Лекция по теории вероятностей

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- Теория вероятности возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности. Теория вероятности изучает данные закономерности.
- Событием (или случайным событием) называется всякий факт, который в результате опыта (эксперимента) может произойти или не произойти. Обозначаются события А, В, С, … или $A_1, A_2, \ldots$
- Достоверным событием называется событие, которое в результате опыта непременно должно произойти, а невозможным – событие, которое в результате опыта не может произойти.
- Два события называются противоположными, если появление одного из них исключает появление другого ,обозначают
- A и $\overline{A}$

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

- **Несовместными событиями** называются такие события, если появление одного из них в одном и том же испытании полностью исключает появление других, в противном случае события называются совместными.
- Например, при бросании игральной кости событие *A* – “выпадает количество очков, равное 1 или 2” и событие *B* – “выпадает количество очков, равное 4 или 5” несовместны.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

- Вероятностью случайного события А называется отношение числа элементарных равновозможных событий, благоприятствующих наступлению события А, к числу элементарных равновозможных событий:

.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

- Данное определение является классическим.

Вероятность любого события $0 \le P(A) \le 1$

- Пример. В урне 3 белых и 9 чёрных шара, из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар оказался чёрным ?
- Решение. Число случаев, благоприятствующих событию А, равно 9. Число всех равновозможных случаев равно 12 (9+3). Следовательно, .

$$P(A)=9/12=0,75$$

- При вычислении вероятностей событий применяют формулы комбинаторики:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \text{ число сочетаний,}$$

$$P_n = n! \text{ число перестановок, где}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n \text{ знак факториала}$$

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

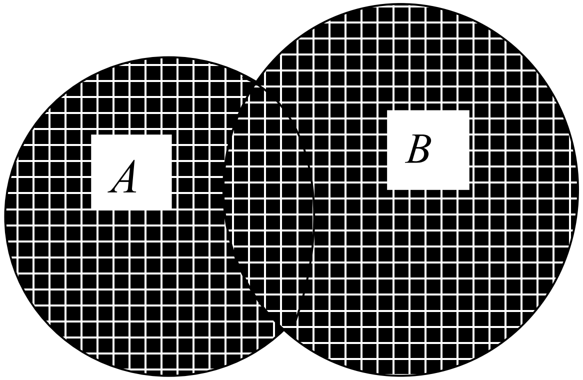
- **ПРИМЕР.** В урне 4 белых и 7 чёрных шаров. Из урны одновременно вынимают три шара. Какова вероятность того, что среди них два шара белые (событие *A*)?
- **Решение.** Найдём число элементарных равновозможных событий:
- $$n = C_{11}^{8} = \frac{11!}{(11-3)!\,3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot1\cdot2\cdot3} = 165$$
- Число случаев, благоприятствующих событию *A*, можно определить по формуле
$$m = C_4^2 \cdot C_7^1 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!}\cdot7 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2}\cdot7 = 42$$
- т. к. белых шаров 4, а выбираем из них 2, а третий шар берём из семи чёрных, то
$$p = \frac{m}{n} = \frac{42}{165} = 0.26$$

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

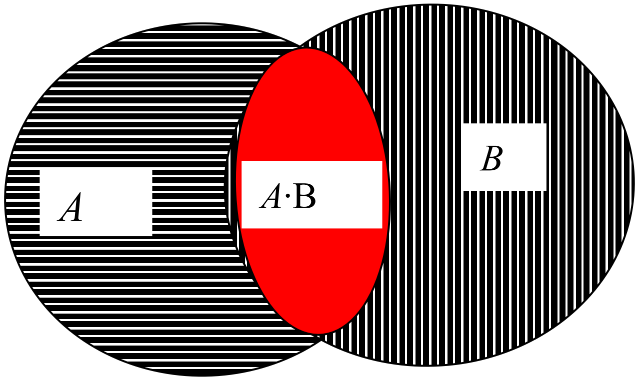
- **Суммой** двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного события: *A* или *B*. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий
- **Произведением** двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном появлении события *A* и события *B*. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий
- **Условной вероятностью** события *A* относительно события *B* называется вероятность события *A*, вычисленная в предположении, что имело место событие *B.* Эта вероятность обозначается

$$P = P(A/B)$$

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ



Сумма событий



Произведение событий

$$1.\ A + B = B + A;$$

$$2.\ (A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C;$$

$$3.\ A\cdot\overline{A} = \Theta\ \textit{невозм.соб.};\ 4.\ A + \overline{A} = \Omega\ \textit{достов.соб.};$$

$$5.\ A + A = A;\ 6.\ A\cdot A = A$$

Теоремы сложения и умножения вероятностей

- *1. Вероятность суммы* двух несовместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- 2. Если события *A* и *B* совместны, вероятность их суммы вычисляется по формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

- **3. Вероятность произведения двух** независимых
- событий равна $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$
- 4. **Вероятность произведения двух** зависимых
- событий равна

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

- 5. $P(A)=1-P(\overline{A})$ *и наоборот* $P(\overline{A})=1-P(A)$

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример. В ящике лежит 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика наудачу дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятности того, что оба раза была извлечена стандартная деталь.

Решение.

По теореме произведения зависимых событий

$$P(A) = \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = 0.509 \approx 0.51.$$

ПОВТОРЕНИЕ ОПЫТОВ

Пусть эксперимент состоит в проведении n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти с вероятностью p некоторое событие *A* (назовем его “успехом”, тогда событие $\overline{A}$ соответственно “неуспех”).

$$\text{Вероятность неуспеха } q = 1 - p$$

- Обозначим вероятность $P_n(\kappa)$ того, что в испытаниях произойдёт ровно k успехов , тогда
- её можно найти по формуле Бернулли:

$$P_n(к) = C_n^к p^к q^{n-к}, \text{ где число опытов } n \leq 10$$

- Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях $np - q \leq m_0 \leq np + p$

Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, то есть $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

И известны условные вероятности $P(A/H_i)$,

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

- **Пример.** В урне 20 шаров: 15 белых и 5 чёрных. Вынули подряд 5 шаров, причём каждый вынутый шар возвращали в урну, и перед извлечением следующего шары в урне тщательно перемешивались. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет два белых.
- **Решение.** Вероятность появления белого шара в каждом испытании $p = {}^{15}\!/_{20}$,а вероятность
- непоявления белого шара (неуспеха) $q = 1 - p = {}^{1}\!/_{4}$
- . По формуле Бернулли находим
-

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3^2}{4^4} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 23}\cdot\frac{3^2}{4^4} = \frac{45}{512}.$$

Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Тогда вероятность события A находят по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

События H_i называются гипотезами.

Если после наступления события надо пересчитать вероятности гипотез, то применяют формулы Бейеса

$$P\left({}^{H_i}\!/_{A}\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left({}^{A}\!/_{H_i}\right)}{P(H)P\left({}^{A}\!/_{H_1}\right) + \ldots + P(H_n)P\left({}^{A}\!/_{H_n}\right)}$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

- Величина *X* называется ***случайной величиной***, если в результате опыта она принимает с определённой вероятностью то или иное значение, зависящее от исхода опыта.
- Случайная величина называется **непрерывной**, если её возможные значения непрерывно заполняют какой-либо интервал или интервалы.
- Случайная величина называется **дискретной**, если её возможные значения можно пронумеровать..
- Случайная величина *X* может быть задана:
- 1) рядом распределения (дискретная случайная величина);
- 2) функцией распределения (дискретная и непрерывная случайные величины);
- 3) плотностью распределения (непрерывная случайная величина).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рядом распределения дискретной случайной величины называется таблица, в верхней строке которой расположена совокупность всех возможных значений x_i ,а в нижней - соответствующие им вероятности $P_i = P(X = x_i)$

Вероятности удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$,

число возможных значений может быть конечным или бесконечным.

Функцией распределения случайной величины называется функция $F(x) = P(x < X)$

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется функция $f(x) = F'(x)$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

- Математическим ожиданием, или средним значением случайной величины *X*, называется число
- $M(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i P_i$, если X- дискретная случайная величина.
- Математическое ожидание является числом, характеризующим определённое свойство случайной величины, а именно – устойчивость среднего арифметического полученных в результате испытаний значений. Другими словами, математическое ожидание – это самое наивероятнейшее значение, которое может принять случайная величина.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

- Дисперсией случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания. $D(X)=M(X-M(X))^2$
- Обозначим для краткости $M(X)=\overline{x}$,тогда для

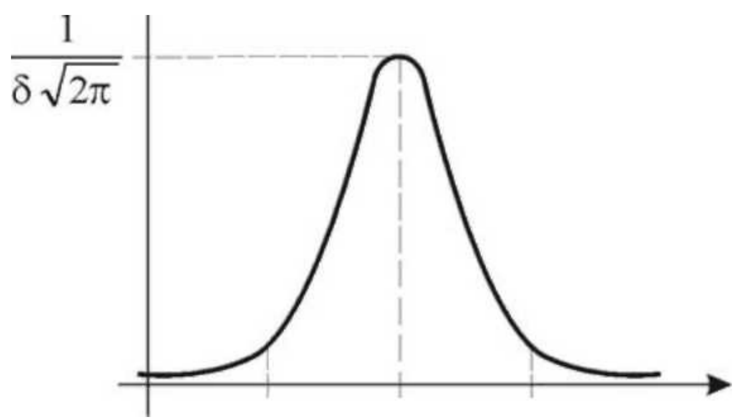
дискретной случайной величины $D(X)=\sum_{l=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2p_i$

Часто вместо обозначения D(X) применяется также обозначение $\sigma^2(X)$ Величину $\sigma=\sqrt{D(x)}$ называют средним квадратическим отклонением или стандартом.

ВАЖНЕЙШИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- 1. *Нормальный закон распределения.*
- Функция плотности распределения задается формулой

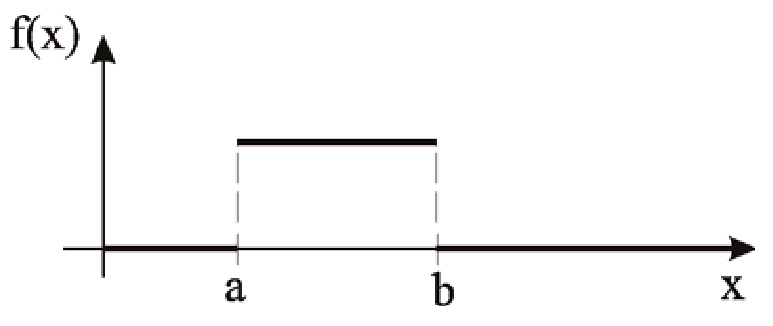
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\tilde{\bar{\delta}})^2}{2\sigma^2}}$$

- График функции называют нормальной кривой или кривой Гаусса
- 

ВАЖНЕЙШИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- 2. Равномерный закон распределения.
- Функция плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b]; \\ \dfrac{1}{b - a}, & x \in [a, b] \end{cases}$$



ВАЖНЕЙШИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- 3. Показательный закон распределения.
- Функция плотности определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \lambda \cdot e^{-\lambda}, \ x \geq 0. \end{cases}$$