mathrm{tg}^5x$.

10. а) $y=\dfrac{xe^x+1}{3x^5-3^x}$;

б) $y=\sqrt[4]{x^7}+\dfrac{1}{x^2}+10x^2$;

в) $y=(1-\mathrm{tg}^2 2x)\cdot\ln x$;

г) $y=\mathrm{arctg}e^{x^3}$.

11. а) $y=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+3}$;

б) $y=\dfrac{1}{5}\mathrm{ctg}^5x+2\ln x$;

в) $y=\mathrm{arctg}2^x\cdot(x^2-5x)$;

г) $y=e^{\sin x^2}$.

12. а) $y=\dfrac{3-\sin^2 x}{2x^3+2}$;

б) $y=\cos^5 x\cdot3^{-2x}$;

в) $y=\left(\arcsin x^3\right)^7$;

г) $y=\mathrm{tg}^4\dfrac{x}{4}\cdot\ln x$.

13. а) $y=2\sqrt{3x-x^2}+\ln(x+3x^2)$;

б) $y=e^{\sin x}\cdot\mathrm{arctg}x^5$;

в) $y=\dfrac{3\mathrm{ctg}x-5}{x^2+2x}$;

г) $y=e^{\arccos x^3}$.

14. а) $y=\dfrac{6x_2+5}{x-\sin 5x}$;

б) $y=\ln x\cdot\arcsin x^3$;

в) $y=(x\sqrt{x}+3x^3)^5$;

г) $y=\mathrm{arctg}10^x$.

15. а) $y=\dfrac{\sin^2 x+1}{2-x^3}$;

б) $y=\arccos^2 4x$;

в) $y=\sqrt[3]{1+e^x}\cdot\mathrm{arctg}x^2$;

г) $y=e^{x-x^2}+\dfrac{3x}{5x^2-3}$.

16. а) $y=\dfrac{2^x+3}{x+2^x}$;

б) $y=\ln^2(1-\cos x)$;

в) $y=\arcsin\sqrt{x}\cdot e^{x^2}$;

г) $y=\ln\sin x$.

17. а) $y=(x^3-\sin 3x)^5$;

б) $y=e^{x^3}\cdot\sqrt{\cos x}$;

в) $y=2^{\mathrm{arctg}x}\cdot\ln^2 x$;

г) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

18. а) $y=\dfrac{\sin^2 x-3x^5}{2x^3+5}$;

б) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^4 x\cdot\ln\left(x^2+1\right)$;

в) $y=\arccos\sqrt{1-x^4}$;

г) $y=3^{\mathrm{arctg}x}\cdot(e^x+2x)^5$.

19. а) $y = 2^{3-x^3} \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 2\ln(x+2) + 2\cos^5 x$;

в) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{\sin^3 x + 3}$; г) $y = e^{\arcsin x} - \ln(x+2)$.

20. а) $y = \dfrac{\sqrt{x} + \mathrm{ctg}^2 x}{1 - x^2}$; б) $y = 5^{\sin x} \cdot \left(\dfrac{1}{x^3} + 5x - 2\right)$;

в) $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}^3 \ln x$; г) $y = 5 \cdot \sqrt[5]{x-1} + \log_2(4x-1) - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

21. а) $y = \dfrac{2 + x - x^2}{2\sqrt{x} - 3}$; б) $y = \mathrm{tg}^2 x \cdot \arcsin\sqrt{x}$;

в) $y = 7^{\cos x} + (2x - e^x)^3$; г) $y = \log_3(x - \mathrm{tg}x)$.

22. а) $y = \dfrac{x}{x + \sqrt{x+5}}$; б) $y = 2^{\sin x} \cdot \mathrm{ctg}x$;

в) $y = 3 \cdot \sqrt[3]{3x - x^3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; г) $y = \dfrac{\arccos x + 3x}{5^{3x^2} + 2}$.

23. а) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 3^x}}$; б) $y = (e^{\sin x}\text{-}x) \cdot \mathrm{arctg}^3 x$;

в) $y = \ln\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{x^5}$; г) $y = 2^{\sqrt{\arcsin x}}$.

24. а) $y = \cos\ln^3 x$; б) $y = \mathrm{arctg}x \cdot \left(5x^2 - 3^x\right)$;

в) $y = \dfrac{\sin 2x - 1}{x + \cos 2x}$;   г) $y = e^{x^2} + \sqrt[5]{x^3}$.

25. а) $y = \dfrac{x - e^x}{\sqrt{10 - x}}$;   б) $y = \arcsin^2 x \cdot (3x + 1)^5$;

в) $y = \ln(4 - x^4) + \dfrac{5}{x^3}$;   г) $y = 4^{\mathrm{arctg} x} + \sqrt[3]{x^2}$.

6.2. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x) \cdot \Delta x$, т.е. $f'(x) \cdot \Delta x$ – главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy или $df(x)$. Из определения следует, что

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \text{ или } dy = f'(x) \cdot dx$$

Можно также записать $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала можно проиллюстрировать рис. 6.2.

Из треугольника ΔMKL $KL = dy = \mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$.

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

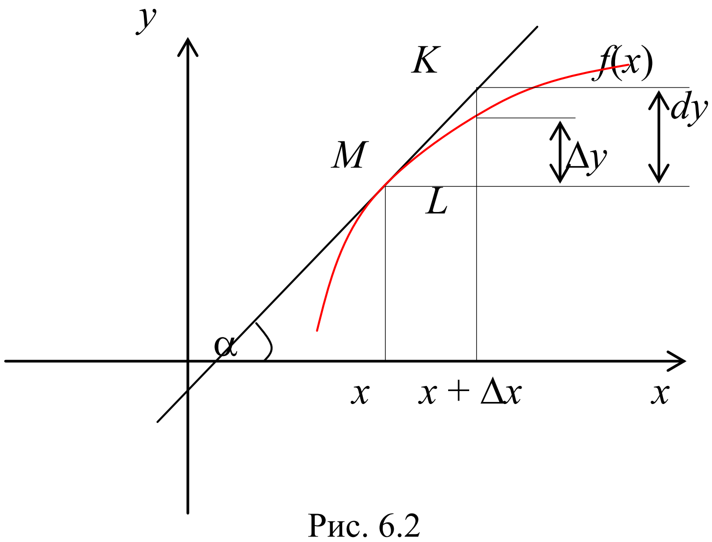

Рис. 6.2

Свойства дифференциала. Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$– функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1. $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$.
2. $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$.
3. $d(Cu) = Cdu$.
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

6.3. Правило Лопиталя

6.3.1. Теоремы о среднем

Теорема Ролля (Ролль (1652–1719) – французский математик).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равная нулю: $f'(\varepsilon) = 0$.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке, функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая: $M = m$ и $M \neq m$.

1. Пусть $M = m$. Тогда функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

2. Пусть $M \neq m$. Так как значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка $[a, b]$.

Обозначим через ε, $a < \varepsilon < b$, точку, в которой $f(\varepsilon) = M$. Так как M – наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка $\varepsilon + \Delta x$ находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \leq 0.$$

При этом

$$\frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0, & \text{если} \quad \Delta x > 0; \\ \geq 0, & \text{если} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$. Т.к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leq 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geq 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad \text{т.е.} \quad f'(\varepsilon) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε, такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Следствия теоремы Ролля:

1. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем

$$f(a) = f(b) = 0,$$

то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$, т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

2. Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $(n–1)$ - го порядка и n раз обращается в нуль, то существует

по крайней мере одна точка интервала, в котором производная ($n-1$) - го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа (Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – французский математик).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon).$$

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB (рис. 6.3).

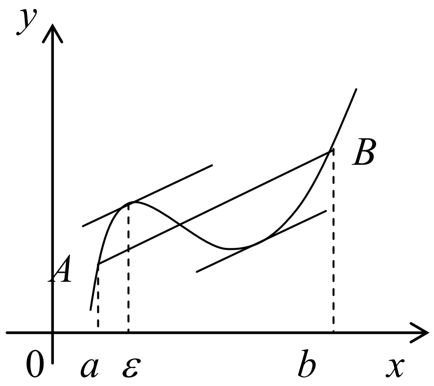

Рис. 6.3

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε, такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{сек\ AB}.$$

Уравнение секущей AB можно записать в виде

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). По теореме Ролля, существует хотя бы одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $F'(\varepsilon) = 0$.

Т.к. $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то $F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, следовательно,

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

что и требовалось доказать.

Теорема Коши (Коши (1789–1857) – французский математик).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)},$$

т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε.

Доказанная выше теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций.

6. 3.2.Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\left[\frac{0}{0}\right]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; [\infty \cdot 0]; [\infty^0]; [1^\infty]; [\infty - \infty].$$

Теорема (правило Лопиталя) (Лопиталь (1661–1704) – французский математик).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)},$$

где ε – точка, находящаяся между a и x. Учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Пусть при $x \to a$ отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками a и x, то при $x \to a$ получим $\varepsilon \to a$, а следовательно, и отношение $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу.

Таким образом, можно записать

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби, удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пусть $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$; $g(x) = e^x$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(2x+\frac{1}{x}\right)}{\left(e^x\right)}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

Решение. Пусть $g(x)=e^{\frac{3}{x}}-1$, а $f(x)=\pi-2\mathrm{arctg}x$. Тогда

$g'(x)=e^{\frac{3}{x}}\cdot\dfrac{-3}{x^2}$; $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left[\frac{\pi-2\cdot\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{3}{\infty}}-1}\right]=\left[\frac{0}{e^0-1}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{-3\left(1+x^2\right)e^{\frac{3}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{-3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)e^{\frac{3}{x}}}=\frac{-2}{-3(0+1)e^0}=\frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д., пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Решение. Пусть $g(x)=e^x-e^{-x}-2x$, а $f(x)=x-\sin x$. Тогда

$f'(x)=e^x+e^{-x}-2$; $g'(x)=1-\cos x$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left[\dfrac{1+1-2}{1-1}\right]=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x)=e^x-e^{-x};\ g''(x)=\sin x;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left[\frac{1-1}{0}\right]=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Получилась неопределенность. Применяем правило Лопиталя еще раз. Получим

$$f'''(x)=e^x+e^{-x};\ g'''(x)=\cos x;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

6.4. Исследование функции с помощью производных высших порядков

6.4.1. Возрастание и убывание функций

Теорема. 1. Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x)\geq 0$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x)>0$ для $a<x<b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

1. Если функция $f(x)>0$ возрастает, то

$f(x+\Delta x)>f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x+\Delta x)<f(x)$ при $\Delta x<0$.

Следовательно,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

Последнее неравенство и означает, что $f'(x)\geq 0$.

2. Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1<x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\varepsilon)(x_2-x_1),\ \text{где}\ x_1<\varepsilon<x_2.$$

По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2)-f(x_1)>0$, т.е. функция $f(x)$возрастает, что и требовалось доказать.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке [a, b], то $f'(x) \le 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

6.4.2. Экстремум функции

Определение. Точка $x = x_0$ называется **точкой локального максимума (минимума) функции** $f(x)$, если в δ - окрестности этой точки функция непрерывна и удовлетворяет неравенству

$f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема (необходимое условие существования экстремума).

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = c$ и точка $x = c$ является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = c$ максимум.

Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство

$f(c + \Delta x) < f(c)$, т.е. $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$.

Тогда

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0 \qquad \text{при} \quad \Delta x < 0;$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0 \qquad \text{при} \quad \Delta x > 0.$$

По определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c).$$

Значит, если $\Delta x \to 0$ при $\Delta x < 0$, то $f'(c) \ge 0$, а если $\Delta x \to 0$ при $\Delta x > 0$, то $f'(c) \le 0$.

Это возможно только в том случае, если при $\Delta x \to 0$ $f'(c) = 0$.

Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке $x = c$ минимум, теорема доказывается аналогично, что и требовалось доказать.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Теорема (достаточные условия существования экстремума).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a,b), который содержит критическую точку $x = c$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (за исключением, может быть, самой точки).

Если при переходе через точку $x = c$ слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", то в точке $x = c$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с "–" на "+", то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{при} \quad x < c; \\ f'(x) < 0, & \text{при} \quad x > c. \end{cases}$

По теореме Лагранжа

$f(x) - f(c) = f'(\varepsilon)(x - c)$, где $x < \varepsilon < c$.

Тогда 1. Если $x < c$, то $\varepsilon < c$; $f'(\varepsilon) > 0$ и $f'(\varepsilon) \cdot (x - c) < 0$, следовательно,

$f(x) - f(c) < 0$ или $f(x) < f(c)$.

2) Если $x > c$, то $\varepsilon > c$; $f'(\varepsilon) < 0$ и $f'(\varepsilon) \cdot (x - c) < 0$, следовательно,

$f(x) - f(c) < 0$ или $f(x) < f(c)$.

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(c)$ в любых точках вблизи c, т.е. c – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(1 - x)^2$.

Решение. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную y' и приравняем ее нулю.

$$y' = \left(x^2(1-x)^2\right)' = \left(x^2\right)'(1-x)^2 + x^2\left((1-x)^2\right)' = 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) =$$

$$= 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x) = 2x(1-x)[1 - x - x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1).$$

$y' = 0 \qquad$ при $x_1 = 0$; $\quad x_2 = 1$; $\quad x_3 = \dfrac{1}{2}$.

На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции: $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

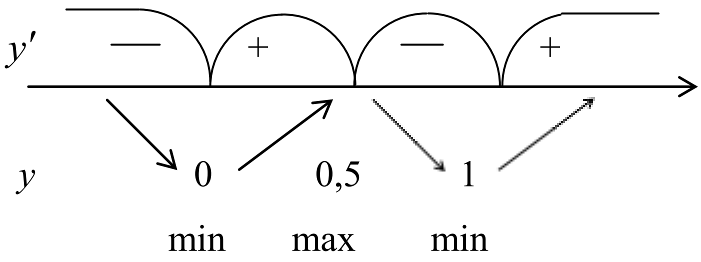

Рис. 6.4

$$y' = \left(x^2(1-x)^2\right)' = \left(x^2\right)'(1-x)^2 + x^2\left((1-x)^2\right)' = 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) =$$
$$= 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x) = 2x(1-x)[1-x-x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1).$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = \frac{1}{2}$.

На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции: $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

По рис. 6.4 видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = \frac{1}{2}$ – максимальное. Найдем эти значения:

$y_{\min}(0) = 0; \quad y_{\min}(1) = 0;$

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ответ. $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0; \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

6.4.3. Выпуклость графика функции. Точка перегиба

Определение. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a,b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз, – называется вогнутой (рис. 6.5).

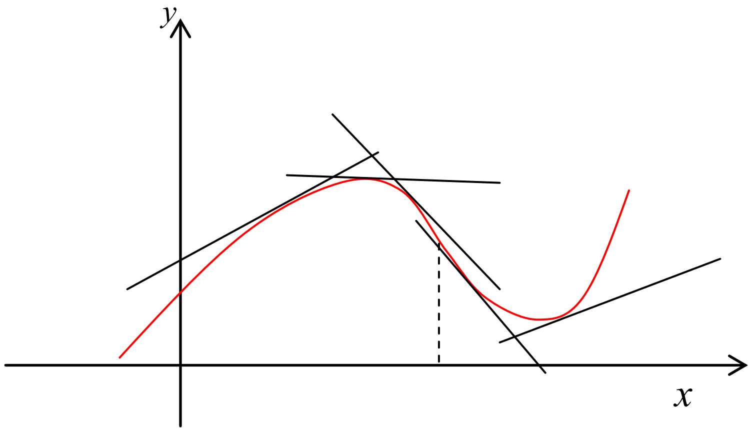

Рис. 6.5

Теорема. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла), если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ положительна, то кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью вниз (вогнута).

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: $y=f(x)$.

Уравнение касательной: $\bar{y}-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Следовательно, $y-\bar{y}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$.

По теореме Лагранжа, $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, следовательно,

$$y-\bar{y}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0), \text{ где } x_0<c<x.$$

Преобразуем

$$y-\bar{y}=(x-x_0)[f'(c)-f'(x_0)].$$

По теореме Лагранжа для $f'(c)-f'(x_0)$:

$y-\bar{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0), \qquad x_0<c_1<c.$

Пусть $x > x_0$, тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того, по условию

$f''(c_1)<0$, следовательно, $y-\bar{y}<0$.

Пусть $x < x_0$, тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$; т.к. по условию $f''(c_1)<0$, то $y-\bar{y}<0$. Следовательно, график функции лежит ниже касательной, т.е. кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Аналогично доказывается, что если $f''(x)>0$ на интервале (a, b), то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале (a, b), что и требовалось доказать.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба.**

Теорема (достаточные условия существования точек перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 – точка перегиба.

Пример. Найти точки перегиба функции $y = x\cdot e^{-x}$.

Решение. Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная y'' меняет знак, то сначала найдем y', затем y'' и приравняем y'' нулю.

$y'=\left(xe^{-x}\right)'=(x)'e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$;

$y''=(y')'=\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)'=-e^{-x}-\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)=-2e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2).$

$y''=0$ при $x=2$, так как $e^{-x}>0$ для всех x.

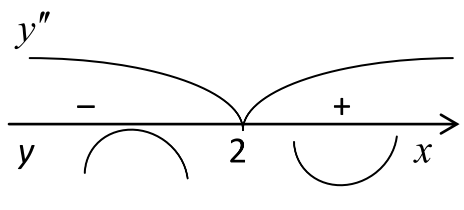

Рис. 6.6

Так как в точке $x=2$ y'' изменила знак, то функция y изменила выпуклость на вогнутость, т.е. $x=2$ – точка перегиба (рис. 6.6).

Ответ. $x=2$ – точка перегиба.

6.4.4. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая называется **асимптотой кривой**, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем ни в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$ (рис. 6.7). Её наклонная асимптота $y = x$.

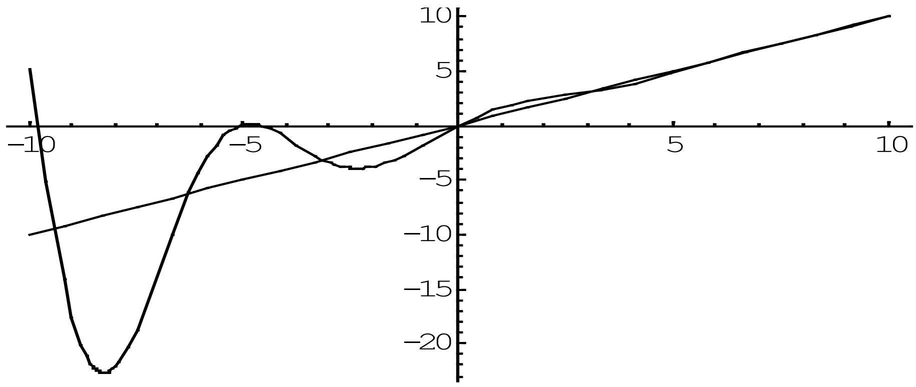

Рис. 6.7

Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

Определим вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

Определим наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

Из определения асимптоты следует

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Т.к. $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}k=k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-0=0$, следовательно,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]-\lim\limits_{x\to\infty}b=0$, следовательно,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Таким образом, прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота кривой, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$.
Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Пример. Найти асимптоты и построить схематично график функции $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение. 1. Вертикальные асимптоты:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to 0-0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=+\infty,$$

т.е. $y\to+\infty$ при $x\to 0-0$. Аналогично $y\to-\infty$ при $x\to 0+0$, следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота.

2. Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции (рис. 6.8).

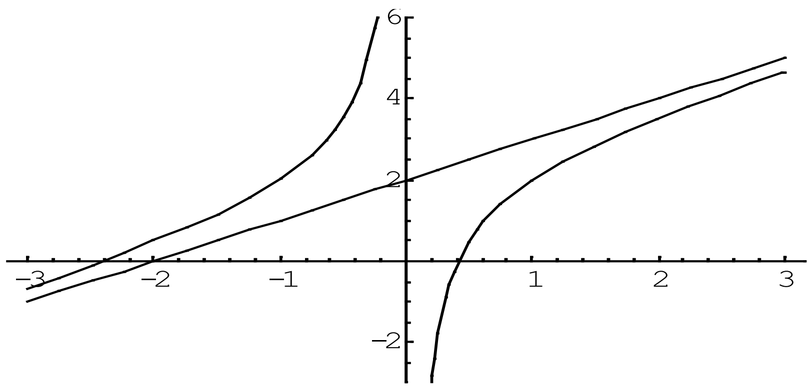

Рис. 6.8

6.4.5. Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции исследование проводят в следующей последовательности:

1. Определить область существования функции (это понятие включает в себя и область значений, и область определения функции).

2. Исследовать функцию на четность и нечетность. Тригонометрические функции исследовать на периодичность.

3. Исследовать функцию на непрерывность, определить характер точек разрыва (если они имеются).

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции. Определить экстремумы.

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости. Определить точки перегиба функции.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

8. Построить график.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение. 1. Находим область существования функции. Очевидно, что областью определения функции является область $(-\infty;-1) \cup (-1;\, 1) \cup (1;\, \infty)$.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty;\, \infty)$.

2. Исследуем функцию на четность или нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x).$$

Функция является нечётной, т.е. симметрична относительно начала координат.

3. Исследуем функцию на непрерывность, определим характер точек разрыва. Точками разрыва функции являются точки $x = 1$; $x = -1$.

В свою очередь видно, что прямые $x = 1$; $x = -1$ являются вертикальными асимптотами кривой.

4. Найдём интервалы возрастания и убывания функции. Определим экстремумы. Находим критические точки.

Для этого необходимо найти производную функции:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = 1$; $x = -1$.

Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

На промежутке $-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает;

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает;

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает;

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает;

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает;

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$ функция возрастает;

Точка $x=-\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x=\sqrt{3}$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. Найдём интервалы выпуклости и вогнутости. Определим точки перегиба функции.

Для этого необходимо найти вторую производную функции:

$$y''=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty<x<-\sqrt{3}$, $y''<0$, кривая выпуклая;
$-\sqrt{3}<x<-1$, $y''<0$, кривая выпуклая;
$-1<x<0$, $y''>0$, кривая вогнутая;
$0<x<1$, $y''<0$, кривая выпуклая;
$1<x<\sqrt{3}$, $y''>0$, кривая вогнутая;
$\sqrt{3}<x<\infty$, $y''>0$, кривая вогнутая.

6. Найти асимптоты графика функции.

Про вертикальные асимптоты было уже сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты – $y=x$.

Построим график функции (рис. 6.9).

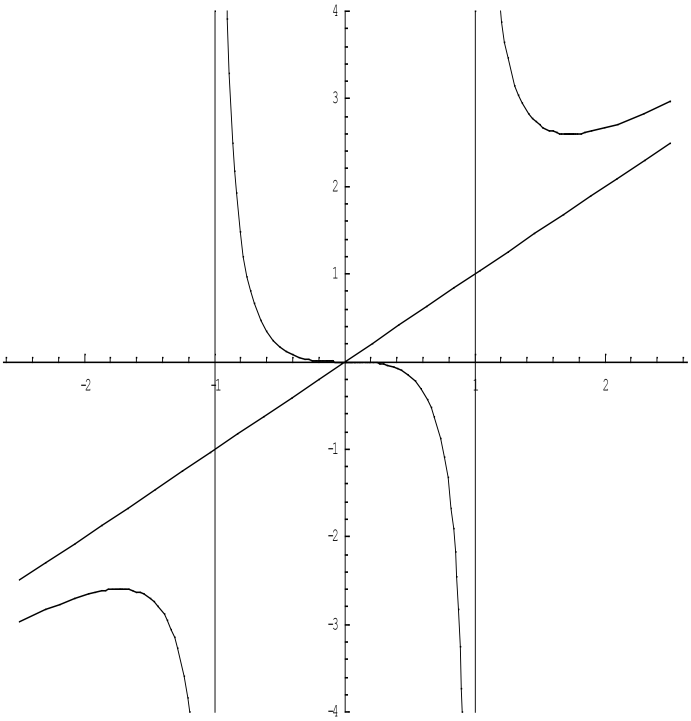

Рис. 6.9

Задания для решения в аудитории

1. Исследовать функции на возрастание и убывание:
а) $y = x^3 + 3x^2 + 3$; б) $y = x^3 - 3x + 5$.
2. Исследовать на максимум и минимум функции:
а) $y = x^3 - 12x$; б) $y = 3 + 2x^2 - x^4$; в) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; г) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.
3. Определить направление выпуклости и точки перегиба кривых:
а) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; б) $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
4. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x + 2}$.
5. Исследовать функции и построить их графики:
а) $y = x^3 - \dfrac{1}{4}x^4$; б) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$; в) $y = \dfrac{4x^3}{x^3 - 1}$.

Ответы.

1. а) функция возрастает при $x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$ и убывает при $x \in (-2,0)$; б) функция возрастает при $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ и убывает при $x \in (-1,1)$. **2.** а) $y_{\max} = y(-2) = 16$; $y_{\min} = y(2) = -16$; б) $y_{\max} = = y(\pm 1) = 4$; $y_{\min} = y(0) = 3$; в) $y_{\min} = y(e) = e$; г) $y_{\max} = = y(2) = \dfrac{4}{e^2}$; $y_{\min} = y(0) = 0$. **3.** а) точка перегиба $(1;2)$; при $x \in (-\infty,1)$ кривая выпукла вверх, а при $x \in (1,+\infty)$ выпукла вниз; б) точки перегиба $(-3;294)$ и $(2;114)$; при $x \in (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)$ кривая выпукла вверх, а при $x \in (-3,2)$ выпукла вниз. **4.** $x = -2$ и $y = 2x - 4$. **5.** а) функция определена и непрерывна на всей числовой оси. График пересекает оси координат в точках $(0;0)$ и $(4;0)$. Асимптот нет. $y_{\max} = y(3) = \dfrac{27}{4}$. Точки перегиба $(0;0)$ и $(2;4)$; б) функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 2$, которая является точкой бесконечного разрыва. График пересекает оси координат в точках $(-1;0)$ и $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$. Асимптоты $x = 2$ и $y = x + 4$. $y_{\max} = y(-1) = 0; y_{\min} = y(5) = 12$. Точек перегиба нет; в) функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$, которая является точкой бесконечного разрыва. График пересекает оси координат в точке $(0;0)$. Асимптоты $x = 1$ и $y = 4$.Точек экстремума нет. Точки перегиба $(0;0)$ и $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}};\dfrac{4}{3}\right)$.

Индивидуальные задания

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график.

1. а) $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - 1$; б) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

2. а) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - 10x + 1$; б) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

3. а) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 2$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

4. а) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$; б) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.

5. а) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + \dfrac{4}{3}$; б) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

6. а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$; б) $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$.

7. а) $y=x^4-2x^3+1$; б) $y=\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}$.

8. а) $y=x^5-5x^3+1$; б) $y=\frac{x^2-5}{x-3}$.

9. а) $y=3x^4-4x^3+1$; б) $y=\frac{x^2-1}{x-3}$.

10. а) $y=x^4-3x^2+4$; б) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

11. а) $y=(x-1)^2(x+3)$; б) $y=\frac{x^2+x}{x-1}$.

12. а) $y=(x+2)^2(x-1)$; б) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

13. а) $y=x^4-4x^2+5$; б) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

14. а) $y=x^4-8x^2+16$; б) $y=\frac{x^3+3}{x^2-4x}$.

15. а) $y=2+x^2-\frac{x^4}{4}$; б) $y=\frac{x^3}{x^2-9}$.

16. а) $y=\frac{x^4}{4}-2x^2+2$; б) $y=\frac{x^2+5}{x}$.

17. а) $y=(x+1)^2(x+2)$; б) $y=\frac{x^3-4}{4x^2}$.

18. а) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-1$; б) $y=\frac{x^2-5x}{x+1}$.

19. а) $y=4x^2-x^4-3$; б) $y=\frac{3-x^2}{x-2}$.

20. а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1$; б) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

21. а) $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+1$; б) $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$.

22. а) $y=\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-x+2$; б) $y=\frac{4+x^3}{x^2}$.

23. а) $y=\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-2x+1$; б) $y=\frac{x^2-5x+3}{x+2}$.

24. а) $y=(x-2)^2(x+3)$; б) $y=\frac{x^2}{x-1}$.

25. а) $y=\frac{5x^3}{3}-2x^2-x+2$; б) $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$.

Теоретические задания по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»

1. Предел функции на бесконечности.
2. Предел функции в точке.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
4. Основные теоремы теории пределов.
5. Первый замечательный предел.
6. Второй замечательный предел.
7. Эквивалентные бесконечно малые функции.
8. Непрерывность функций. Классификация точек разрыва.
9. Основные теоремы о непрерывных на отрезке функциях.
10. Производная функции.
11. Производная функция. Определение.
12. Основные правила дифференцирования.
13. Производные обратных тригонометрических функций.
14. Производная сложной функции.
15. Дифференциал функции.
16. Свойства дифференциала функции.
17. Теоремы Ферма, Ролля, Логранжа, Коши.
18. Правило Лопиталя.
19. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.
20. Локальный экстремум функции.
21. Вогнутость и выпуклость графика функции.
22. Необходимые и достаточные условия существования точек перегиба.
23. Асимптоты графика функции.

Библиографический список

1. Журбенко, Л. Н. Математика : учебное пособие/ Л. Н. Журбенко, Ю. М. Данилов [и др.].– Москва : ИНФРА-М, 2016. – 496 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика : учебник/ Я. С. Бугров. – 7-е изд.– Москва : Юрайт, 2018. – Т.3.– 288 с. – ISBN 978-5-9916-8643-3.

3. Руппель, Е.Ю. Задачник-практикум по математике : учебное пособие / Е.Ю. Руппель, Т.Е. Болдовская, С.В. Матвеева. – Омск : СибАДИ, 2013. – Ч. 2. – 116 с.

4. Болдовская, Т.Е. Задачник-практикум по математике : учебное пособие/ Т.Е. Болдовская, С.В. Матвеева, Е.Ю. Руппель. – Омск : СибАДИ, 2013. – Ч. 1. – 115 с.

5. Карасёва, Р.Б. Математика : практикум для студентов технических направлений заочной формы обучения/ Р. Б. Карасева, С. В. Матвеева, Е. Ю. Руппель – Омск : СибАДИ, 2016. –URL: http://bek.sibadi.org/MegaPro/Web (дата обращения: 12.04.18). – ISBN 978-5-93204-862-7.

6. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев.– Москва : Астрель, 2008. –654 с.

7. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н.С. Пискунов.– Москва : Интеграл - пресс, 2006.– Т.1,2.

8. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис.– Москва : Лань, 2007.– 688 с.

9. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс : учебник/ Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. − 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 960 с.

10. Руппель, Е.Ю. Интеграл и его приложения к решению инженерных задач с применением возможностей MS OFFICE : учебное пособие/ Е.Ю. Руппель.– Омск : СибАДИ, 2021.– 183 с.

11. Руппель, Е.Ю. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их применение к составлению простейших математических моделей : учебное пособие/ Е.Ю. Руппель.– Омск : СибАДИ, 2021.– 183 с.