

Лекция 2

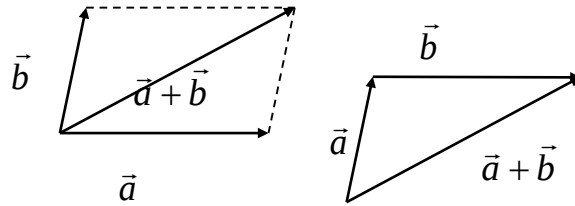
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Векторы и действия над ними

- Вектор $\overline{AB}$ – направленный отрезок, где точка A начало вектора, точка B конец вектора (можно обозначать $\vec{a} = \overline{AB}$)
- Длина или модуль вектора обозначается $|\vec{a}| = |\overline{AB}|$ -это расстояние от начала вектора до его конца.
- *Коллинеарными* называются 2 вектора, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
- *Компланарными* называются 3 вектора, которые лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

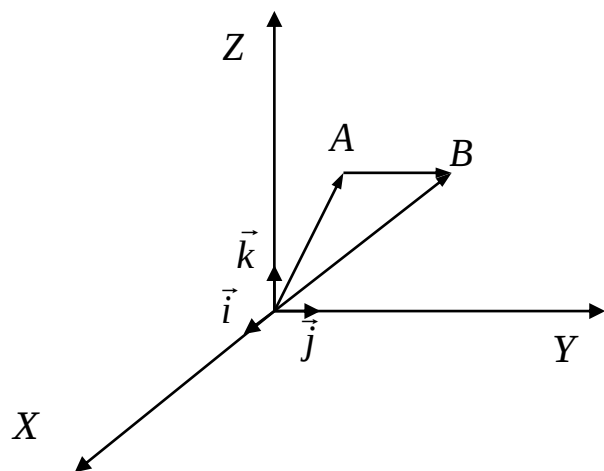
Сложение векторов



Умножение на число

$$\lambda \vec{a} = \vec{b} : \quad \vec{b} \parallel \vec{a}, \quad \begin{cases} \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \text{ при } \lambda > 0, \\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \text{ при } \lambda < 0. \end{cases}$$

Прямоугольная система координат



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — декартов базис

где $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$,

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, тогда вектор можно записать
в виде разложения по базису

$$\vec{a} = \overline{AB} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

или $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ — где числа в скобках называются
координатами вектора

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ — модуль вектора можно вычислить

через его координаты

Действия над векторами в координатах

- Если даны координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$

то координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$

Если заданы координаты векторов, то справедливы формулы

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$$

Условие коллинеарности
векторов

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

- Угол φ между векторами равен $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
где скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Работа силы по перемещению материальной точки:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \text{где вектор перемещения } \vec{s} = \overline{AB}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

- Площадь параллелограмма, построенного на векторах ,
выходящих из одной точки: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

где векторное произведение находится через

координаты векторов $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Площадь треугольника, построенного на векторах $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

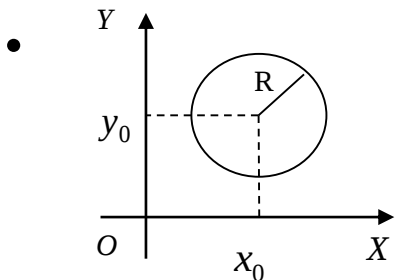
- Объём треугольной пирамиды, построенной на трёх векторах, исходящих из общего начала

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

где смешанное произведение трёх векторов
можно найти через их координаты

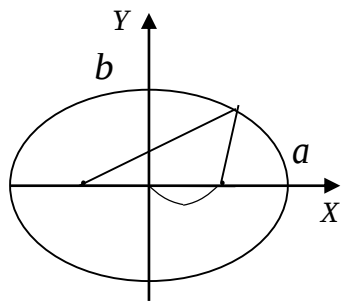
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА



Уравнение смещённой окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

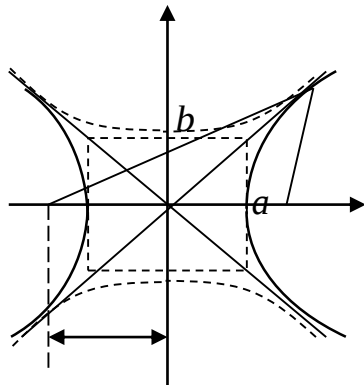


Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

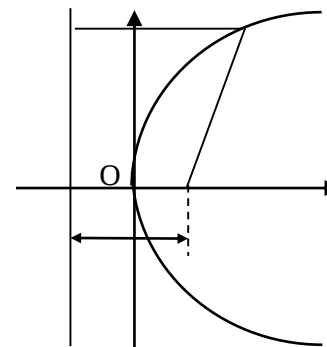


Каноническое уравнение сопряженной гиперболы:(пунктиром)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Каноническое уравнение горизонтальной параболы: $x = ay^2$

Каноническое уравнение вертикальной параболы $y = ax^2$



ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

- *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{где } M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3) -$$

координаты точек

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$

где $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости,
перпендикулярный к ней

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

- Угол между плоскостями находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

где координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

Какие уравнения прямой на плоскости применяются при решении задач

- *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*
- $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент прямой,
- α — угол, который прямая образует с положительным направлением
- оси OX , b — ордината точки пересечения прямой с осью OY
- *Уравнение прямой, проходящей через две точки с данными координатами*
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$
- *Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ равен $\operatorname{tg} \varphi = \pm \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$*