ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

1. Выполнить действия над матрицами: $A \cdot A^T \cdot B - 2E$**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицы A, B – квадратные, одного порядка, поэтому умножение матриц возможно. Транспонируем матрицу A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим произведения матриц:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+1 & 2+1+0 & 3+3+0 \\ 2+1+0 & 4+1+0 & 6+3+0 \\ 3+3-1 & 6+3+0 & 9+9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^T \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+6+6 & 3+0-6 & 6+9-6 \\ 3+10+9 & 3+0-9 & 6+15-9 \\ 5+18+18 & 5+0-18 & 10+27-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 9 \\ 22 & -6 & 12 \\ 41 & -13 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot A^T \cdot B - 2E = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 9 \\ 22 & -6 & 12 \\ 41 & -13 & 19 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 9 \\ 22 & -8 & 12 \\ 41 & -13 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A \cdot A^T \cdot B - 2E = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 9 \\ 22 & -8 & 12 \\ 41 & -13 & 17 \end{pmatrix}.$

2. Решить систему линейных уравнений
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса.
Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0; \\ 2x + y + z = 4; \\ 3x - y - z = -1. \end{cases}$$

Решение. а) Находим определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Делаем разложение по третьей строке:

$$= 5 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (4 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 20 \neq 0 \Rightarrow$$

Система крамеровская, имеет единственное решение.
Ищем вспомогательные определители:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Делаем разложение по третьей строке:

$$= 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (3 - (-1)) = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{12}{20}.$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

Делаем разложение по третьему столбцу:

$$= 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 20) = 11 \Rightarrow y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{11}{20}.$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

Прибавим ко второму столбцу третий, умноженный на (-1). Затем первую строку определителя прибавим ко второй строке:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

Делаем разложение по второму столбцу

$$= 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-3 - 12) = 45 \Rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{45}{20}.$$

Проверка:

1) $\frac{12}{20} + 3 \cdot \frac{11}{20} - \frac{45}{20} = 0$ – верно;

2) $2 \cdot \frac{12}{20} + \frac{11}{20} + \frac{45}{20} = 4$ – верно;

$$3)\ 3\cdot\frac{12}{20}-\frac{11}{20}-\frac{45}{20}=-1$$ – верно.

Ответ: $x=\frac{12}{20};\ y=\frac{11}{20};\ z=\frac{45}{20}.$

б) Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x+3y-z=0; \\ 2x+y+z=4; \\ 3x-y-z=-1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы и приведём её к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \end{array}\right).$$

Выписываем систему по получившейся матрице:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=0 \\ -5y+3z=4 \\ -4z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{9}{4}=\frac{45}{20}.$$

Подставляем z во второе уравнение и находим y:

$$-5y+3\frac{45}{20}=4;$$

$$-5y=-\frac{55}{20};$$

$$y = \frac{55}{5 \cdot 20} = \frac{11}{20}.$$

Подставляем в первое уравнение z и y:

$$x + 3\frac{11}{20} - \frac{45}{20} = 0;$$
$$x = \frac{12}{20}.$$

Ответ: $x = \frac{12}{20}$; $y = \frac{11}{20}$; $z = \frac{45}{20}$.

3. Дана сила $\vec{F}$, точки A и B: $\vec{F}\{-5, -1, -4\}$; $A(-2, 3, 6)$; $B(1, 5, -3)$.

а) Какую работу производит сила $\vec{F}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки A в точку B.

б) Определить момент силы $\vec{F}$ относительно точки B.

Решение. а) Работа силы равна скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\overline{AB} = \{1+2;\ 5-3;\ -3-6\} = \{3;\ 2;\ -9\}$.

Находим работу:

$$A = \overline{F} \cdot \overline{AB} = -5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + (-4) \cdot (-9) = -15 - 2 + 36 = 19.$$

б) Момент силы $\vec{F}$, приложенной к точке A относительно точки B это вектор, равный векторному произведению вектора перемещения $\overline{BA} = \{-3;\ -2;\ 9\}$ на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{F}_0 = \overline{BA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 9 \\ -5 & -1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= i \cdot (8+9) - j \cdot (12+45) + k \cdot (3-10) = 17i - 57j - 7k.$$

Ответ. A=19; $\overline{F_0} = 17i - 57j - 7k$.

4. Даны координаты точек A_1, A_2, A_3, A_4

$A_1(0,1,2)$; $A_2(3,1,-1)$; $A_3(2,1,4)$; $A_4(2,-2,2)$.

а) Вычислить объём тетраэдра $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$;
б) составить уравнение плоскости $A_1\;A_2\,A_3$;
в) составить уравнение прямой $A_3\,A_4$.

Решение. а) Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4:

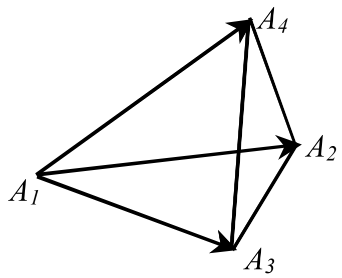

Рис. 1

Находим координаты векторов, образующих тетраэдр (пирамиду) (рис.1):

$$\overline{A_1A_2} = \{3,0,-3\};$$
$$\overline{A_1A_3} = \{2,0,2\};$$
$$\overline{A_1A_4} = \{2,-3,0\}.$$

Находим объем:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2}\;\overline{A_1A_3}\;\overline{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|(18+18)\right| = \frac{36}{6} = 6\left(\text{ед}^3.\right).$$

б) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим координаты точек:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 3-0 & 1-1 & -1-2 \\ 2-0 & 1-1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Упрощаем:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляем определитель, раскладывая его по первой строке, получаем

$$x\cdot(0-0)-(y-1)\cdot(6+6)+(z-2)\cdot(0-0)=0;$$
$$-12\cdot(y-1)=0;$$
$$y=1.$$

в) составить уравнение прямой $A_3\,A_4$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки имеет канонический вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставим координаты точек, получим:

$$\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-1}{-2-1}=\frac{z-4}{2-4},$$

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-4}{-2}.$$

Ответ. а) объем тетраэдра равен 6 ед. куб.; б) уравнение плоскости имеет вид $y=1$; в) каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-4}{-2}.$$

5. Назвать кривую, построить $4x^2+y^2+16x-4y=0$.

Решение. Имеем уравнение кривой 2-го порядка.
Преобразуем уравнение, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2+4x)+(y^2-4y)=0;$$

$$4(x^2+2\cdot 2x+2^2)-4\cdot 2^2+(y^2-2\cdot 2y+2^2)-2^2=0;$$

$$4(x+2)^2+(y-2)^2=20;$$

$$\frac{(x+2)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{20}=1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса с осями, параллельными координатным осям и координатами центра (–2,2). Для построения кривой перенесем начало координат в точку (–2,2). Полуоси эллипса равны: $a=\sqrt{5}$; $b=\sqrt{20}$. Отложим от точки (–2,2) расстояние $a=\sqrt{5}$ вправо и влево, расстояние $b=\sqrt{20}$ вверх и вниз. Получим четыре точки, через которые проходит эллипс. Теперь строим кривую (рис.2) .

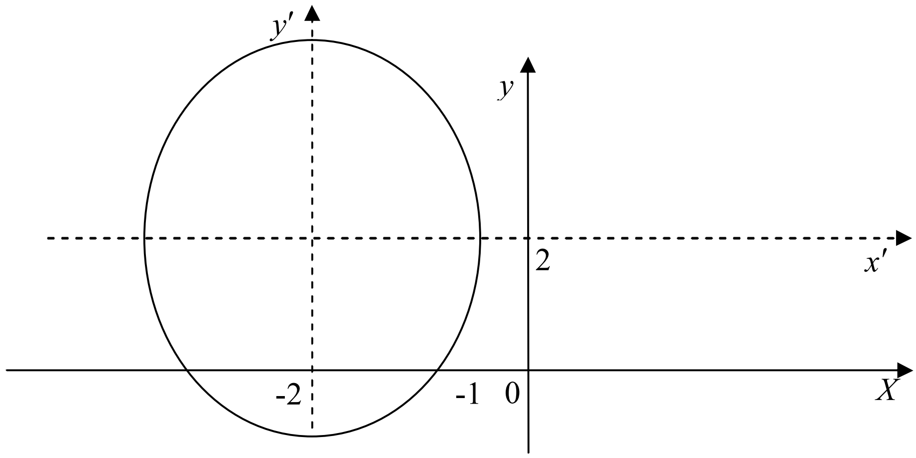

Рис. 2

6. Найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}$.

Решение. В данном случае имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень x относительно числителя и знаменателя, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{1-0-0}{3+0-0}=\frac{1}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x-14}$.

Решение. В данном случае имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, преобразуем данную функцию, предварительно разложив на множители числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+7)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+7}=\frac{4}{9}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sin^2 5x}$.

Решение. В данном случае имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, приведём данную дробь к виду, который допускал бы применение первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2 5x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{25}\cdot\frac{(5x)^2}{(\sin 5x)^2}\right)=\frac{1}{25}\left(\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2=\frac{2}{25}\cdot 1^2=\frac{2}{25}.$$

Замечание. При выполнении этого задания можно использовать эквивалентность бесконечно малых функций.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2 5x}=\left[\sin x\sim x, x\to 0\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{(5x)^2}=\frac{2}{25}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^x$.

Решение. В данном случае имеем неопределённость вида 1^∞. Чтобы раскрыть её, приведём данную дробь к виду, который допускал бы применение второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{-4}}\right)^{\frac{x+2}{-4}}=e\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+2}}=e^{-4}\quad.$$

7. Найти производные функций.

а) $y=\dfrac{e^x-2^x}{2}$.

Решение. Используем правило вынесения постоянного множителя за знак производной и правило дифференцирования разности:

$$y'=\left(\frac{e^x-2^x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\left(e^x\right)'-\left(2^x\right)'\right)=\frac{1}{2}\left(e^x-2^x\ln 2\right)=\frac{e^x-2^x\ln 2}{2}.$$

б) $y=\ln\sqrt{\cos x}$.

Решение. Используем правило дифференцирования сложной функции: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'(g)\cdot g'(x)$.

$$y'=\left(\ln\sqrt{\cos x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot(\sqrt{\cos x})'=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(\cos x)'=$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos x}=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Заметим, что этот результат можно было получить, представив функцию в виде $\frac{1}{2}\ln\cos x$.

в) $y=e^{-x}\ln x$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования произведения двух функций и производной сложной функции. Получим

$$y'=(e^{-x}\ln x)'=(\mathrm{e}^{-x})'\ln x+e^{-x}(\ln x)'=-e^{-x}\cdot\ln x+\frac{e^{-x}}{x}.$$

г) $y=\arccos\dfrac{1}{x^3}$.

Решение. Используем формулу производной сложной функции. Получим

$$y' = (\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2})' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \cdot (\frac{1}{x^2})' = \frac{x^4}{x^4+1} \cdot (-\frac{2}{x^3}) = -\frac{2x}{x^4+1}.$$

8. Исследовать функцию с помощью производных и построить ее график $y = \frac{x^3+4}{x^2}$.

Решение.

1. Находим область определения: $x \neq 0$.

2. Исследуем на четность. $f(-x) \neq \pm f(x)$, следовательно, функция общего вида.

3. Находим точки пересечения с координатными осями: с осью Ox:

$y = 0$; то есть $\frac{x^3+4}{x^2} = 0$. Решений уравнения нет, то есть график не имеет пересечений с осью Ox. Ищем пересечения с осью Oy, для этого полагаем $x = 0$. Значение $x = 0$ для данной функции невозможно по области определения. Точек пересечения с осью Oy не существует.

4. Исследуем на непрерывность. Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 0$. x=0 – точка разрыва II рода, т.к.

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty.$$

5. Находим асимптоты графика функции.

Так как в точке x=0 функция имеет бесконечный разрыв:

$$\lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty,$$

то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты ищем в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота $y = x$.

6. Находим интервалы монотонности функции и точки экстремума.

$$y' = 1-\frac{8}{x^3};\quad y' = 0 \text{ при } x = 2;\; y' = \infty \text{ при } x = 0.$$

Стационарная критическая точка $x = 2$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	∞	-	0	+
y	возрастает	не сущ.	убывает	3	возрастает

Таким образом, точка (2, 3) является точкой минимума.

Экстремум функции $y_{\min} = 3$.

7. Находим интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Находим вторую производную.

$y'' = \dfrac{24}{x^4} > 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция вогнутая на всей области определения.

8. Построим график функции, начертив сначала наклонную асимптоту , отметив точку экстремума и точку пересечения с осью *Ox* (рис.3).

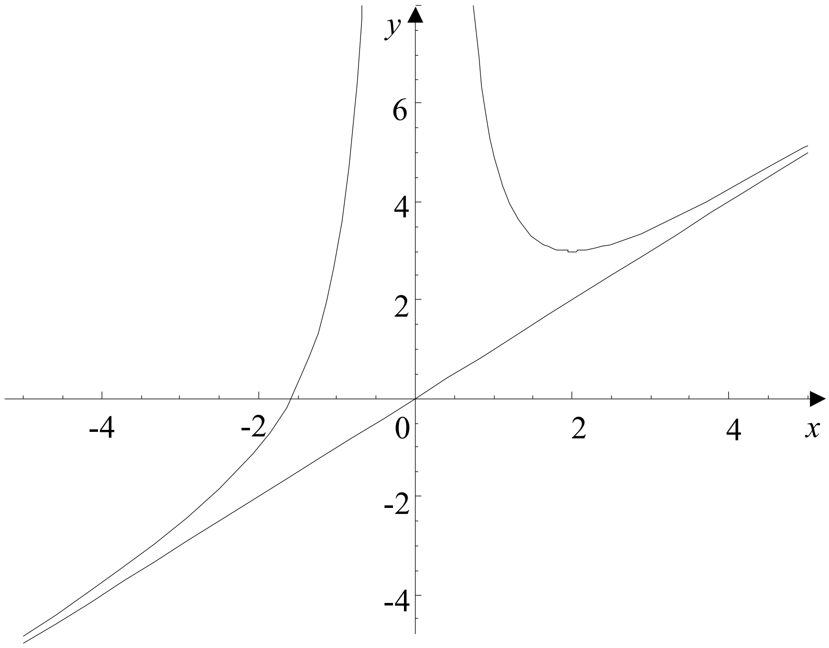

Рис. 3