Занятие 2
Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$; $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (переместительное);

2) $(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$ (сочетательное относительно числового множителя);

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$ (распределительное относительно суммы векторов).

Если $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Физический смысл скалярного поизведения: если вектор $\vec{F}$ представляет силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа A этой силы определяется равенством $A=(\vec{F},\vec{S})$.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ таковы, что $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=60^0$.

Решение. Диагонали параллелограмма есть векторы $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$. Вычислим длину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}|=|(5\vec{m}+2\vec{n})|=\sqrt{(5\vec{m}+2\vec{n})^2}=\sqrt{25(\vec{m},\vec{m})+20(\vec{m},\vec{n})+4(\vec{n},\vec{n})}=\sqrt{29+10+4}=\sqrt{43}.$$

Аналогично вычисляется длина вектора $\vec{d}$.

Задача 2. Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(-1,2,2)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{b},\vec{a})=-2$.

Решение. Обозначим вектор $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, тогда из условий задачи

$$\begin{cases}-b_1+2b_2+2b_3=-2\\ -b_1=\dfrac{b_2}{2}=\dfrac{b_3}{2}\end{cases} \quad \text{или} \quad b_2=-2b_1;\ b_3=-2b_1;\ -9b_1=-2;\ b_1=2/9,$$

тогда $b_2=b_3=-4/9$. Итак: $\vec{b}=(2/9,-4/9,-4/9)$.

Задача 3. Найти проекцию вектора $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ на направление вектора $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$.

Решение. $\vec{b}^{\,0}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$. По формуле проекции вектора на ось будет иметь место равенство

$$\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{u}=(\vec{u},\vec{e})=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 4. Даны векторы: $\vec{a}=(3,-3,-2)$, $\vec{b}=(-4,1,0)$, $\vec{c}=(-1,-2,-2)$, $\vec{d}=(-6,6,4)$.

Проверить, есть ли среди них коллинеарные. Найти $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

Решение. Условие коллинеарности имеет вид $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$. Этому условию удовлетворяют векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$. Следовательно, они коллинеарны. Найдем длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}|=\sqrt{9+9+4}=\sqrt{22}$, $|\vec{b}|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$.

Угол между векторами определяется по формуле $\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Тогда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{-12-3}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{17}}=\frac{-15}{\sqrt{374}}$, $\quad(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\arccos\left(\frac{-15}{\sqrt{374}}\right)$.

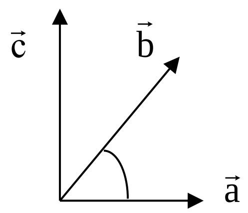
Используя формулу $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$, получим $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{-15}{\sqrt{17}}$.

Задача 5. На материальную точку действуют силы $\vec{f}_1=-\vec{j}$, $\vec{f}_2=-\vec{i}$, $\vec{f}_3=-\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2,-1,0)$ в положение $B(4,1,-1)$.

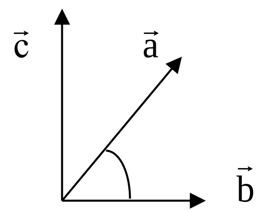
Решение. Найдем силу $\vec{R}$ и вектор перемещения $\vec{R}=\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, тогда искомая работа $A=(\vec{R},\vec{S})=-2-2+1=-3$.

Векторое произведения векторов. Смешанное произведение векторов

Определение1. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется правой (левой) если, находясь внутри телесного угла, образованного приведенными к общему началу векторами $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и от него к $\vec{c}$, човершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке)



Тройка правая



Тройка левая

Определение 2. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $[\vec{a},\vec{b}]$, длина и направление которого определяются условиями:

1. $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$.

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.

Свойства векторного произведения

1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ (свойство антиперестановочности сомножителей);

2. $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=-\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ (распределительное относительно суммы векторов);

3. $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ (сочетательное относиельно числового множителя);

4. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0 \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ (равенство нулю векторного произведения означает коллинеарность векторов);

5. $\vec{M}=\left[\vec{d},\vec{F}\right]$, т. е. момент сил равен векторному произведению силы на плечо.

Если вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$.

Определение 3. Смешанным произведением $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ трех векторов называется число, определяемое следующим образом: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$. Если векторы заданы своими координатами: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, то

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \sim \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения

1. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является равенство $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

2. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$: $V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти координаты векторного произведения $\left[\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right),\left(2\vec{a}-4\vec{b}\right)\right]$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Решение. Найдем $2\vec{a}-3\vec{b}=(0,\ 1,\ 1)$ и $2\vec{a}-4\vec{b}=(-2,\ 2,\ 0)$. Векторное произведение, по определению, равно $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

Задача 2. Силы $\vec{F}_1 = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ приложены к точке $A(3, 4, -1)$. Вычислить величину момента равнодействующей этих сил $\vec{R}$ относительно точки $B(1, 3, 0)$.

Решение. Найдем силу $\vec{R}$ и плечо $\vec{d}$: $\vec{R} = \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k},\ \vec{d} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Момент сил $\vec{M}$ вычисляется по формуле

$\vec{M} = \left[\vec{R}, \vec{d}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - a\vec{j} + 7\vec{k}$, а его модуль $\left|\vec{M}\right| = \sqrt{64 + 81 + 49} = \sqrt{194}$.

Задача 3. Даны координаты вершин параллелепипеда: $A(1,2,3),\ B(0,1,2), C(1,1,3), D(0,0,3)$. Найти объем параллелепипеда, его высоту, опущенную из вершины C, угол между вектором AD и гранью, в которой лежат векторы AB и AC.

Решение. По определению, объем параллелепипеда равен смешанному произведению векторов, на которых он построен. Найдем эти векторы:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-1),\quad \overrightarrow{AC} = (0,-1,0),\quad \overrightarrow{AD} = (-1,-2,0).$$

Объем этого параллелепипеда $V = \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

С другой стороны, объем параллелепипеда $V = S_{o\ c\ н} \cdot h$, $S_{осн}$ - это площадь параллелограмма: $S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

$S_{осн} = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left|-\vec{i} - \vec{k}\right| = \sqrt{2}$, тогда высота $h = \frac{v}{S_{осн}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Угол между вектором и гранью φ найдем по формуле

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\left|\left(\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}.$$

так как вектор $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ перпендикулярен грани, в которой лежат векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Угол между этим вектором и вектором $\overrightarrow{AD}$ находим по известной формуле

$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$. Очевидно, что искомый угол $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Итак: $\psi = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Задача 4. Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A(0, 0, 1), B(2, -1, 3), C(1, 2, -2)$, $D(3, -4, 8)$. Найти линейную зависимость вектора $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если это возможно.

Решение. Найдем три вектора: $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AC},\ \vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

$\vec{a}=(2,-1,2)$, $\vec{b}=(1,2,-3)$, $\vec{c}=(3,-4,7)$.

Три вектора лежат в одной плоскости, если они компланарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}=0$. Следовательно, эти три вектора линейно зависимы. Найдем линейную зависимость $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix},\ \begin{cases} \alpha+3\beta=2 \\ 2\alpha-4\beta=-1 \\ -3\alpha+7\beta=2, \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $\alpha=\beta=1/2$, т.е. $\vec{a}=1/2\vec{b}+1/2\vec{c}$.

Домашнее задание

Задание № 2

В ΔABC, если $A(2;-4;2)$; $B(1;-6;3)$;$C(2;3;-2)$. Найти высоту *BD,* косинус угла *ABC.*

Задание № 4

Найти работу равнодействующей сил $F_1(-3;2;5)$, $F_2(4;-3;6)$ при перемещении её из точки приложения $M_1(-3;2;4)$ в точку $M(3;1;2)$.

Задание № 6

При каком значении α векторы $\vec{a}=(\alpha;-5;3)$,$\vec{b}(1;2;-\alpha)$ перпендикулярны.

Задание № 8

Дано: $\vec{a}=(3;-6;-1)$,$\vec{b}(1;4;-5)$,$\vec{c}(3;-4;12)$. Найти $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+\vec{b}$.

Задание № 10

Дано: $\vec{a}_1=(3;-1;2)$,$\vec{a}_2(1;2;-1)$. Найти: $(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{a}_2$; $(2\vec{a}_1-\vec{a}_2)\times(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)$.

Задание № 13

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=6, \angle(\vec{a},\vec{b})=150^\circ$.

Задание № 15

Доказать, что точки $A(3;-5;1)$; $B(2;-4;1)$;$C(-1;-3;3)$;$D(-4;4;-1)$ лежат в одной плоскости.

Задание № 17

Даны вершины пирамиды $A(3;4;-4)$; $B(1;-2;-1)$;$C(-3;1;-4)$,$D(2;2;2)$. Найти объём пирамиды и длину высоты, опущенной из точки *D* на грань *ABC.*