ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекция 1

Матрицы и действия над ними

Матрицы и действия над ними

Матрицей размерностью $m \times n$ называется прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов, состоящая из чисел и иных математических выражений. Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{i\,j}\right)_{m \times n}$$

где $i = \overline{1,m}$ – номер строки, $j = \overline{1,n}$ – номер столбца, a_{ij} – элементы матрицы.

Специальные виды матриц

если $m = n$, то матрица называется квадратной;

квадратная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной

матрица $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{rr} \end{pmatrix}$ называется диагональной

Действия над матрицами

1.Сложение матриц одинаковой размерности

$$C_{m,n} = A_{m,n} + B_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})$$

2. Умножение матрицы на число α

$$C_{m,n} = \alpha A_{m,n} = (\alpha \cdot a_{ij})$$

3. Транспонирование матрицы $(A_{m,n})^T = \left(a_{ij}\right)^T = \left(a_{ji}\right)$

т.е. замена местами соответствующих строк и столбцов

Действия над матрицами

4. Умножение матриц $C_{m,n} = A_{m,l} \cdot B_{l,n}$, где $c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} \right)$,

$(AB \neq BA$ умножение матриц неперестановочно$)$

5. Элементарные преобразования матрицы:

а) перемена местами двух строк (столбцов);

б) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

в) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Действия над матрицами

- Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются эквивалентными и обозначаются $A \sim B$.
- Пример1. Выполнить действия $2A-5B$, если
- $$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Решение.}\, 2A-5B = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -8 & 14 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 5 & 20 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-0 & 4+5 & 6-10 \\ -8-5 & 14-20 & 0-15 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 \\ -13 & -6 & -15 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Пример 2. Найти произведение матриц

$$A\cdot B \text{ и } B\cdot A. \text{ Если } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2+1\cdot 1-2\cdot 0 & 1\cdot(-1)+1\cdot(-2)-2\cdot 1 & 1\cdot 2+1\cdot 3-2\cdot(-2) \\ -3\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 0 & -3\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot 1 & -3\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -6 & 4 & -8 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Произведение $B \cdot A$ невозможно, так как матрица B имеет 3 столбца, а матрица A только 2 строки.

Пример3. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Поменяв местами строки и столбцы соответственно,

получим $A^T = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Действия над матрицами

6. Возведение квадратной матрицы в натуральную степень

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}$$

Пример 4.Найти

A^3, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 9 & -8 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 9 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 & 6 \\ -6 & -35 \end{pmatrix}$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

3. $A \cdot B \neq B \cdot A$

4. $((A)^T)^T = A$

5. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Определители квадратных матриц

Любой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое определителем (детерминантом) матрицы, который обозначается $\det A$ или $|A|$ или Δ

Рассмотрим формулы для вычисления определителей квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

$$\text{Определитель 2-го порядка } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель $3-$го порядка находится методом разложения по первой строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Правило треугольника

+ −

Первые три произведения элементов записывают со своими знаками, а следующие три произведения элементов записывают с противоположными знаками

Определитель по правилу треугольника раскладывается по формуле:

$$\text{Определитель } 3-\text{го порядка}:$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Свойства определителей

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы .

При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменяет знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.

Если определитель содержит строку (или столбец), состоящую из нулей, то он равен нулю.

Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно выносить за знак определителя.

Если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то определитель равен нулю.

Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Определители

- Вычислить определители.

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14;\ 2)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - (-12) = 28$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (2 - 5) - 3 \cdot (1 + 2) - 2 \cdot (-5 - 4) = -12 - 9 + 18 = -3$$

Определители квадратных матриц

- Определитель *n*-го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

- A_{ij} , где – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- M_{ij} – минор элемента – определитель *(n-1)*-го порядка, получаемый из определителя вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Определители

Алгебраическими дополнениями A_{ij} к элементам матрицы A называется $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}, т.е. определитель (n-1)-го порядка, получаемый из определителя $|A|$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Определитель *n*-го порядка определяется так:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \text{ где}$$

A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij}

Системы линейных уравнений

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая m уравнений и n неизвестных имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, называются коэффициентами системы, а – b_i свободными членами.

Совокупность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, которые при подстановке обращают все уравнения системы в тождества, называется –*решением* СЛАУ

Системы линейных уравнений

- СЛАУ называется *несовместной,* если не имеет решений и *совместной,* если имеет хотя бы одно решение.

Совместная СЛАУ называется *определенной*, если имеет одно решение и *неопределенной,* если имеет бесконечно много решений.

СЛАУ называется однородной, если все свободные члены равны нулю, иначе–неоднородной.

Методы решения СЛАУ

- **Метод Крамера** применяют, если $m = n$ и
- определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- тогда

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}}$$

где Δ_i получается путем замены i -го столбца в главном определителе Δ столбцом свободных членов. Формулы называются *формулами Крамера.*

Решение СЛАУ

- **Решить систему линейных уравнений по**

формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Найдем определитель, составленный из

$$\text{коффициентов } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 6 - (2 - 8 - 3) = 5 \neq 0$$

Решение СЛАУ

Вычисляем вспомогательные определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -15$$

Решение СЛАУ

- Отсюда получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\textit{Проверка: подставим в каждое уравнение}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 2 - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-3) = 2, \\ 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 2\cdot(-3) = -2, \\ 1\cdot 2 - 2\cdot(-1) + 1\cdot(-3) = 1. \end{cases}$$