# ЛЕКЦИЯ №3

Функция. Основные понятия.

Непрерывность функции одной независимой переменной в точке и на отрезке.

# Функция. Основные понятия.

- **Определение.** Если каждому независимому значению переменной $x$ из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно значение переменной , то переменная называется *функцией* и обозначается $y = f(x)$.
- Функция может быть задана, например, с помощью таблицы или аналитически ( с помощью формулы), или графически.
- Совокупность значений , при которых определяется функция , называется *областью определения этой функции* и обозначается $D$.

# Функция. Основные понятия.

- Функция бывает:
- чётная, если $f(-x)=f(x)$, нечётная, если $f(-x)=-f(x)$
- или общего вида, если  ни то и ни другое;
- периодическая (только тригонометрические);
- возрастающая или убывающая;
- сложная (или суперпозиция, например, $y=f(g(x))$ зависимость может быть более сложной).

# Функция. Основные понятия

- *Основные элементарные функции*:
- степенная,
- показательная;
- логарифмическая;
- тригонометрические;
- обратные тригонометрические функции.

# Функция. Основные понятия

- *Важнейшим понятием функции является предел.*
- **Определение.** Число A называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - a| < \Delta$
- выполняется неравенство для функции

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

- и обозначают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

# Функция. Основные понятия

- *Основные правила вычисления пределов*

$$\lim_{x\to a} C = C$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$f(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

$$g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

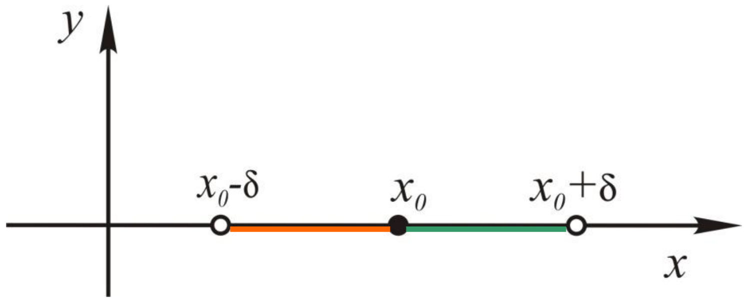
$$\lim_{x\to a}(Cf(x)) = C\lim_{x\to a} f(x)$$

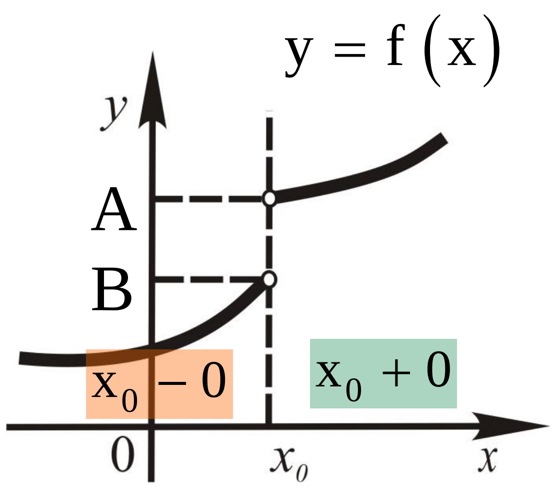
Все правила имеют смысл, если пределы функций существуют

# Функция. Основные понятия

- Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов:
- **Первый замечательный предел** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- **Второй замечательный предел** $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
- или в другой форме $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

# Односторонние пределы



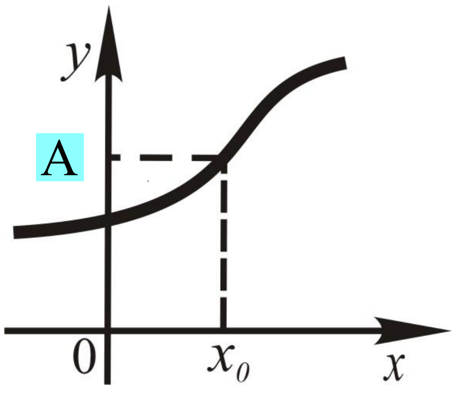

Правый (правосторонний) предел функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ :

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A$$

Левый (левосторонний) предел функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ :

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=B$$

# Односторонние пределы (продолжение)




Справедливо утверждение:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

# Непрерывность функции одной независимой переменной в точке.

Функция называется непрерывной в точке $x_0$, если выполняются три условия:

1. Функция определена в точке $x_0$, то есть существует $f(x_0)$;

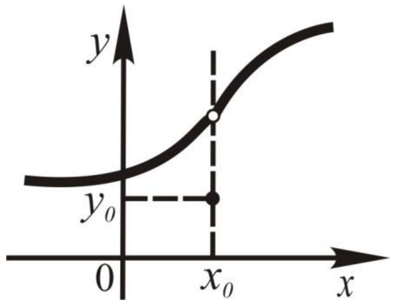
2. Существуют и равны $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$, то есть существует предел $$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = A.$

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то говорят, что $x_0$ - точка разрыва функции.

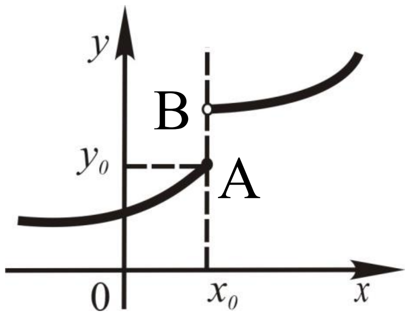
# Непрерывность функции одной независимой переменной в точке. Классификация точек разрыва.




разрыв **1 рода**

$f(x_0)$ - не существует
или
$f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x).$

Нарушены пункты 1 или 3 определения.
(Разрыв устранимый).




разрыв **1 рода (скачок)**

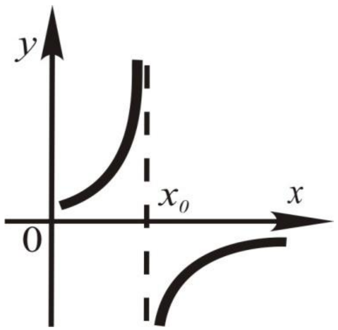
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B.$

$A,\ B = const;$

$A \neq B$

Нарушен пункт 2 определения.
(Разрыв неустранимый).
Функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет скачок, равный B-A.




разрыв **2 рода**

При $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$ $\lim f(x) = \pm\infty$

или не существует.

Такой разрыв часто называют бесконечным.

# Непрерывность функции одной независимой переменной в точке. Примеры

**Пример 1.** Исследовать функцию $y=e^{\frac{1}{x+1}}$ на непрерывность, найти точки разрыва функции.

**Решение.**

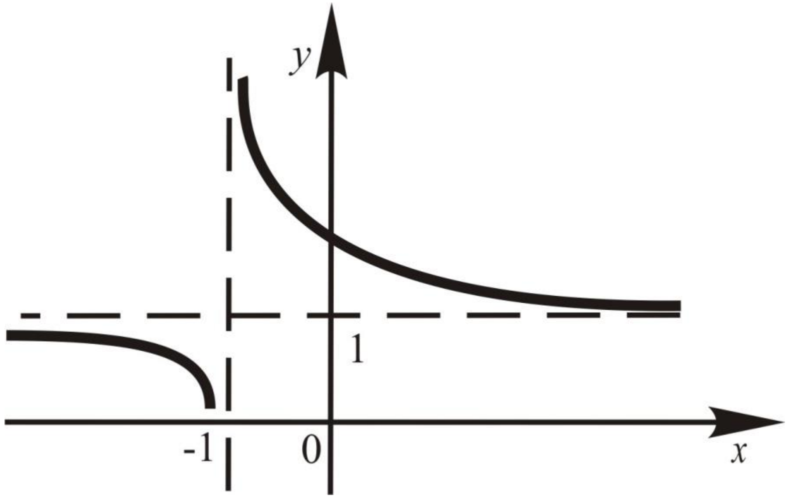
Данная функция непрерывна всюду, за исключением точки $x_0=-1$. Чтобы установить характер разрыва в этой точке, найдём односторонние пределы.

$$\lim_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x+1}}=0,$$

т.к. при $x\to -1$ слева $\frac{1}{x+1}\to -\infty$ ;

$$\lim_{x\to -1+0} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty,$$

т.к. при $x\to -1$ справа $\frac{1}{x+1}\to +\infty$ .

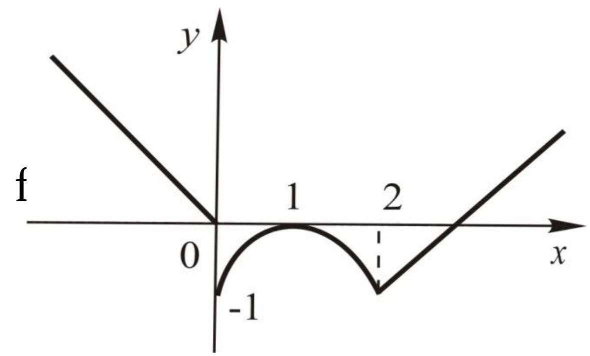



Предел справа бесконечный, следовательно, точка $x_0=-1$ - точка разрыва второго рода.

# Непрерывность функции одной независимой переменной в точке. Примеры (продолжение)

**Пример 2.**

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность, найти точки разрыва функции:




**Решение.**

Данная функция непрерывна везде, за исключением точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Установим характер разрыва в каждой из этих точек.

$\boxed{x_1 = 0}$ - точка разрыва 1 рода (разрыв неустранимый)

1. $f(0) = 0;$

2. $\lim\limits_{x \to 0-0}(-x) = 0,$ $\lim\limits_{x \to 0+0}\left(-(x-1)^2\right) = -1,$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ - не существует;

3. Не выполнено.

$\boxed{x_2 = 2}$ - точка непрерывности функции

1. $f(2) = -1;$

2. $\lim\limits_{x \to 2-0}\left(-(x-1)^2\right) = -1,$ $\lim\limits_{x \to 2+0}(x-3) = -1,$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1;$

3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = -1;$

# Непрерывность функции одной независимой переменной в точке.

## Примеры (продолжение)

**Пример 3.** Исследовать функцию $y=\dfrac{\sin x}{x}$ на непрерывность, найти точки разрыва функции.

**Решение.**

Данная функция непрерывна везде, за исключением точки $x_0=0$. Чтобы установить характер разрыва в этой точке, найдём односторонние пределы.

1. $f(0)$ - не существует;

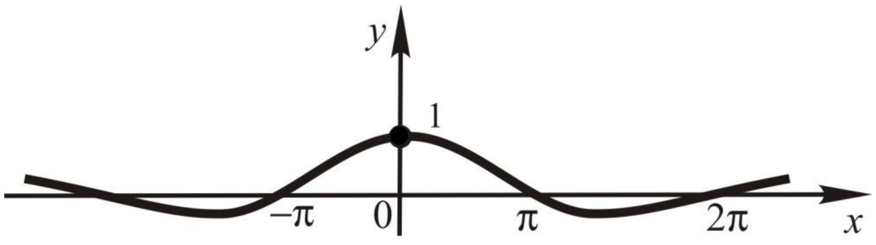
2. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1;$

3. Не выполнено.

Точка $x_0=0$ - точка разрыва 1 рода, разрыв устранимый.

Доопределим функцию следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$



# Непрерывность функции одной независимой переменной в точке.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, тогда справедливо:

$1^o$. $f(x) \pm g(x)$ - непрерывная функция в точке $x_0$;

$2^o$. $f(x) \cdot g(x)$ - непрерывная функция в точке $x_0$;

$3^o$. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывная функция в точке $x_0$,

если $g(x_0) \neq 0$;

Если $y=f(x)$ - непрерывная функция в точке $x_0$ и некоторой её окрестности, то:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

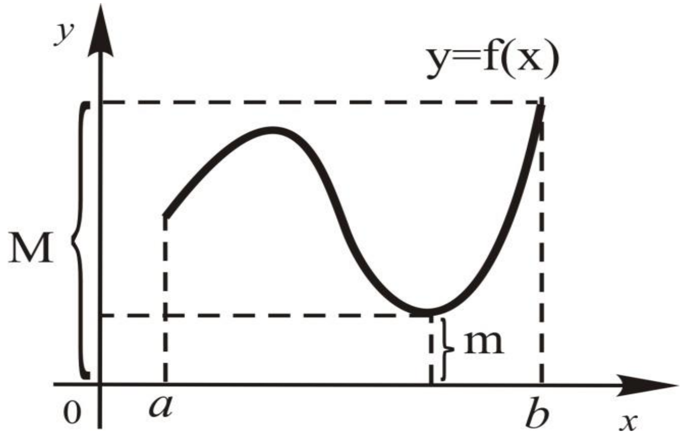
# Непрерывность функции одной независимой переменной на отрезке.

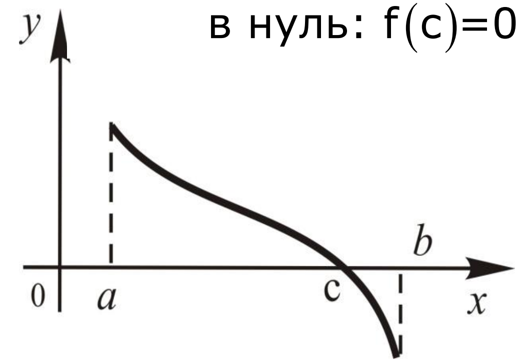
Если функция f(x) непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала, соответственно справа и слева, то говорят, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b].

Непрерывная на отрезке [a,b] функция достигает на этом отрезке по меньшей мере один раз наибольшего значения **M** и наименьшего значения **m**.

Если функция непрерывна на отрезке [a,b], то она принимает внутри него все промежуточные значения между **M** и **m**.

Если непрерывная на отрезке [a,b] функция концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то на [a,b] найдётся, по крайней мере, одна точка, в которой функция обращается в нуль: f(c)=0.

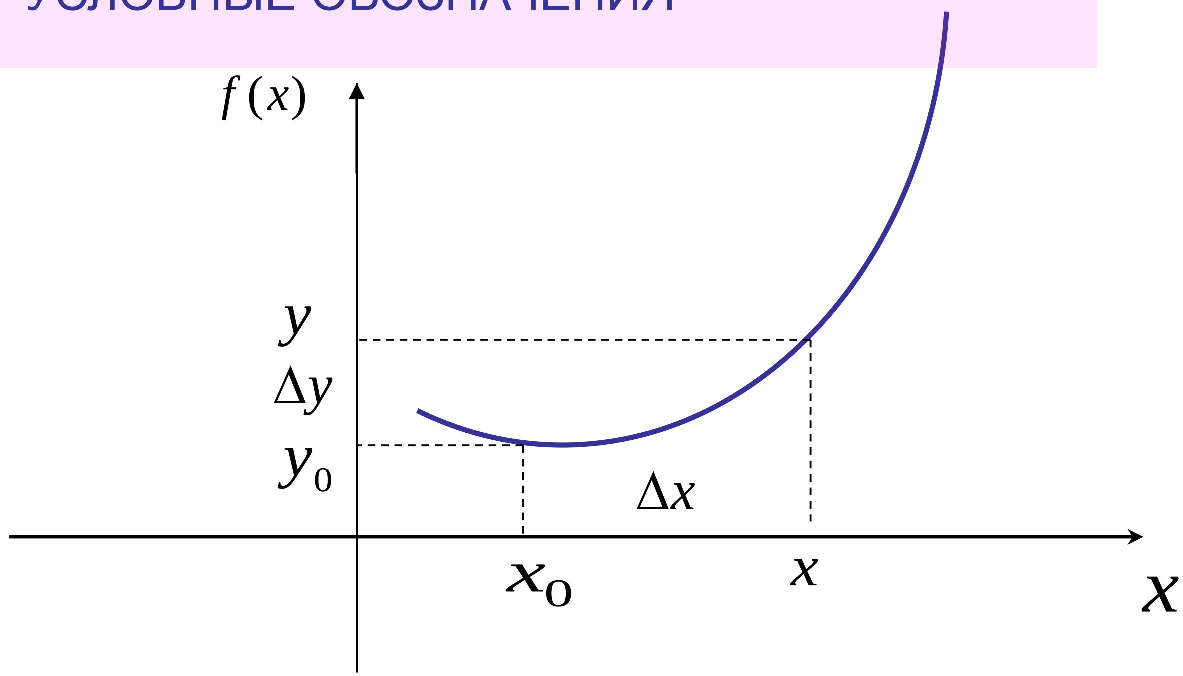


[redacted]

- ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

# УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ




Введём обозначения

$\Delta x = x - x_0$ - *приращение аргумента*

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ - *приращение функции*

# Производная функции.

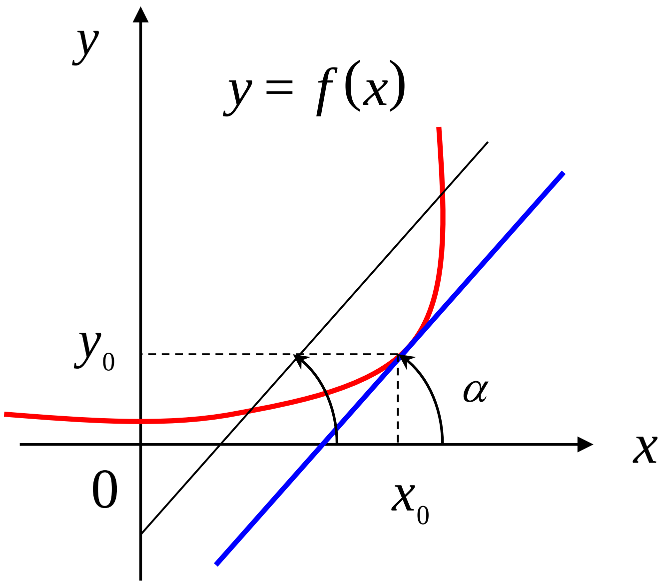
*Определение.* Производной функции в точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если оно существует и обозначается

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция называется дифференцируемой в точке, если существует её производная в этой точке.

# Геометрический и механический смысл производной

$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$




$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Механический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения материальной точки.

# Дифференцируемость функции

- Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

- Преобразуем $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x =$$

$$= y' \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0$$

- Функция непрерывна. Обратное неверно.

# Основные правила дифференцирования

- 1 . $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- 2 . $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- 3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \text{ \textit{если} } v \neq 0$
- 4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ \textit{где} } y = f(u(x)) - \text{\textit{сложная функция}}$

## Таблица производных.

$$y = f(v(x)),\ где\ m, a, c - const$$

1. $(v^m)' = m v^{m-1} \times v'$

   $(c)' = 0,\ (x)' = 1$

2. $(a^v)' = a^v \ln a \times v'$

   $(e^v)' = e^v \times v'$

3. $(\log_a v)' = \dfrac{v'}{v \ln a}$

   $(\ln v)' = \dfrac{v'}{v}$

4. $(\sin v)' = \cos v \times v'$

5. $(\cos v)' = -\sin v \times v'$

6. $(tg\ v)' = \dfrac{v'}{\cos^2 v}$

7. $(ctg\ v)' = -\dfrac{v'}{\sin^2 v}$

8. $(\arcsin\ v)' = \dfrac{v'}{\sqrt{1 - v^2}}$

9. $(\arccos\ v)' = -\dfrac{v'}{\sqrt{1 - v^2}}$

10. $(arctg\ v)' = \dfrac{v'}{1 + v^2}$

12. $(arcctg\ v)' = -\dfrac{v'}{1 + v^2}$

# ПРИМЕРЫ

*Пр*.1. $y = \sin x$, найти $y'$ по определению

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

*По определению* $\quad y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x,$

*так как* $\quad \sin\frac{\Delta x}{2} \approx \frac{\Delta x}{2}$

# Найти производные

$$Пр.2 \quad y = (4\sqrt{x} - \frac{2}{x} + 2^x) \cdot \ln x$$

$$y' = (4\sqrt{x} - \frac{2}{x} + 2^x)' \cdot \ln x + (4\sqrt{x} - \frac{2}{x} + 2^x) \cdot (\ln x)' =$$

$$= (4 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + 2x^{-1-1} + 2^x \cdot \ln 2) \cdot \ln x + (4\sqrt{x} - \frac{2}{x} + 2^x) \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 2^x \cdot \ln 2) \cdot \ln x + (4\sqrt{x} - \frac{2}{x} + 2^x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

# ПРИМЕРЫ

- Найти производную функции $y = \dfrac{3x^2 + 1}{2x^3 + 5}$

- Пользуясь правилом дифференцирования дроби и таблицей производных, получим

$$y' = \frac{(3x^2+1)' \cdot (2x^3+5) - (2x^3+5)' \cdot (3x^2+1)}{(2x^3+5)^2} =$$

$$\frac{6x(2x^3+5) - 6x^2(3x^2+1)}{(2x^3+5)^2} =$$

$$= \frac{-6x^4 - 6x^2 + 30x}{(2x^3+5)^2}.$$

# Найти производные

Пр.3 $y=\sqrt[3]{2x^2-5}+\sin e^x - tg\, x^5.$

$$(v^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}v^{\frac{1}{3}-1} \times v'$$

$$y' = ((2x^2-5)^{\frac{1}{3}})' + \left(\sin e^x\right)' - (tg\, x^5)' =$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2-5)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x^2-5)' + \cos e^x \cdot (e^x)' - \frac{(x^5)'}{\cos^2 x^5} =$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2-5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x + e^x \cdot \cos e^x - \frac{5x^4}{\cos^2 x^5}$$

# Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется выражение $f'(x) \cdot dx$, обозначается $dy = f'(x) \cdot dx$, где $dx = \Delta x$ – приращение аргумента.

*Пример* 5. $y = \sin^3 x$, *найти* $dy$.

*Найдём проиизводную функции* $y' = ((\sin x)^3)' =$

$= 3\sin^2 x \cdot (\sin x)'$

и подставим в формулу, получим $dy = 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$.

*Чтобы найти дифференциал, надо найти производную.*

# ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

- Рассмотрим дифференцируемую функцию. Так как в общем случае её производная также является функцией от x, то её можно продолжать дифференцировать следующим образом:

$(f'(x))' = f''(x)$ – производная второго порядка,

$(f''(x))' = f'''(x)$ – производная третьего порядка и так далее

*Замечание*. Для обозначения производных выше 3-его порядка применяют римские цифры или арабские цифры в скобках.

# ПРИМЕР

- Найти $f''(1)$, если $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^2 + x - 5$
- Дифференцируем последовательно

$$f'(x) = (x^5 - x^4 + 3x^2 + x - 5)' = 5x^4 - 4x^3 + 6x + 1$$

$$f''(x) = (5x^4 - 4x^3 + 6x + 1)' = 20x^3 - 12x^2 + 6$$

$$f''(1) = 20 - 12 + 6 = 14$$